CORRIENTE ALTERNA

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA:

Cap. 29 del Tipler–Mosca, vol. 2, 5ª ed.
Cap. 33 del Serway–Jewett, vol. 2, 7ª ed.

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de transportar la electricidad, las pérdidas energéticas a lo largo de las líneas de conducción obligan a recurrir a la utilización de corriente alterna, puesto que con ella es posible, mediante el uso de transformadores, transportar energía eléctrica a alto potencial V y baja intensidad de corriente I.

Para una potencia determinada $P = IV$, la intensidad de corriente será tanto menor cuanto más elevado sea el potencial a que se transmite. Como las pérdidas asociadas al efecto Joule son proporcionales al cuadrado de I ($P = I^2R$), éste será reducido si se reduce I.

Ejercicio

Una industria necesita una potencia de $2000\ kW$ para funcionar. La resistencia eléctrica de los cables utilizados para llevar la energía eléctrica de la central a la industria es de $50\ \Omega$. ¿Cuáles serán las pérdidas de potencia asociadas al transporte en los siguientes casos?

a) La tensión eléctrica utilizada es de $500\ kV$.

b) La tensión eléctrica utilizada es de $5\ kV$.

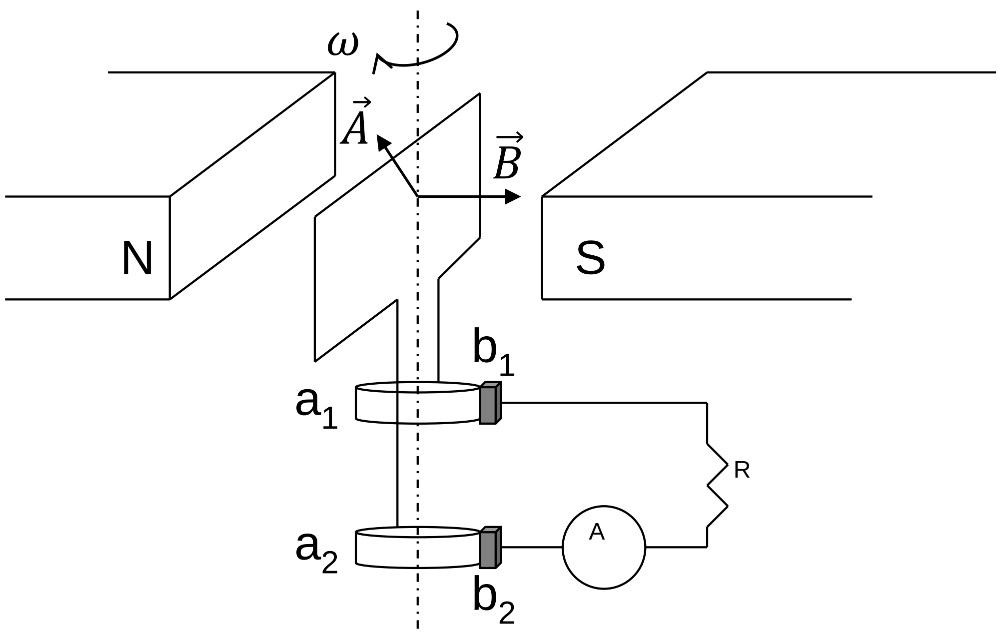
2. GENERADORES DE CORRIENTE ALTERNA

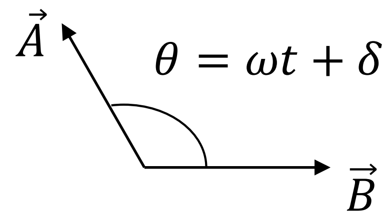
$$\Phi = NBA\cos\theta = NBA\cos(\omega t + \phi) = NBA\cos(2\pi f t + \phi)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -NBA\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = +NBA\,\omega\sin(\omega t + \phi) = \varepsilon_{max}\sin(\omega t + \phi) =$$

$$= \varepsilon_{max}\cos(\omega t)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{max} = NBA\omega \\ \\ \delta = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$





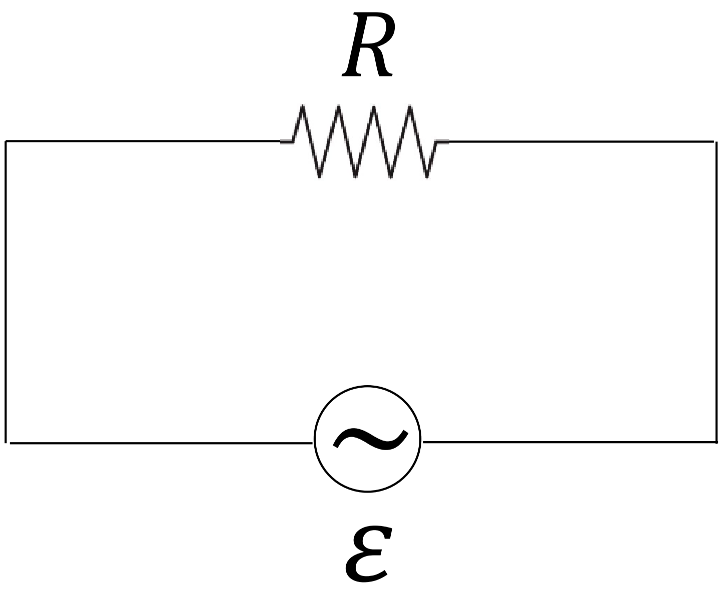
Esquema de un generador de corriente alterna o alternador

3. CIRCUITO DE CA CON UNA RESISTENCIA

$$V_R = \varepsilon = \varepsilon_{max} \cos(\omega t) = V_{R,max} \cos(\omega t)$$

$$V_{R,max} = \varepsilon_{max}$$

$$V_R = IR \Rightarrow V_{R,max} \cos(\omega t) = IR$$



$$I = \frac{V_{R,max}}{R} \cos(\omega t) =$$

$$= I_{max} \cos(\omega t)$$

$$I_{max} = \frac{V_{R,max}}{R}$$

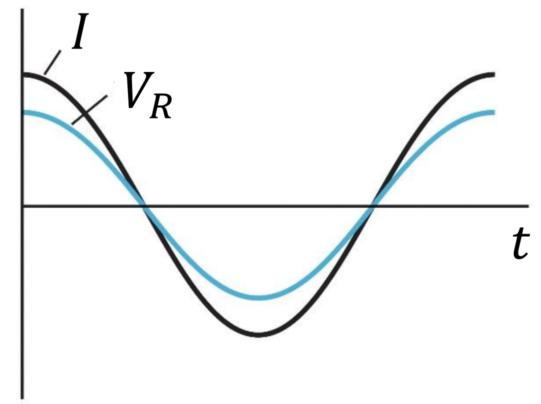
La corriente en la resistencia está en fase con la tensión aplicada.

3. CIRCUITO DE CA CON UNA RESISTENCIA

La potencia disipada en la resistencia varía con el tiempo:

$$P = I^2 R = (I_{max} \cos \omega t)^2 R =$$

$$= I_{max}^2 R \cos^2 \omega t$$

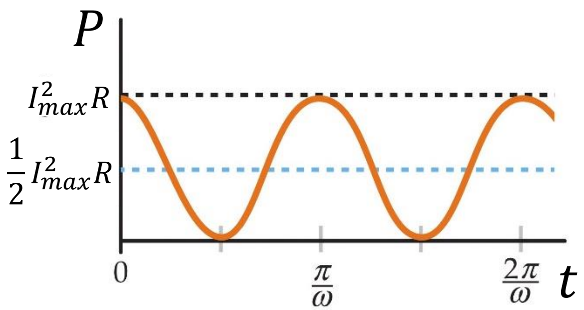


Caída de potencial V_R y corriente I están en fase.

La potencia media será entonces:

$$P_m = (I^2 R)_m = I_{max}^2 R(\cos^2 \omega t)_m =$$

$$= \frac{1}{2} I_{max}^2 R$$



Potencia disipada en la resistencia en función del tiempo. La potencia media es la mitad de la potencia máxima.

4. CIRCUITO DE CA CON UN INDUCTOR

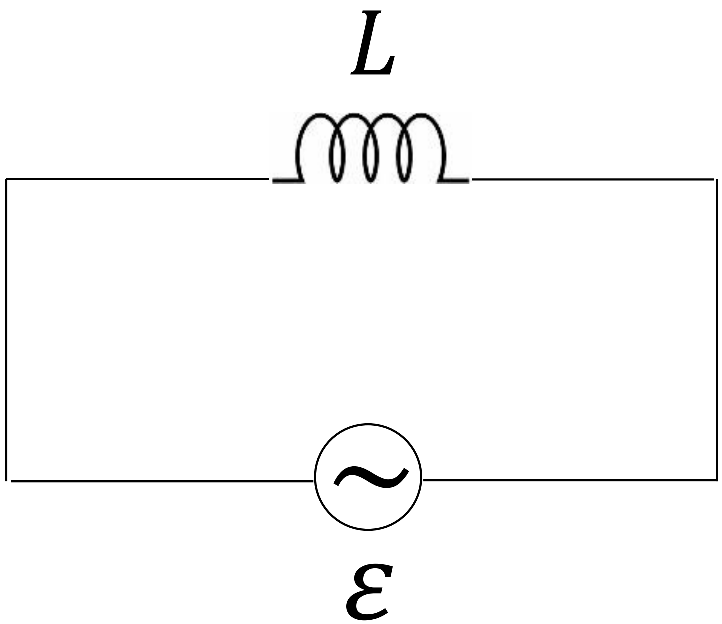
$$V_L = L\frac{dI}{dt} = \varepsilon = \varepsilon_{max}\cos\omega t = V_{L,max}\cos\omega t \qquad (V_{L,max} = \varepsilon_{max})$$

$$V_{L,max}\cos\omega t = L\frac{dI}{dt}$$

$$dI = \frac{V_{L,max}}{L}\cos\omega t\, dt$$

$$I = \frac{V_{L,max}}{L}\int \cos\omega t\, dt =$$

$$= \frac{V_{L,max}}{\omega L}\operatorname{sen}\omega t + \mathrm{C}$$

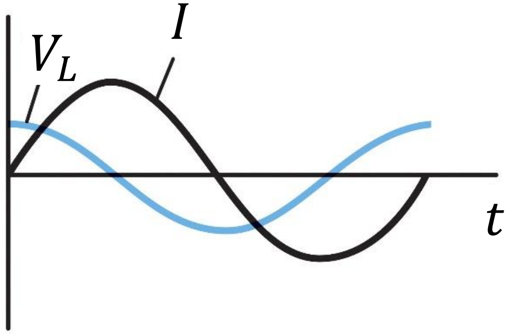


La constante C es la componente cc de la corriente, que supondremos nula:

$$I = \frac{V_{L,max}}{\omega L}\operatorname{sen}\omega t = I_{max}\operatorname{sen}\omega t \qquad \left(I_{max} = \frac{V_{L,max}}{\omega L}\right)$$

4. CIRCUITO DE CA CON UN INDUCTOR

$$\left\{ \begin{array}{l} I = I_{max}\,\mathrm{sen}\,\omega t = I_{max}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ V_L = V_{L,max}\cos\omega t \end{array} \right\}$$



$$I_{max} = \frac{V_{L,max}}{\omega L} = \frac{V_{L,max}}{X_L}$$

$$\boxed{X_L = \omega L}$$ Reactancia o impedancia inductiva

$[X_L] = [R] \Rightarrow$ La unidad SI es el Ohmio (Ω)

$$I_{ef} = \frac{V_{L,ef}}{X_L}$$

El valor máximo en el voltaje se encuentra $90°$ antes que el máximo en la corriente (la caída de tensión adelanta a la corriente en $90°$).

Cuando I es nula, pero está creciendo, dI/dt es máximo y la $fcem$ también lo será al ser ambas cantidades proporcionales. Un cuarto de ciclo después, I es máximo ($dI/dt = 0$) y $V_L = 0$.

4. CIRCUITO DE CA CON UN INDUCTOR

La potencia instantánea cedida a la bobina por el generador es:

$$P = V_L I = V_{L,max} \cos \omega t \, I_{max} \operatorname{sen} \omega t = V_{L,max} I_{max} \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t$$

La potencia media es nula, puesto que:

$$P_m = (V_L I)_m = \left(V_{L,max} I_{max} \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t\right)_m =$$

$$= V_{L,max} I_{max} (\cos \omega t \operatorname{sen} \omega t)_m =$$

$$= V_{L,max} I_{max} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t\right)_m = 0$$

La energía se acumula en forma de campo eléctrico o magnético, pero no se disipa.

4. CIRCUITO DE CA CON UN INDUCTOR

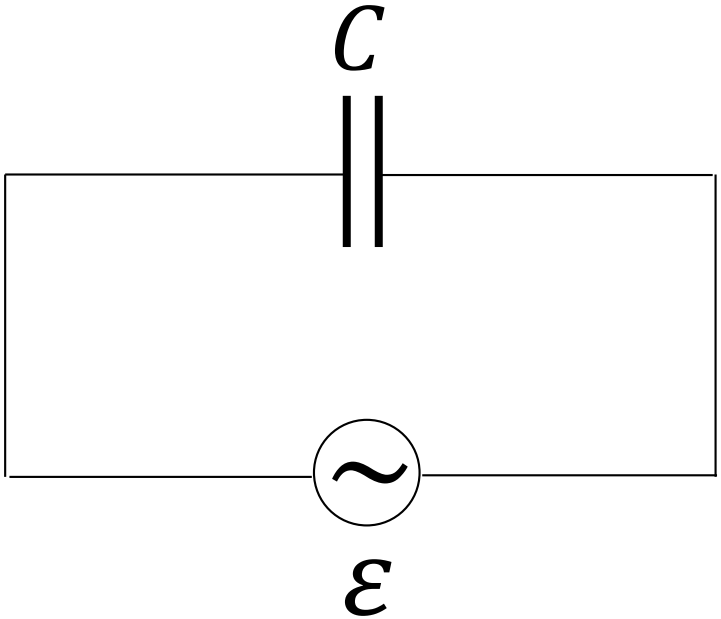
Ejercicio

En una bobina de inductancia $L = 100\ mH$ la caída de potencial (sinusoidal) en sus extremos es de $80\ V$ de amplitud. Si la corriente alterna que circula por la bobina tiene una frecuencia de $50\ Hz$, ¿Cuál será el valor de la reactancia de la bobina y de la corriente eficaz que circula por ella?

Repetir los cálculos para una frecuencia de $10\ kHz$.

5. CIRCUITO DE CA CON UN CONDENSADOR

$$V_C = \frac{Q}{C} = \varepsilon = \varepsilon_{max} \cos \omega t = V_{C,max} \cos \omega t$$

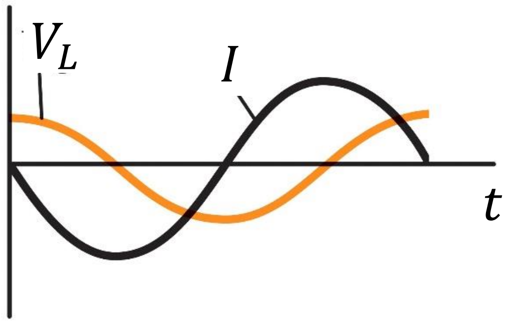


$$Q = V_C C = V_{C,max} C \cos \omega t$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega V_{C,max} C \operatorname{sen} \omega t =$$

$$= -I_{max} \operatorname{sen} \omega t$$

$$\left(I_{max} = \omega C V_{C,max}\right)$$



$$I = -I_{max} \operatorname{sen} \omega t = I_{max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

5. CIRCUITO DE CA CON UN CONDENSADOR

$$I_{max} = \omega C V_{C,max} = \frac{V_{C,max}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{V_{C,max}}{X_C}$$

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{X_C}$$

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$$

Reactancia o impedancia capacitiva

$[X_C] = [R] \Rightarrow$ La unidad SI es el Ohmio (Ω)

El valor máximo en el voltaje se encuentra $90°$ después que el máximo en la corriente (la caída de tensión está retrasada respecto a la corriente $90°$).
Al ser la carga Q proporcional a la tensión V_C, la máxima variación en el crecimiento de la carga se producirá cuando la carga sea nula (y V_C). Al aumentar la carga, la corriente disminuye hasta que, un cuarto de periodo después, la carga es máxima y la corriente es cero. En ese momento, la corriente se vuelve negativa y la carga disminuye.

5. CIRCUITO DE CA CON UN CONDENSADOR

La potencia instantánea disipada en el condensador es:

$$P = V_C I = -V_{C,max} \cos \omega t \, I_{max} \operatorname{sen} \omega t = -V_{C,max} I_{max} \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t$$

La potencia media es nula, puesto que:

$$P_m = (V_C I)_m = \left(-V_{C,max} I_{max} \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t\right)_m =$$

$$= -V_{C,max} I_{max} (\cos \omega t \operatorname{sen} \omega t)_m =$$

$$= -V_{C,max} I_{max} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t\right)_m = 0$$

La energía se acumula en forma de campo eléctrico o magnético, pero no se disipa.

5. CIRCUITO DE CA CON UN CONDENSADOR

Ejercicio

Una industria necesita una potencia de $2000\ kW$ para funcionar. La resistencia eléctrica de los cables utilizados para llevar la energía eléctrica de la central a la industria es de $50\ \Omega$. ¿Cuáles serán las pérdidas de potencia asociadas al transporte en los siguientes casos?

a) La tensión eléctrica utilizada es de $500\ kV$.

b) La tensión eléctrica utilizada es de $5\ kV$.

6. VALORES EFICACES

Se definen los valores eficaces como la raíz cuadrada de los valores cuadráticos medios (los valores medios son nulos). Así, el valor eficaz de una corriente es:

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m} \qquad (I^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt$$

$$V_{ef} = \sqrt{(V^2)_m} \qquad (V^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T V^2 dt$$

Para una tensión-corriente sinusoidal, los valores cuadráticos medios son:

$$(I^2)_m = [(I_{max}\sin(\omega t + \delta))^2]_m = \frac{1}{2}I_{max}^2$$

$$(V^2)_m = [(V_{max}\sin(\omega t + \delta))^2]_m = \frac{1}{2}V_{max}^2$$

$$\boxed{I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_{max} \approx 0.707 I_{max}} \qquad \boxed{V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_{max} \approx 0.707 V_{max}}$$

Para la potencia media disipada obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} P_m &= (I^2R)_m = (\varepsilon I)_m = [\varepsilon_{max}\sin(\omega t + \delta)\, I_{max}\sin(\omega t + \delta)]_m \\ &= \varepsilon_{max} I_{max}[\sin^2(\omega t + \delta)]_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{max} I_{max} = \frac{1}{2}I_{max}^2 R = I_{ef}^2 R = \varepsilon_{ef} I_{ef} \end{aligned}}$$

7. CIRCUITO RLC. RESONANCIA

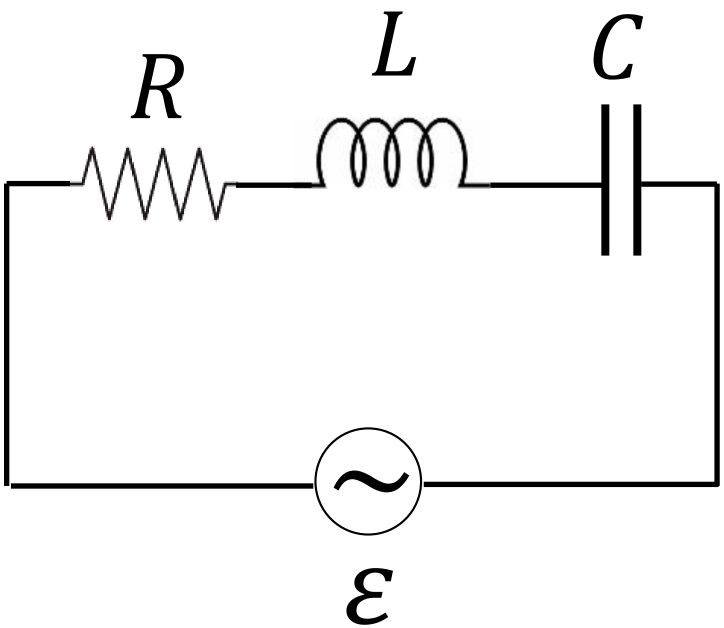
$$V_{max}\cos\omega t - L\frac{dI}{dt} - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_{max}\cos\omega t$$

$$I = I_{max}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\boxed{I_{max} = \frac{V_{max}}{Z} = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$



$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Impedancia del circuito

7. CIRCUITO RLC. RESONANCIA

A la magnitud $X_L - X_C$ se le denomina reactancia. Cuando $X_L = X_C$ se tiene que la reactancia del circuito es cero y la impedancia del circuito Z tiene su valor mínimo $Z = R$, igual a la resistencia, y la corriente I tendrá por tanto su valor máximo. El ángulo de fase es nulo, $\phi = 0$, lo que implica que la corriente está en fase con la tensión aplicada. El valor de ω que hace que $X_L = X_C$ es:

$$\boxed{X_L = X_C \;\Rightarrow\; \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0}$$

Frecuencia de resonancia (potencia máxima)

Como ni bobinas ni inductores disipan energía, la potencia media suministrada al circuito será igual a la potencia media suministrada a la resistencia:

$$P_R = \frac{1}{2} I_{max}^2 R = I_{ef}^2 R$$

$$\boxed{P_m = VI = V_{max} \cos \omega t \, I_{max} \cos(\omega t - \phi) = \frac{1}{2} V_{max} I_{max} \cos \phi = V_{ef} I_{ef} \cos \phi}$$

$\cos \phi$: Factor de potencia. En resonancia, $\phi = 0$ y $\cos \phi = 1$.

7. CIRCUITO RLC. RESONANCIA

Influencia de elementos pasivos en circuitos de corriente alterna:

Elemento pasivo	**Intensidad**	**Fase**	**Potencia**
R	ε/R	0	εI
L	$\varepsilon/L\omega$	$\dfrac{\pi}{2}$	0
C	$\varepsilon C\omega$	$-\dfrac{\pi}{2}$	0
R y L	$\varepsilon/\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$	$0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$	$<\varepsilon I$
R y C	$\varepsilon/\sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}$	$0>\phi>-\dfrac{\pi}{2}$	$<\varepsilon I$
L y C	$\varepsilon/\sqrt{(L\omega-1/C\omega)^2}$	$-\dfrac{\pi}{2}<\phi<+\dfrac{\pi}{2}$	0
$R,\ L$ y C	$\varepsilon/\sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}$	$-\dfrac{\pi}{2}<\phi<+\dfrac{\pi}{2}$	$<\varepsilon I$

7. CIRCUITO RLC. RESONANCIA

Ejercicio

Un circuito RLC en serie consta de una inducción, $L = 50\ mH$, un condensador, $C = 20\ \mu F$ y una resistencia, $R = 100\ \Omega$, conectados a un generador de $300\ V$ de fem máxima con una frecuencia angular variable.

a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia ω_0?
b) ¿Cuál es el valor de la corriente eficaz en la resonancia?

Si la frecuencia angular vale $\omega = 10000\ rad/s$, hallar:

a) Las reactancias inductiva X_L y capacitiva X_C.
b) La impedancia Z.
c) La corriente eficaz I_{ef}.
d) El factor de potencia $\cos\phi$.

8. DIAGRAMA VECTORIAL DE IMPEDANCIAS

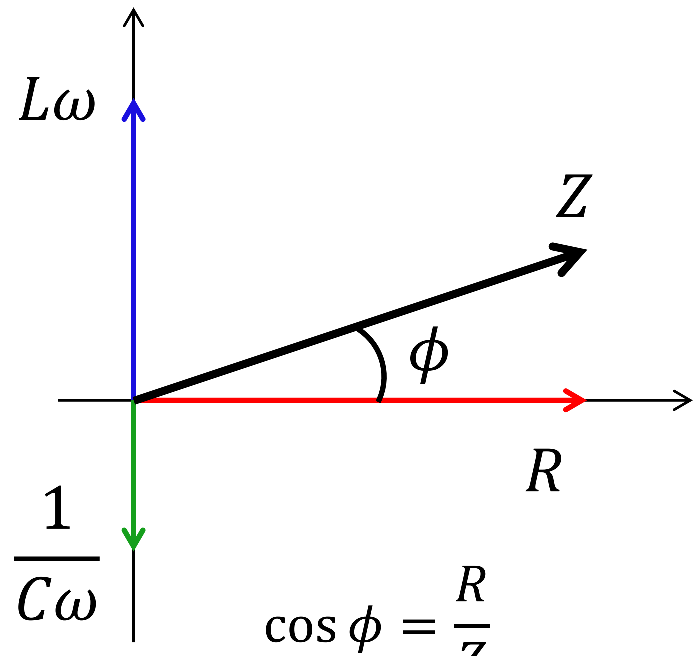
Existe un método gráfico de resolución de problemas de circuitos eléctricos, recorridos por corriente alterna, utilizando el diagrama vectorial de impedancias. Consiste en representar las impedancias (resistiva R, inductiva $L\omega$ y capacitiva $1/C\omega$) en forma de vectores de dos dimensiones (fasores) o como números complejos. Se puede calcular así la impedancia total Z, el ángulo de fase ϕ y la intensidad eficaz I_{ef} mediante la igualdad $\varepsilon_{ef} = I_{ef}Z$.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$I = I_0 e^{j\omega t}$$

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Se resuelve como en cc y basta quedarse con la parte real de ε e I.

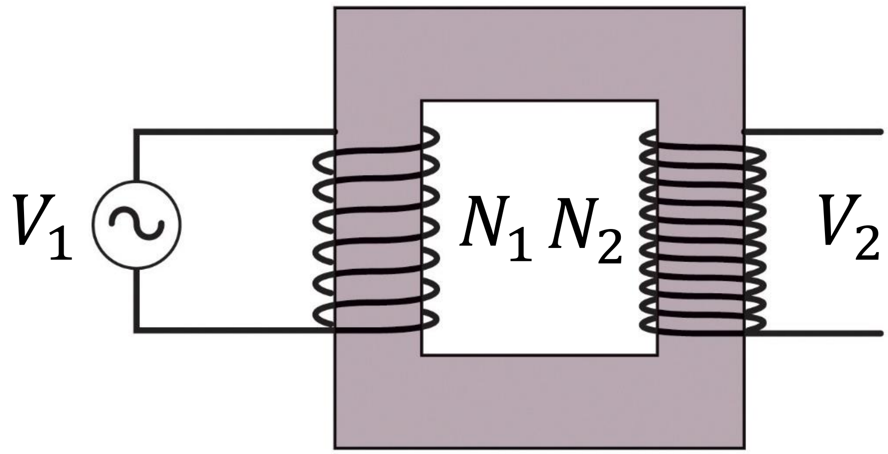


$$\cos\phi = \frac{R}{Z}$$

9. EL TRANSFORMADOR

El transformador es un dispositivo utilizado para elevar o disminuir el voltaje en circuitos sin que se produzcan pérdidas significativas de potencia.
Se basa en que una fem alterna V_1 en un circuito primario, con N_1 vueltas, inducirá una fem alterna V_2 en otro circuito secundario, con N_2 vueltas, debido a su inductancia mutua.

El núcleo de hierro se usa para que todas las líneas de campo magnético queden encerradas dentro de él, de forma que a través de las espiras del circuito secundario entren las mismas líneas de campo que a través del primario.



$$\left.\begin{aligned} V_1 &= N_1 \frac{d\Phi_{v1}}{dt} \\ V_2 &= N_2 \frac{d\Phi_{v2}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{v1}}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1}$$

9. EL TRANSFORMADOR

Si $N_2 > N_1 \Rightarrow V_2 > V_1$: Transformador elevador o de alta.
Si $N_2 < N_1 \Rightarrow V_2 < V_1$: Transformador reductor o de baja.

Si el circuito secundario se cierra con una resistencia R, tenemos que $I_2 = V_2/R$. La potencia suministrada al primario será igual que la disipada en el secundario, despreciando las pérdidas:

$$\boxed{P_1 = P_2 \Rightarrow V_1 I_1 = V_2 I_2}$$

Ejercicio

Un pequeño motor eléctrico funciona a $12\ V$ con $0.5\ A$. Si es conectado a un transformador cuyo primario contiene 5000 vueltas y está conectado a una señal de $60\ V$:

a) ¿Cuántas vueltas deberá tener el secundario?
b) ¿Cuál es la corriente en el primario?