Olimpíadas de Física

Fase Local de Cantabria

15 de Febrero de 2025

INDICACIONES

(1) Se dispone de **3 horas** para la realización de la prueba.

(2) La prueba consta de **4 ejercicios**. Cada ejercicio, con los cálculos debidamente justificados y razonados, se calificará con un máximo de **2.5 puntos**.

(3) Es recomendable **fijarse detenidamente en las figuras** que acompañan a cada ejercicio: ayudan a entender mejor lo que se pregunta, facilitando la resolución de las cuestiones planteadas.

(4) Cada ejercicio tiene un apartado de **ayuda** donde se dan pistas y/o se sugieren estrategias para su resolución.

(5) Cada ejercicio debe realizarse **EN HOJAS DISTINTAS**. Se pueden usar varias hojas para un mismo ejercicio.

(6) Hay que poner **Nombre y Apellidos** en todas las hojas entregadas.

(7) La prueba debe hacerse a **bolígrafo**.

(8) No es necesario entregar el enunciado ni las hojas en sucio.

EJERCICIO 1.

La figura 1 muestra una avioneta remolcando a un planeador unido por un cable en la fase de despegue. Las masas de la avioneta y del planeador (incluyendo a los pasajeros) son, respectivamente, $m_a = 800$ kg y $m_p = 200$ kg. Cuando la avioneta despega sola (es decir, sin remolcar al planeador), necesita recorrer 180 m de la pista de despegue para levantar el vuelo. En la resolución de este ejercicio se despreciará cualquier tipo de rozamiento (con la pista, con el aire, etc), así como la masa del cable. Además, se tendrá en cuenta que i) la velocidad de la avioneta en el momento del despegue es siempre la misma (con y sin planeador) y que ii) la fuerza que ejerce el motor de la avioneta es siempre la misma (con y sin planeador). Calcular:

a) [1 punto] La longitud de pista que necesita recorrer la avioneta cuando remolca al planeador hasta el momento del despegue.

b) [1 punto] La velocidad de la avioneta en el despegue si la tensión del cable es de 400 N.

c) [0.5 puntos] La masa máxima que debería tener el planeador (incluyendo el pasajero), para que la avioneta remolcándole pueda despegar en una pista de 300 m.

Ayuda:

Para el apartado a), hay que plantear las ecuaciones dinámicas y cinemáticas correspondientes en los casos en los que i) la avioneta despega sola y ii) lo hace remolcando al planeador. ¿Qué tipo de movimiento describe la avioneta an ambos casos?

Los apartados b) y c) se resuelven mediante las ecuaciones planteadas en el apartado a).

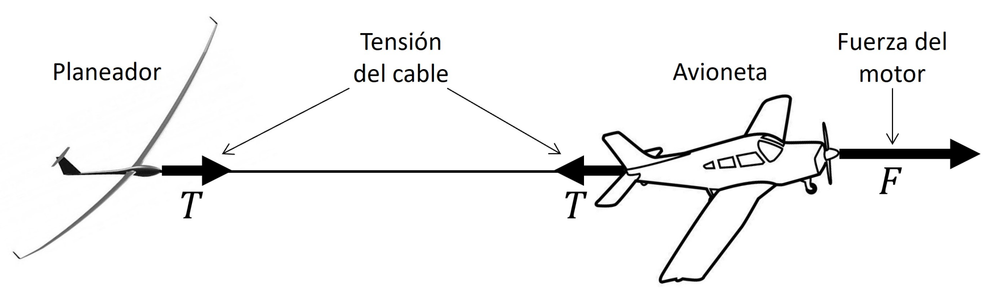

Figura 1: Avioneta remolcando a un planeador mediante un cable. Se muestran la fuerza impulsora del motor de la avioneta F y la tensión del cable T.

EJERCICIO 2.

La *braquistócrona* es la trayectoria más rápida de descenso de un objeto entre dos puntos bajo la acción de la gravedad. En la figura 2(a) se muestran tres posibles trayectorias para que un objeto pueda desplazarse del punto A al punto B: (1) un plano inclinado, (2) dos tramos rectos (uno vertical y otro horizontal) con una esquina en forma de curva suave y (3) una trayectoria más compleja, la braquistócrona. Siendo la solución de esta última bastante compleja, en la figura 2(b) se plantea un caso más sencillo en el que la trayectoria está formada por dos tramos rectilíneos: un plano inclinado (de ángulo α y altura H) entre los puntos AI, y un tramo horizontal entre los puntos IB. Despreciando el rozamiento:

a) [1 punto] Hallar las expresiones para los tiempos empleados en recorrer el plano inclinado t_1 y el tramo horizontal t_2, en función de H, L, α y g, siendo g la aceleración de la gravedad.

b) [1 punto] Para valores predeterminados de H, L y g, ¿cuál es el ángulo óptimo del plano inclinado α_{o}, para que un objeto moviéndose de A a B lo haga en el menor tiempo posible?

c) [0.5 puntos] En las condiciones del apartado b), la longitud L ha de tomar valores mayores que un mínimo, $L_{\min}$, que depende de la altura H y del ángulo óptimo α_{o}, es decir, $L > L_{\min}(H, \alpha_{\mathrm{o}})$. Hallar $L_{\min}$.

Ayuda:

Para el apartado a), plantear las ecuaciones cinemáticas correspondientes, teniendo en cuenta los tipos de movimiento (rectilíneo) que se dan en cada caso.

Para el apartado b), a partir del tiempo total $t = t_1 + t_2$ para recorrer el trayecto AIB, se pide obtener el ángulo para que el tiempo sea mínimo. En otras palabras, se pide el valor óptimo de α (lo denominaremos α_{o}), para que la función $t = t(H, L, g, \alpha)$ adquiere un valor mínimo, tomando constantes H, L y g.

Para el apartado c), hay que imponer la condición límite de que la base del plano inclinado en la figura 2(b) se sitúe en el punto B cuando el ángulo es el óptimo, $\alpha = \alpha_{\mathrm{o}}$.

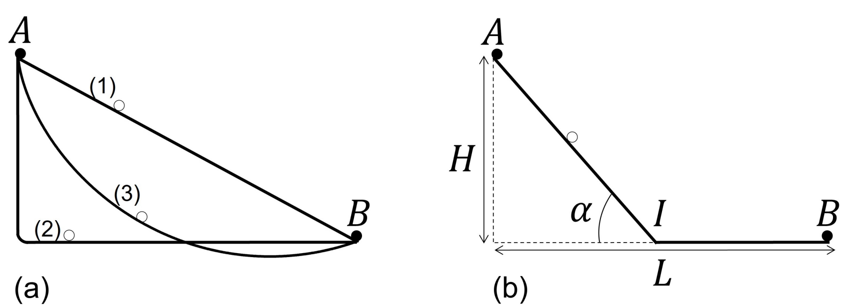

Figura 2: (a) Posibles trayectorias que un objeto puede describir para desplazarse entre los puntos A y B, bajo la acción de la gravedad: (1) plano inclinado, (2) caída libre seguida de un tramo horizontal, con la esquina en forma de curva suave y (3) la braquistócrona. (b) Caso alternativo en el que la trayectoria está formada por dos tramos rectilíneos: un plano inclinado AI (de ángulo α y altura H) y un tramo horizontal IB.

EJERCICIO 3.

En la figura 3 se muestra un meteoroide aproximándose a la Tierra a velocidad $v_0 = 9000$ km/h. El *parámetro de impacto* (distancia entre la trayectoria del meteoroide cuando aun se encuentra muy lejos y una línea paralela que pasa por el centro de la Tierra) es $b = 10^6$ km. Calcular:

a) [1 punto] La distancia mínima, d_{min}, a la que el meteoroide pasa del centro de la Tierra.

b) [0.5 puntos] El módulo de la velocidad del meteoroide, v_{max}, al pasar por el punto más próximo.

c) [1 punto] El valor mínimo de b para que el meteoroide no impacte con la Tierra.

Ayuda:

Despreciando el rozamiento y las interacciones con otros cuerpos, la **energía mecánica total** del meteoroide **se conserva**: el sistema meteoroide+Tierra constituye un sistema conservativo si sólo se considera la fuerza gravitatoria, lo que implica:

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante}, \tag{1}$$

siendo E_m, E_c y E_p las energías mecánica, cinética y potencial del meteoroide respectivamente.

Además, al ser la fuerza gravitatoria terrestre una **fuerza central** (dirigida a lo largo de la línea que conecta el meteoroide con el centro de la Tierra) el **momento angular** del meteoroide ($\mathbf{L}$) **se conserva** en su trayectoria. El momento angular se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, siendo $\mathbf{r}$ el vector de posición del meteoroide con respecto al centro de la Tierra y $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ su momento lineal ($\mathbf{v}$ es su vector velocidad). El módulo del momento angular inicial del meteoroide es mbv_0.

Datos:

Masa de la Tierra: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg.
Radio de la Tierra: $R_T = 6370$ km.
Constante de gravitación universal: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 $\cdot$ kg^{-2}.

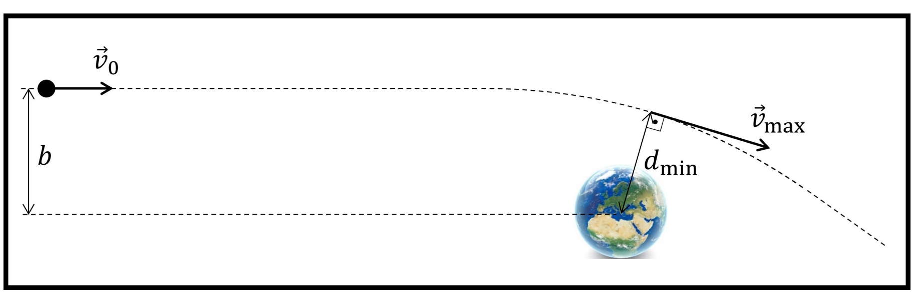

Figura 3: Esquema de la trayectoria seguida por un meteoroide aproximándose a la Tierra. Se muestra el parámetro de impacto b, el vector velocidad inicial $\vec{v}_0$, la distancia mínima d_{min}, y el vector velocidad a la distancia mínima $\vec{v}_{\text{max}}$. El vector de posición del meteoroide respecto al centro de la Tierra en el punto de máximo acercamiento forma 90° con el vector velocidad.

EJERCICIO 4.

Una esfera metálica aislada de radio $R_1 = 9$ cm, se carga a un potencial de $V_{1,0} = 10^4$ V, como se muestra en la figura 4(a). A continuación, se toca con otra esfera metálica aislada y descargada, de radio $R_2 = 3$ cm, como se indica en la figura 4(b). Después la segunda esfera se descarga. El proceso de puesta en contacto de ambas esferas previa descarga de la segunda se repite n veces, como se indica en la figura 4(c).

a) [0.5 puntos] Calcular la carga inicial de la primera esfera, $Q_{1,0}$, estando a un potencial $V_{1,0} = 10^4$ V, antes de ponerse en contacto con la segunda esfera.

b) [1 punto] Calcular las cargas, $Q_{1,1}$ y $Q_{2,1}$, y los potenciales, $V_{1,1}$ y $V_{2,1}$, de ambas esferas después de la primera puesta en contacto, antes de la descarga de la segunda. ¿Se verifica la conservación de la carga?

c) [1 punto] Obtener las expresiones para la carga y el potencial de la primera esfera al cabo de n descargas ($Q_{1,n}$ y $V_{1,n}$), en función de la carga inicial $Q_{1,0}$, de los radios R_1, R_2 y de n.

Ayuda:

La carga de una esfera metálica aislada de radio R a potencial V es $Q = 4\pi\epsilon_0 RV$. Equivalentemente, el potencial de una esfera metálica aislada de radio R con carga Q es $V = Q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

Al poner en contacto dos esferas conductoras: 1) se redistribuye la carga entre ellas, de manera que ambas se sitúan al mismo potencial y 2) la carga total se conserva (la suma de las cargas de las esferas antes y después de la puesta en contacto es la misma).

Dato:

Permitividad dieléctrica del vacío: $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{N}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

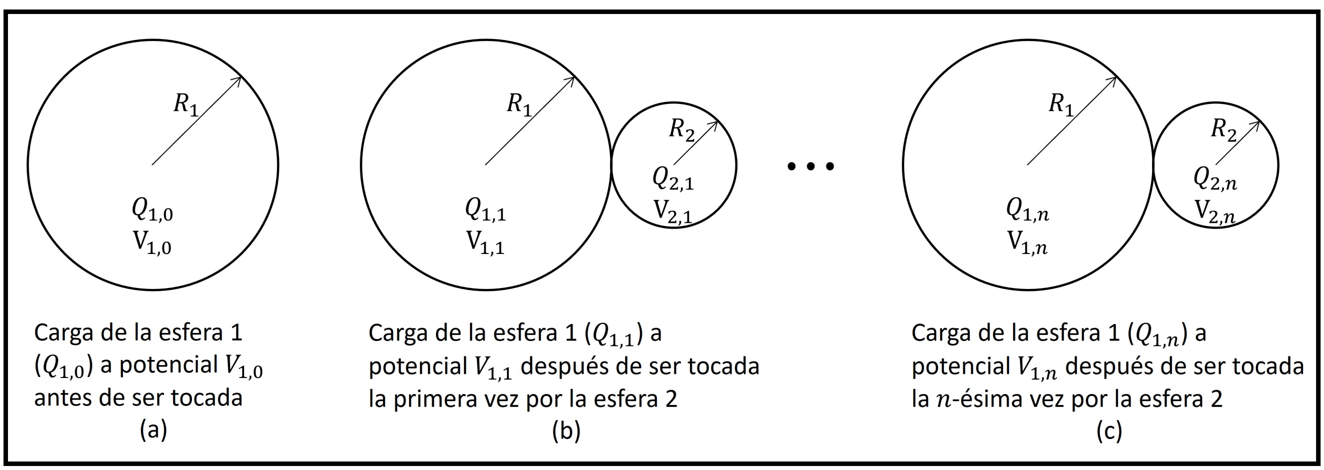

Figura 4: (a) Al ponerse a un potencial $V_{1,0}$, una esfera metálica aislada de radio R_1 adquiere una carga $Q_{1,0}$. (b) Al ser tocada por otra esfera metálica aislada y descargada de radio R_2, los potenciales de ambas esferas se igualan ($V_{1,1} = V_{2,1}$), repartiéndose la carga $Q_{1,0}$ entre ambas ($Q_{1,0} = Q_{1,1} + Q_{2,1}$, con $Q_{1,1} \neq Q_{2,1}$ si $R_1 \neq R_2$). A continuación, la segunda esfera se descarga. (c) El proceso descrito en b) se repite n veces.