MAGNITUDES VECTORIALES

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA:

Cap. 3 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Cap. 3 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ª ed.
Cap. 2 del Gettys-Frederick-Keller.

1. MAGNITUDES ESCALARES Y MAGNITUDES VECTORIALES

En Física se opera con dos clases fundamentales de magnitudes, las **magnitudes escalares** y las **magnitudes vectoriales**.
Una **magnitud escalar** queda perfectamente determinada cuando se conoce el número que la mide, por ejemplo la resistencia de un conductor, la intensidad de corriente eléctrica, etc. En cambio, una **magnitud vectorial** no queda determinada solamente por un número, sino que se necesita conocer el vector que la representa.

Un **vector** es un **segmento orientado** y queda definido por su **módulo o magnitud**, **dirección** y **sentido**. Un ejemplo sencillo nos lo suministra una fuerza, puesto que sólo quedará determinada completamente cuando conozcamos su magnitud, dirección y sentido.

Un vector lo representamos por un segmento cuyo origen es el punto de aplicación. Su longitud representa la magnitud del mismo en una unidad física determinada. Su dirección es la recta indefinida a la que pertenece el segmento y su sentido lo marcaremos mediante una flecha colocada en su extremo. Simbólicamente lo representamos con una letra en **negrita**, $\boldsymbol{A}$, o colocando una flecha encima de la letra que representa al vector, $\vec{A}$. Para indicar el módulo o magnitud del vector, se utilizará la letra normal, A, o la letra en negrita o con la flecha encima y entre barras, $|\boldsymbol{A}|$, $\left|\vec{A}\right|$.

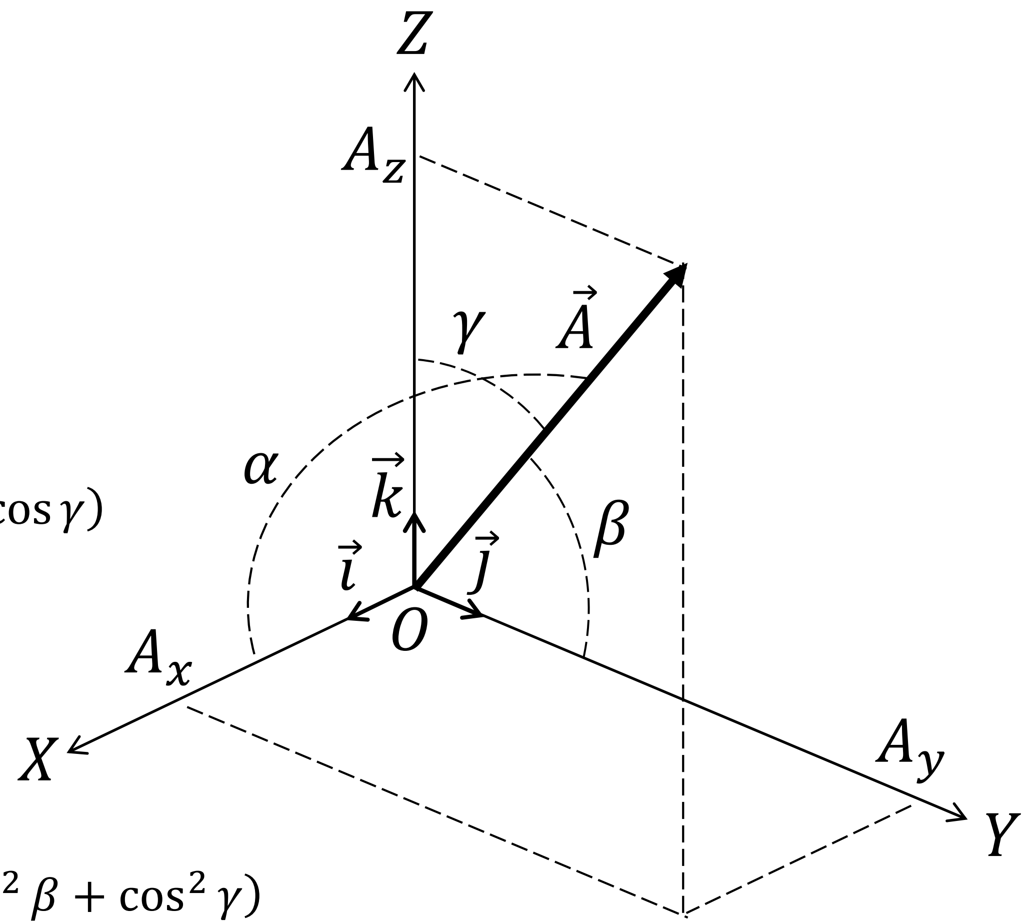
2. COMPONENTES DE UN VECTOR

<u>Diferentes tipos de representación:</u>

Componentes: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$

Vectores unitarios: $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$

Cosenos directores: $\vec{A} = A(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$

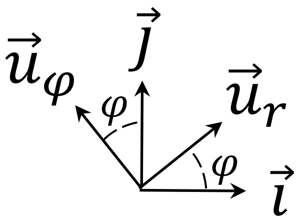


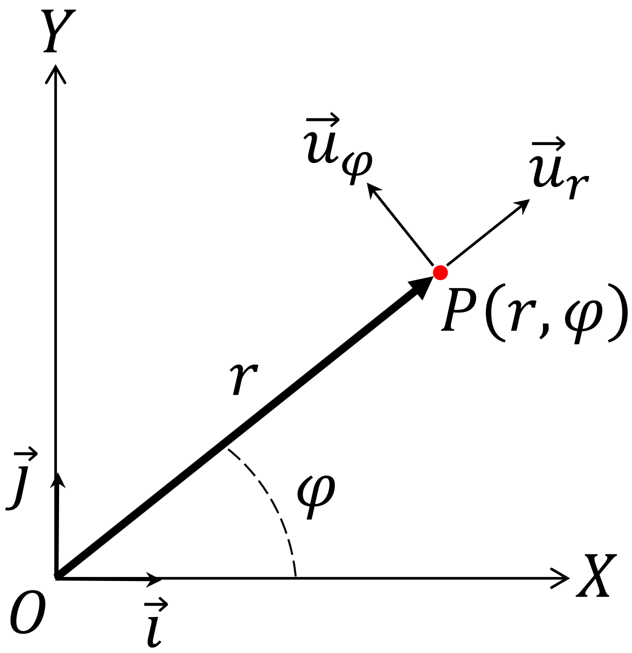
$$A_x = A\cos\alpha$$
$$A_y = A\cos\beta$$
$$A_z = A\cos\gamma$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

3. COORDENADAS POLARES





$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\varphi\,\vec{u}_r - \sin\varphi\,\vec{u}_\varphi \\ \vec{j} = \sin\varphi\,\vec{u}_r + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

4. CLASIFICACIÓN DE LOS VECTORES

Libres: Son aquellos en los que el módulo y el sentido se encuentran perfectamente determinados, pero no su dirección, que puede ser cualquiera de las rectas de un conjunto de paralelas, y su punto de aplicación, que puede ser cualquiera de los del espacio. Se dice que dos o más vectores son equipolentes cuando, considerados como libres, tienen la misma magnitud y dirección y sus líneas de acción paralelas pero distinto punto de aplicación.
Ejemplo: Momento de un par de fuerzas.

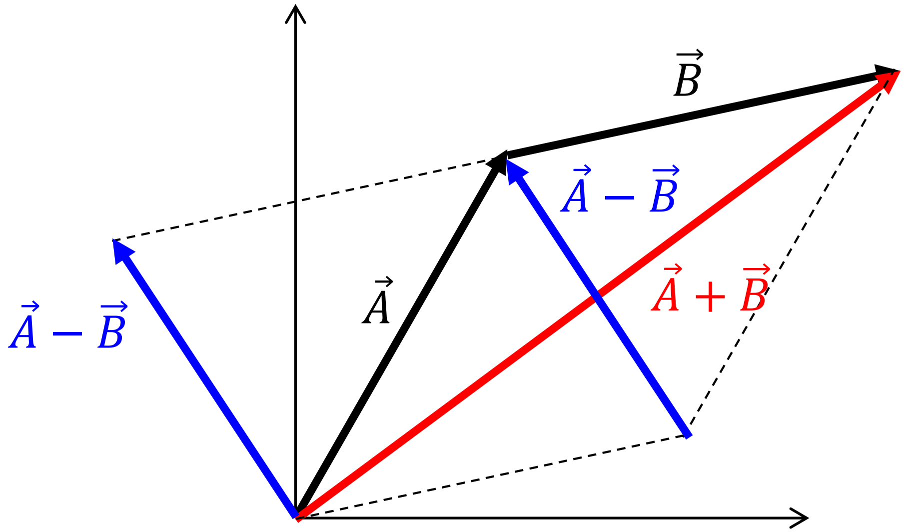
Deslizantes: Son los que vienen determinados en módulo, dirección y sentido, pudiendo ser su punto de aplicación cualquiera de los que forman su línea de acción. Se denominan deslizantes porque se pueden mover por su línea de acción produciendo el mismo efecto.
Ejemplo: Fuerza que actúa sobre un sólido rígido.

Fijos: Son los que tienen todos sus elementos perfectamente determinados. No se pueden desplazar de su punto de aplicación sin que varíe su efecto físico.
Ejemplo: Fuerza que actúa sobre un sólido deformable.

Polares y axiales: Las magnitudes vectoriales tales como fuerzas o velocidades que no presentan duda para asignarles el sentido en que actúan, se les designa vectores polares. Sin embargo, existen otras que pueden considerarse como vectoriales, pero a las que hay que asignarle su sentido por convenio, como la velocidad angular, ω, cuyo sentido viene dado por la regla del sacacorchos/tornillo, haciendo corresponder su sentido con el del avance de un sacacorchos/tornillo. Eso mismo ocurre con la aceleración angular, α, o con el momento de una fuerza, M. A estos vectores se les denomina axiales.

5. SUMA Y RESTA DE VECTORES

$$\vec{C} = (C_x, C_y, C_z) = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$$



Propiedades de la suma de vectores:

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{C} + \vec{B}$$ Conmutativa

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$ Asociativa

5. SUMA Y RESTA DE VECTORES

Ejercicio

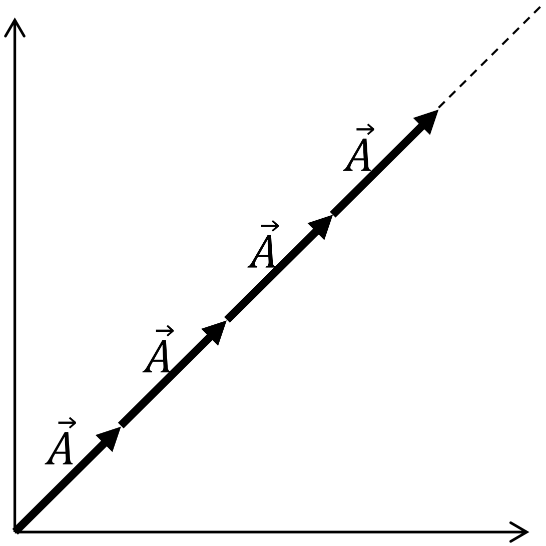
Un coche recorre 5 millas hacia el este, luego 4 millas hacia el sur y por último, 2 millas hacia el oeste.
Hallar la magnitud y dirección del desplazamiento resultante.

Ejercicio

La suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es un vector $\vec{C}$ de módulo 24 y cuyos cosenos directores son 1/3, -2/3, 2/3. El vector $3\vec{A} - 2\vec{B}$ tiene por componentes 7,9,3.
Calcular las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

6. PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

$$n\vec{A} = \underbrace{\vec{A} + \vec{A} + \cdots + \vec{A}}_{n} = (nA_x, nA_y, nA_z)$$

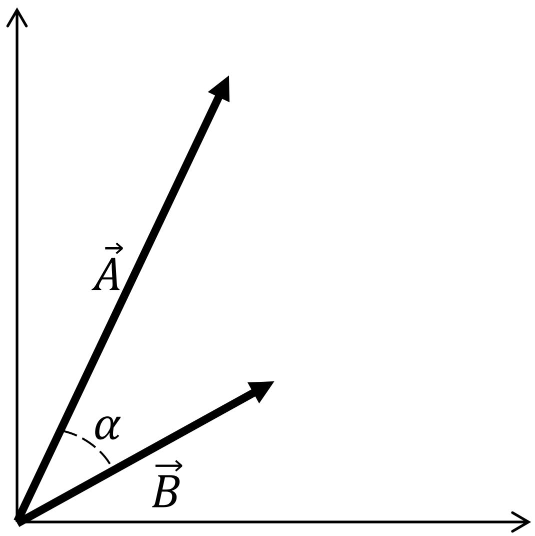


Ejercicio

Sea el vector $\vec{A} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.
Calcular: a) $3\vec{A}$, b) $-\frac{5}{2}\vec{A}$.

7. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



Ángulo entre dos vectores:

A través del producto escalar, se puede obtener el ángulo formado por dos vectores:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}}$$

Proyección de un vector en una dirección:

Si $\vec{B}$ es un vector unitario, es decir, $|\vec{B}| = 1$, el producto escalar de cualquier vector por $\vec{B}$ dará como resultado la proyección de ese vector sobre la dirección de $\vec{B}$.

Ejercicios

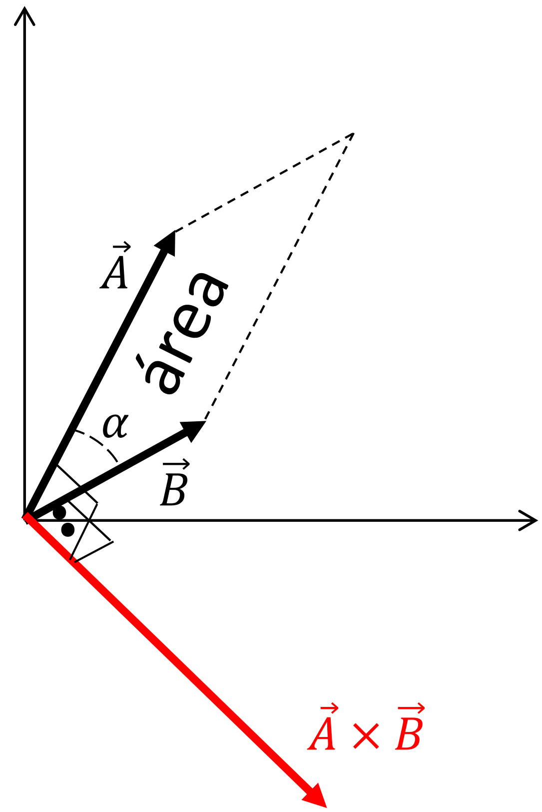
a) Hállese el ángulo que forman los vectores $\vec{A} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ y $\vec{B} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$.

b) Hállese la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

8. PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen} \alpha$$



<u>Área de un paralelogramo:</u>

A través del producto vectorial, se puede obtener el área del paralelogramo formado por dos vectores.

Ejercicio

Sean los vectores $\vec{A} = 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{C} = 2\vec{i}$. Calcular:

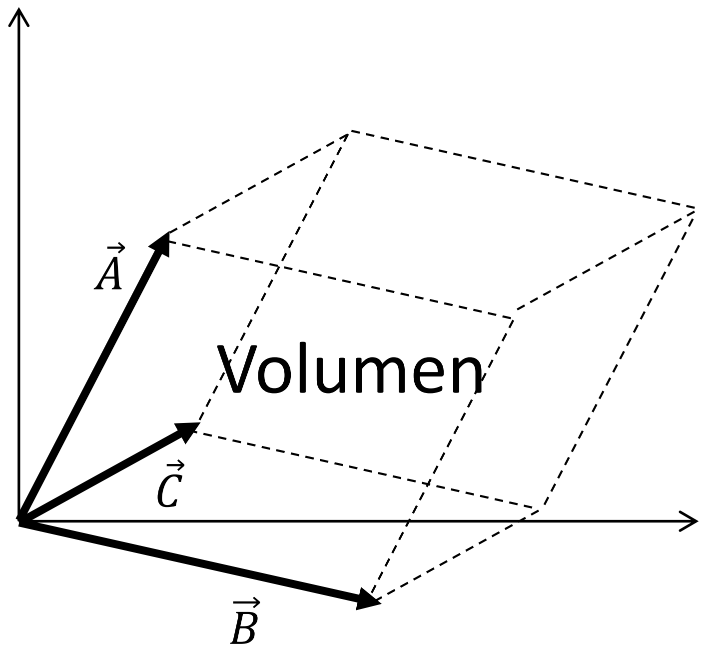
a) $\vec{A} \times \vec{B}$

b) $(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B}$

c) $(\vec{A} \times 2\vec{C}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

9. PRODUCTO MIXTO

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$



<u>Volumen de un paralelepípedo:</u>

A través del producto vectorial, se puede obtener el volumen del paralelepípedo formado por tres vectores.

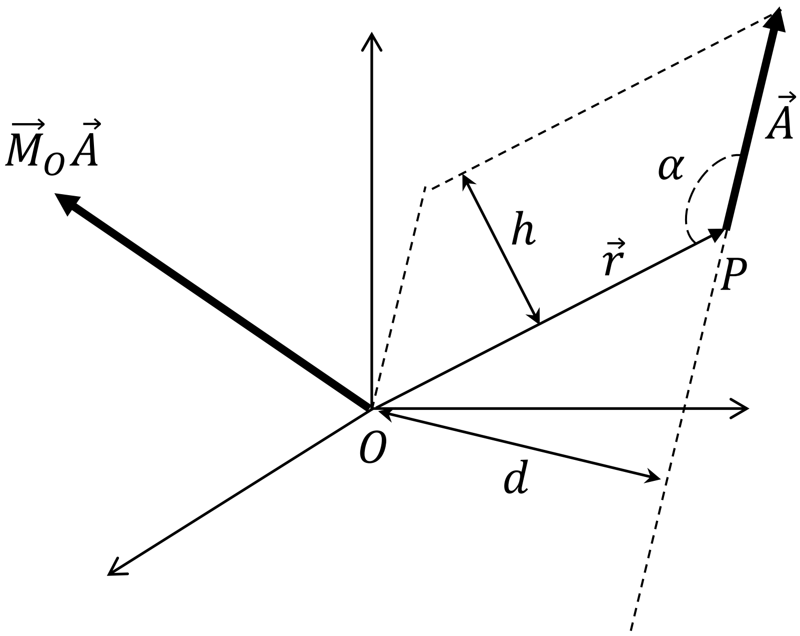
Ejercicio

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(3,1,1)$, $C(0,4,0)$ y $D(1,0,5)$ delimitan un tetraedro. Calcular:

a) La longitud del lado AB
b) El área del triángulo ABC
c) El volumen del tetraedro

10. MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO

$$\vec{M}_O\vec{A} = \overrightarrow{OP} \times \vec{A} = \vec{r} \times \vec{A}$$



<u>Dirección:</u>

$\vec{M}_O\vec{A} \perp \vec{A}$
$\vec{M}_O\vec{A} \perp \vec{r}$

$$\left|\vec{M}_O\vec{A}\right| = |\vec{r}|\left|\vec{A}\right| \sin\alpha = |\vec{r}|h = \left|\vec{A}\right|d$$

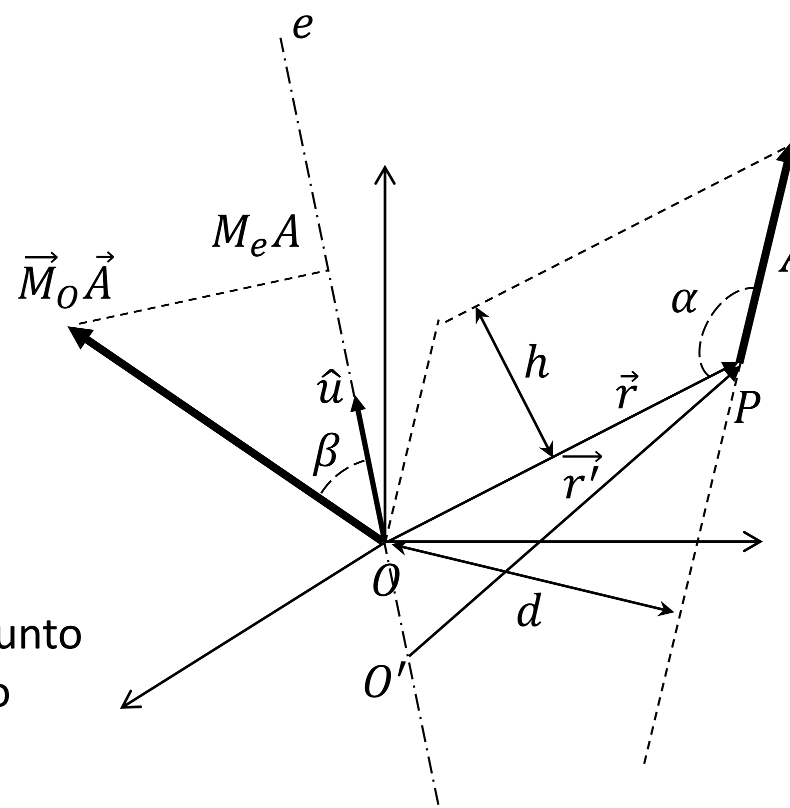
Ejercicio

En el punto $P = (2,3,2)$ se aplican los vectores $\vec{A} = (-2,3,1)$ y $\vec{B} = (-1,3,2)$. Calcular el momento del sistema respecto a los puntos:

a) (0,0,0)
b) (-1,0,2)

11. MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN EJE

Si consideramos un eje e que pasa por O y proyectamos sobre él $\vec{M}_O\vec{A}$ obtenemos un escalar que es el **momento del vector $\vec{A}$ respecto al eje e**:



$$M_eA = \vec{M}_O\vec{A}\cdot\hat{u} = \overrightarrow{OP}\times\vec{A}\cdot\hat{u}$$
$$= \left|\vec{M}_O\vec{A}\right|\cdot\cos\beta$$

El momento M_eA siempre será el mismo, independientemente de la posición del punto O en el eje e, ya que si se elige otro punto cualquiera O' tendremos que:

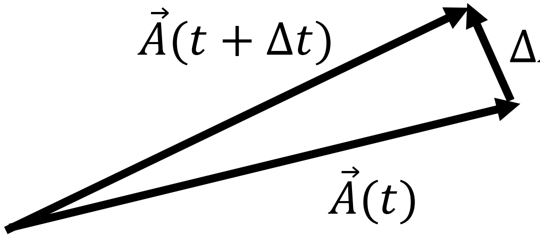
$$\vec{M}_{O'}\vec{A} = \overrightarrow{O'P}\times\vec{A} = \vec{r'}\times\vec{A} = \left(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}\right)\times\vec{A} = \overrightarrow{O'O}\times\vec{A}+\overrightarrow{OP}\times\vec{A}$$

Al proyectar $\vec{M}_{O'}\vec{A}$ sobre el eje e obtenemos el mismo resultado que antes:

$M_eA = \vec{M}_{O'}\vec{A}\cdot\hat{u} = \overrightarrow{O'O}\times\vec{A}\cdot\hat{u} + \overrightarrow{OP}\times\vec{A}\cdot\hat{u} = \overrightarrow{OP}\times\vec{A}\cdot\hat{u}$, ya que el vector $\overrightarrow{O'O}\times\vec{A}$ es perpendicular al eje e y su proyección sobre dicho eje será nula.

12. DERIVACIÓN VECTORIAL

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$$



Coordenadas cartesianas: $$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt}\right)$$

Propiedades:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \frac{d(n\vec{A})}{dt} = \frac{dn}{dt}\vec{A} + n\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} \qquad \frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \perp \vec{A} \Rightarrow |\vec{A}| = \text{cte} \qquad \frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

12. DERIVACIÓN VECTORIAL

Ejercicio

Dado el vector $\vec{A} = (1, -2,3)$ aplicado en el punto $(3t, 2, gt^2)$, hallar (O es el origen):

$$\frac{d}{dt}(\vec{M}_O\vec{A})$$

Ejercicio

Dados los vectores $\vec{A} = (t, -2t, t^2)$ y $\vec{B} = (1,1,1)$, hallar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\vec{A} \cdot \vec{B}}\right)$$

Ejercicio

Una barra de longitud L tiene una densidad lineal variable. La densidad lineal de cada punto de la barra es $\rho = ax$ kg/m, siendo x la distancia del punto a uno de los extremos de la barra y a una constante. Calcular la masa total de la barra.

13. INTEGRACIÓN VECTORIAL

$$\int \vec{A} dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \vec{A}(t_i)\, \Delta t = \int A_x dt\, \vec{\imath} + \int A_y dt\, \vec{\jmath} + \int A_z dt\, \vec{k}$$

Ejercicio

Dado el vector $\vec{Q}(u) = (u^2 - u)\vec{\imath} + 3u^2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, hallar:

a) $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{Q}}}{\mathrm{du}}$

b) $\int \vec{\mathrm{Q}}(\mathrm{u})\mathrm{du}$

c) $\int_1^2 \vec{\mathrm{Q}}(\mathrm{u})\mathrm{du}$

Ejercicio

Un robot pinta la línea que delimita el perímetro de una circunferencia de radio $R =$ 2 m. La velocidad a la que pinta es de $2t$ rad/s. Calcular la longitud de arco pintada al cabo de 2 segundos.

14. OPERADORES DIFERENCIALES

<u>Operador diferencial nabla:</u>
(en coordenadas cartesianas)

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

<u>Gradiente:</u>

$$\boxed{\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}}$$

<u>Divergencia:</u>

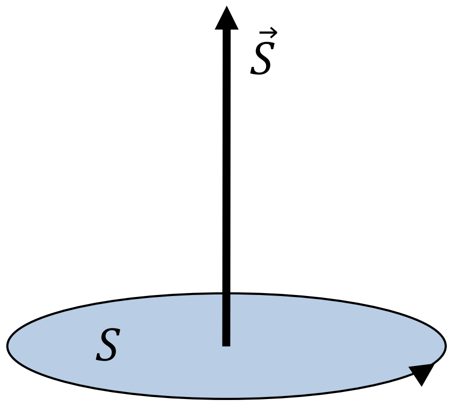
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

<u>Rotacional:</u>

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

15. REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE SUPERFICIES

Sabemos que el módulo del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están definidos por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Por tanto, se puede asociar un vector con una superficie:



Si consideramos la superficie plana S de la figura, cuya periferia L está orientada como indica la flecha, se puede representar por un vector $\vec{S}$, cuya magnitud es igual al área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la superficie y de sentido el que indica un sacacorchos/tornillo que gira en el sentido de la periferia.