SÓLIDO RÍGIDO (I)
(cinemática)

ÍNDICE

1. Introducción
2. Movimiento del sólido rígido
3. Rodadura
4. Momento angular
5. Momento de inercia

BIBLIOGRAFÍA:

Caps. 9 y 10 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Caps. 10 y 11 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ª ed.
Caps. 12 y 13 del Gettys-Frederick-Keller.

1. INTRODUCCIÓN

Un **sólido rígido** es un **sistema de partículas** en el que las **distancias relativas** entre ellas **permanecen constantes**. Si las distancias entre partículas varían, dicho sólido se denomina **deformable**.

El **movimiento de un sólido rígido** es en general **complejo**, pero se puede **simplificar** haciendo una serie de **descomposiciones**.

Movimiento del sólido rígido =

Traslación del centro de masas: $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{CM}$

$+$

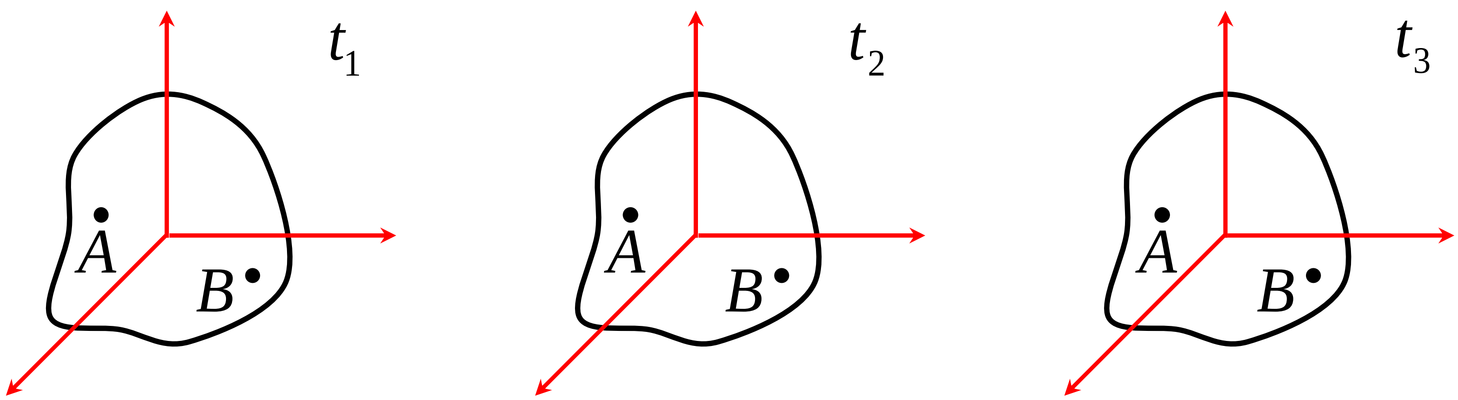
Rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas: $\sum \vec{M}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$

Ejemplo

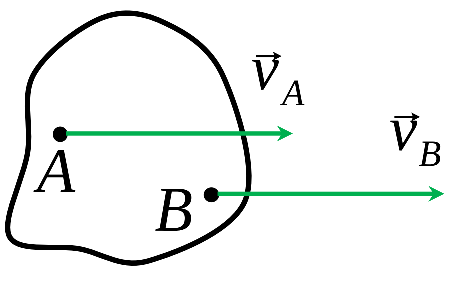
Movimiento de la Tierra, que se traslada alrededor del Sol (movimiento de traslación) y que a la vez gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masas (movimiento de rotación).

2. MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Sólido rígido con movimiento de traslación: Todos los puntos del sólido rígido tienen la misma velocidad y aceleración, luego el movimiento global se describe especificando el movimiento de uno de sus puntos



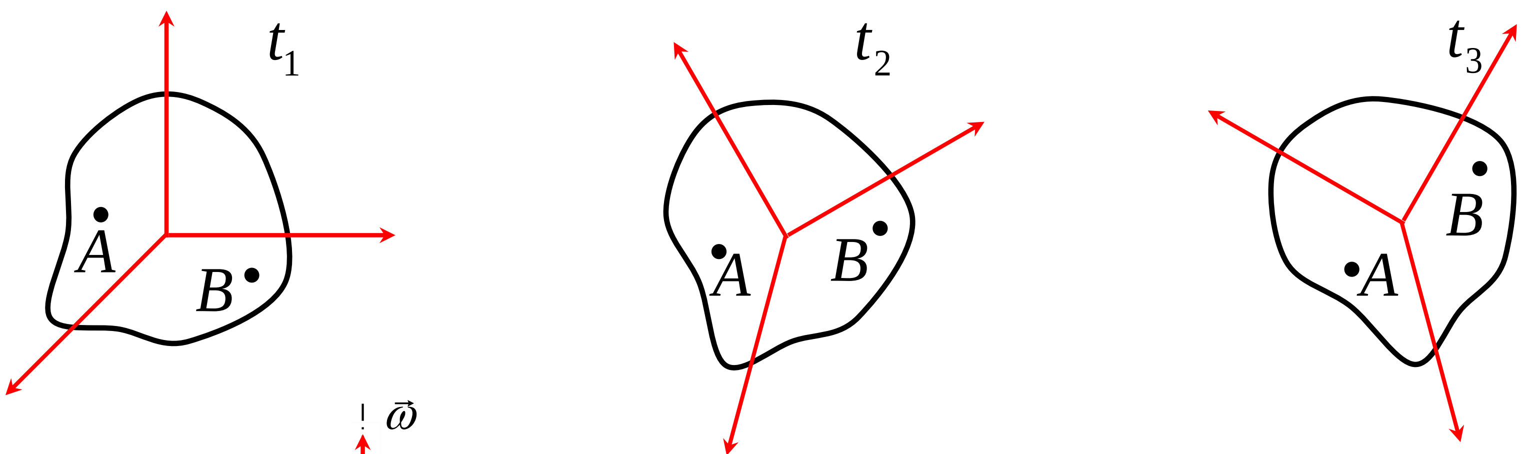
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_{CM}$$

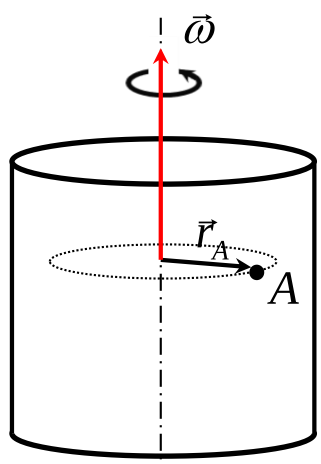


Los ejes del sistema de coordenadas fijo al sólido rígido no cambian de dirección respecto a un observador en un sistema de referencia inercial.

2. MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Sólido rígido con movimiento de rotación: Todos los puntos del sólido rígido describen circunferencias, excepto el centro de rotación. Los ejes del sistema de coordenadas fijo al sólido rígido cambian de dirección respecto a un observador en un sistema de referencia inercial





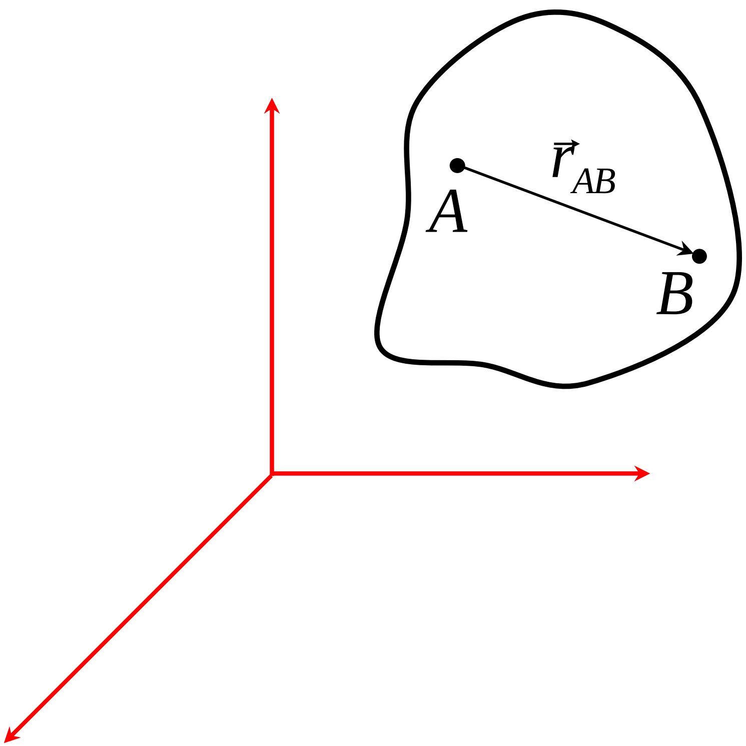
$$v_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

Si ω=cte $\rightarrow$ Mov. circular uniforme
Si α=cte $\rightarrow$ Mov. circular uniformemente acelerado

$|a_t|=\alpha r$
$|a_n|=v^2/r=\omega^2 r$

2. MOVIMIENTO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Sólido rígido con movimiento de traslación y rotación: La velocidad y aceleración de cualquier punto del sólido rígido se puede calcular a partir de la velocidad angular y de la velocidad y aceleración de cualquier otro punto



traslación rotación

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \right)$$

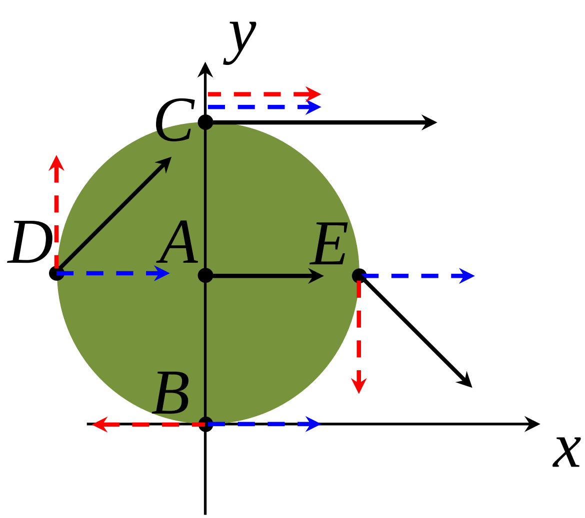
aceleración tangencial aceleración normal

3. RODADURA

Supondremos que el sólido rueda sin deslizar, por ejemplo, el movimiento de las ruedas de un coche al circular. En estos casos el eje de rotación se traslada y el punto de contacto del sólido con el suelo tiene velocidad lineal nula (rozamiento estático).

Rotación sin deslizamiento

$$\boxed{\begin{aligned} v_{CM} &= v_A = \omega R \\ a_{CM} &= a_A = \alpha R \end{aligned}}$$



Utilizando $\vec{v}_X = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AX}$:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = 0$$

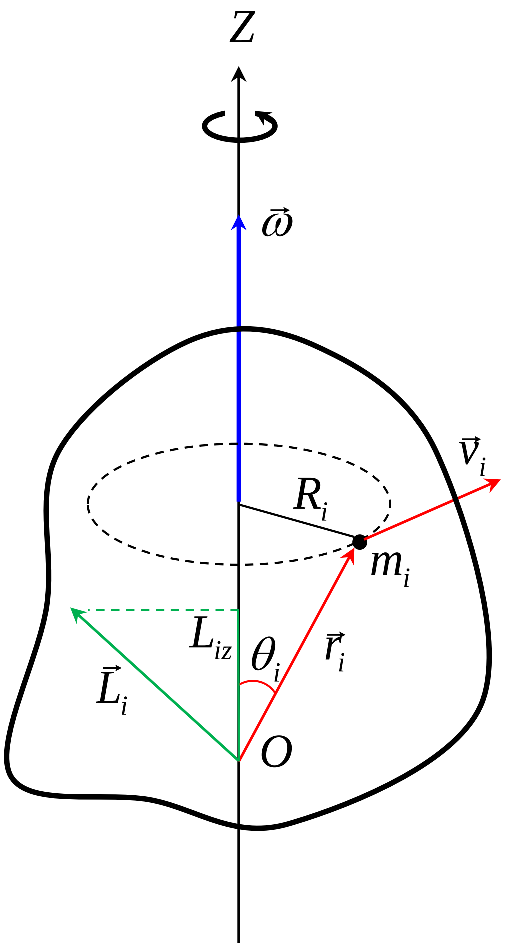
$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC} = 2\omega R \vec{i}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AD} = \omega R \vec{i} + \omega R \vec{j}$$

$$\vec{v}_E = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AE} = \omega R \vec{i} - \omega R \vec{j}$$

Este movimiento puede estudiarse como la combinación de una traslación del centro de masas (vectores azules) más una rotación alrededor del centro de masas (vectores rojos).

3. MOMENTO ANGULAR



$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$: momento angular de la partícula i respecto a O.

$$L_{iz} = m_i r_i v_i \cos(90-\theta_i) = m_i R_i^2 \omega \qquad \begin{pmatrix} R_i = r_i \cos(90-\theta_i) \\ v_i = \omega R_i \end{pmatrix}$$

$$\boxed{L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i R_i^2 \omega = I_z \omega} \qquad \left(I_z = \sum_i m_i R_i^2 \right)$$

En general, el momento angular de un sólido rígido respecto a un punto del eje de rotación no es paralelo al vector velocidad angular.

Todo cuerpo posee al menos tres ejes **(ejes principales de inercia)** para los que los vectores momento angular (respecto de cualquier punto del eje) y velocidad angular son paralelos. Es esos casos se cumple la igualdad vectorial:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Si la rotación se produce alrededor de un eje principal de inercia

Los ejes principales coinciden con los ejes de simetría del sólido.

4. MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia mide la resistencia que opone un cuerpo a variar su estado de movimiento de rotación. Su análogo en traslación es la masa, que mide la resistencia de un cuerpo a variar su estado de movimiento de traslación.

El momento de inercia respecto de un eje viene dado por:

$$I = \begin{cases} m\,r^2 & \text{Masa puntual} \\ \sum_i m_i r_i^2 & \text{Distribuciones discretas de masa} \\ \int dm\, r^2 & \text{Distribuciones continuas de masa} \end{cases}$$

- Depende del eje de rotación.
- Depende de la distribución de masa del sistema alrededor del eje. Cuanto más alejada esté del eje de giro mayor es el momento de inercia.

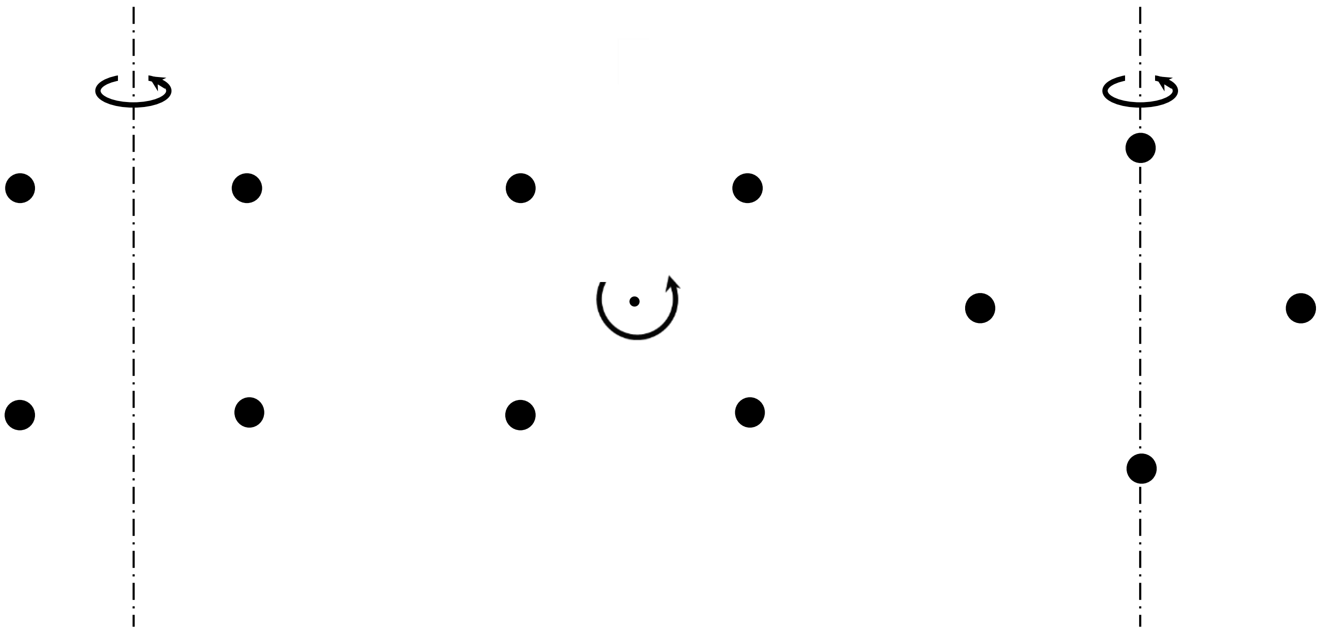
Dimensiones de momento de inercia: $[I] = [m \cdot r^2] = \mathrm{ML}^2$

Unidades en el S. I. : $\mathrm{Kg \cdot m^2}$.

4. MOMENTO DE INERCIA

Problema

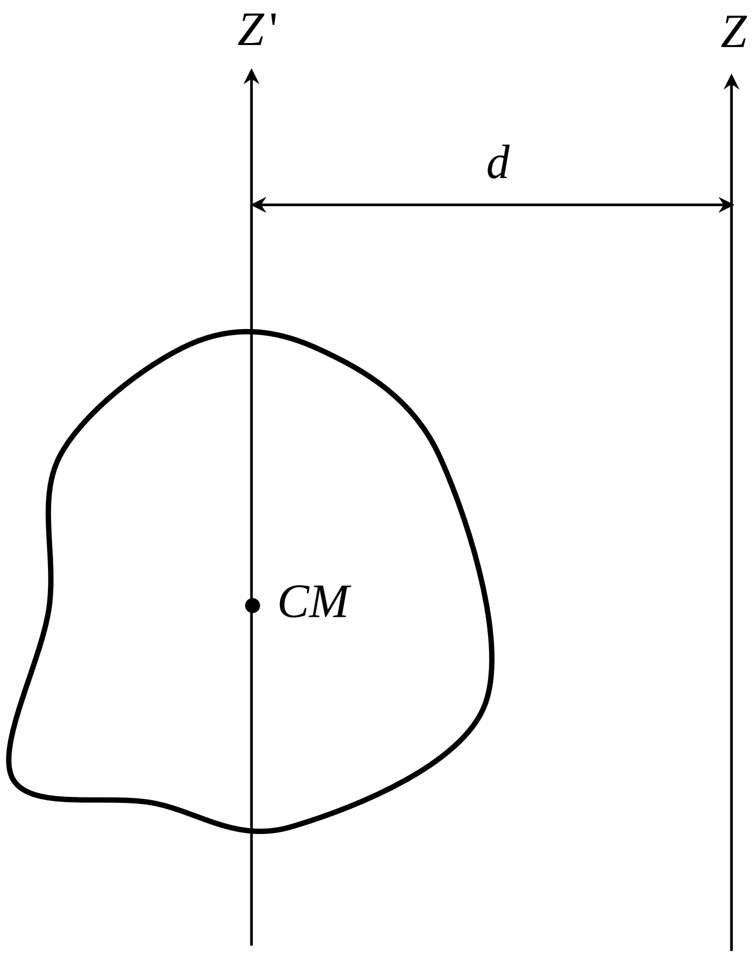
Calcular el momento de inercia de un sistema de cuatro masas puntuales respecto a los ejes indicados en las figuras (las masas tienen valor m y el cuadrado que forman tiene lado L):



(a) (b) (c)

4. MOMENTO DE INERCIA

Teorema de Steiner (o de los ejes paralelos): “El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje, es igual al momento de inercia de tal cuerpo con respecto a un eje paralelo al primero y que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes”.



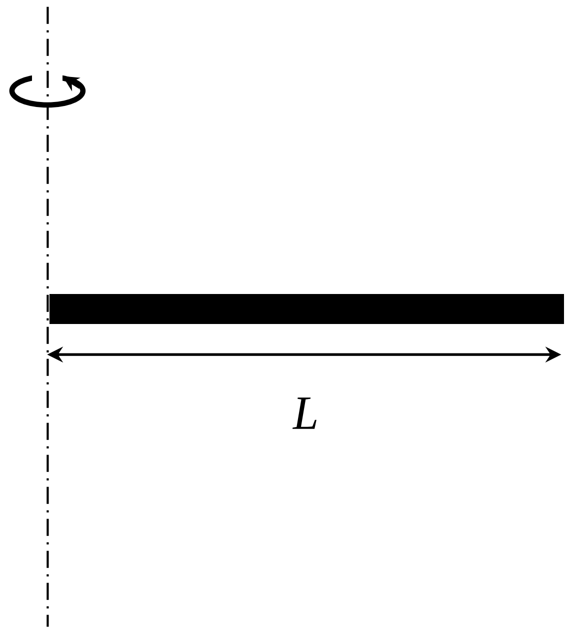
$$I_Z = I_{Z'} + Md^2$$

$$\boxed{I = I_{CM} + Md^2}$$

4. MOMENTO DE INERCIA

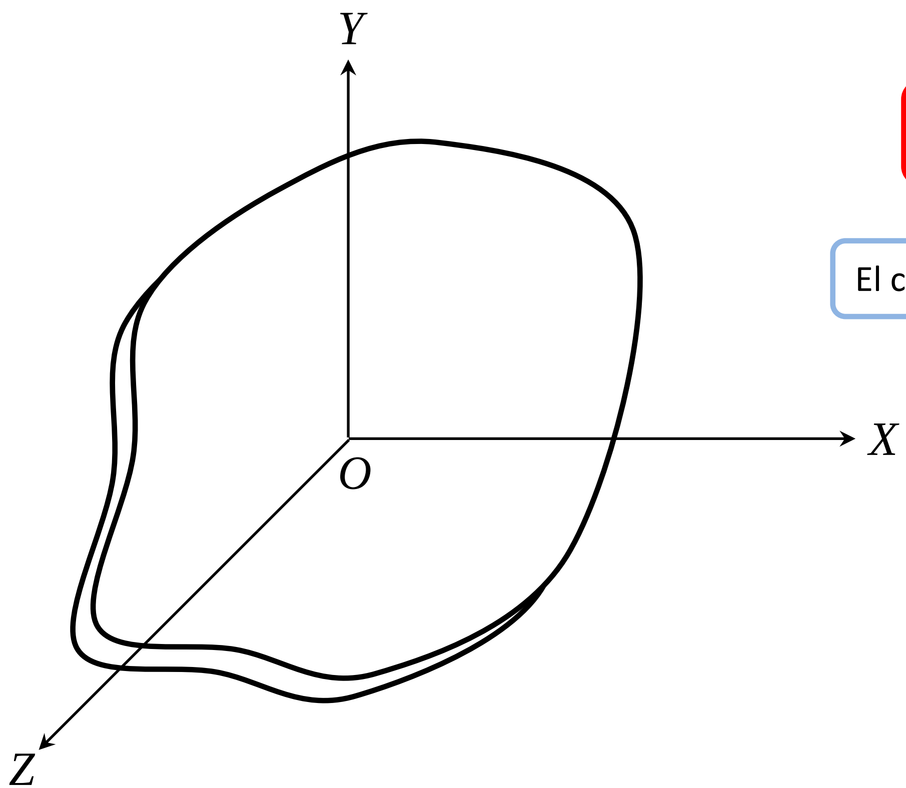
Problema

Calcular el momento de inercia de una varilla respecto a un eje que pase por su extremo y sea perpendicular a ella (ver figura). ¿Cuánto vale el momento de inercia respecto a un eje paralelo a éste que pase por su centro de masas?



4. MOMENTO DE INERCIA

Teorema de los cuerpos planos (o de los ejes perpendiculares): "En cuerpos de espesor despreciable (cuerpos planos), la suma de los momentos de inercia respecto de dos ejes perpendiculares y en el plano del cuerpo, es igual al momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano por el punto de corte de ellos"



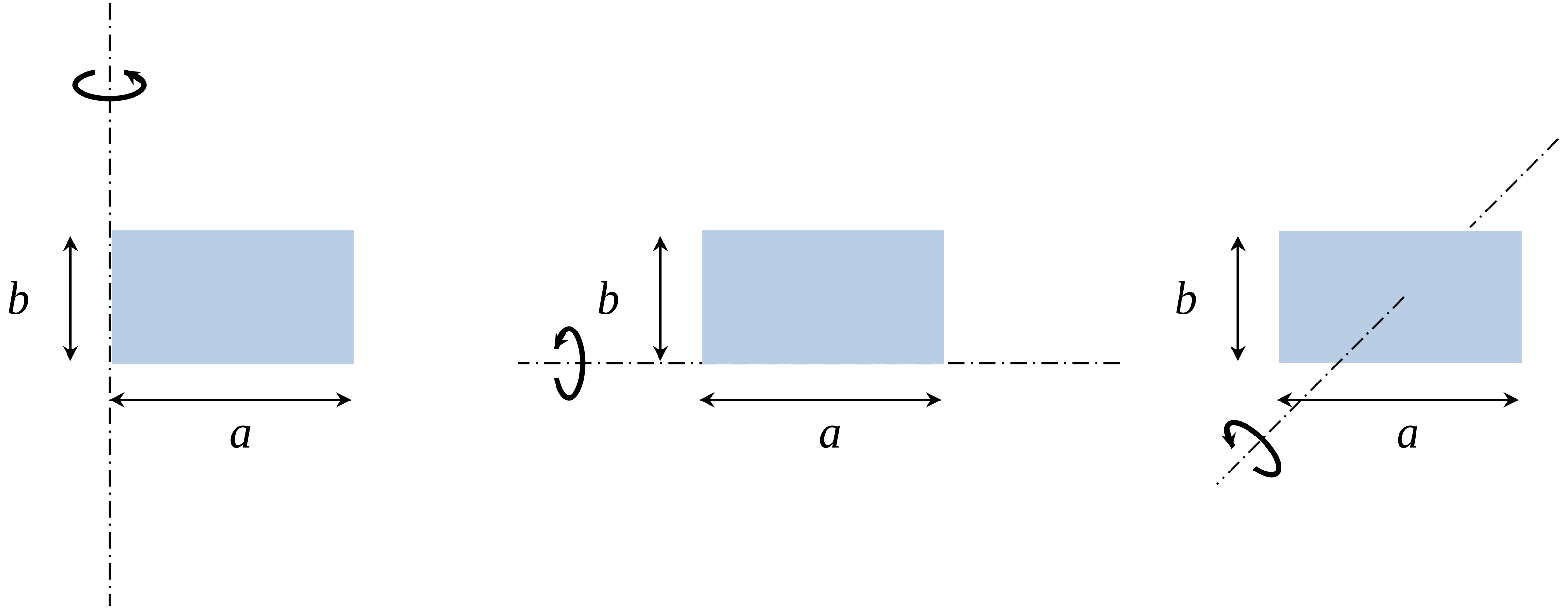
$$\boxed{I_X + I_Y = I_Z}$$

El cuerpo está en el plano OXY

4. MOMENTO DE INERCIA

Problema

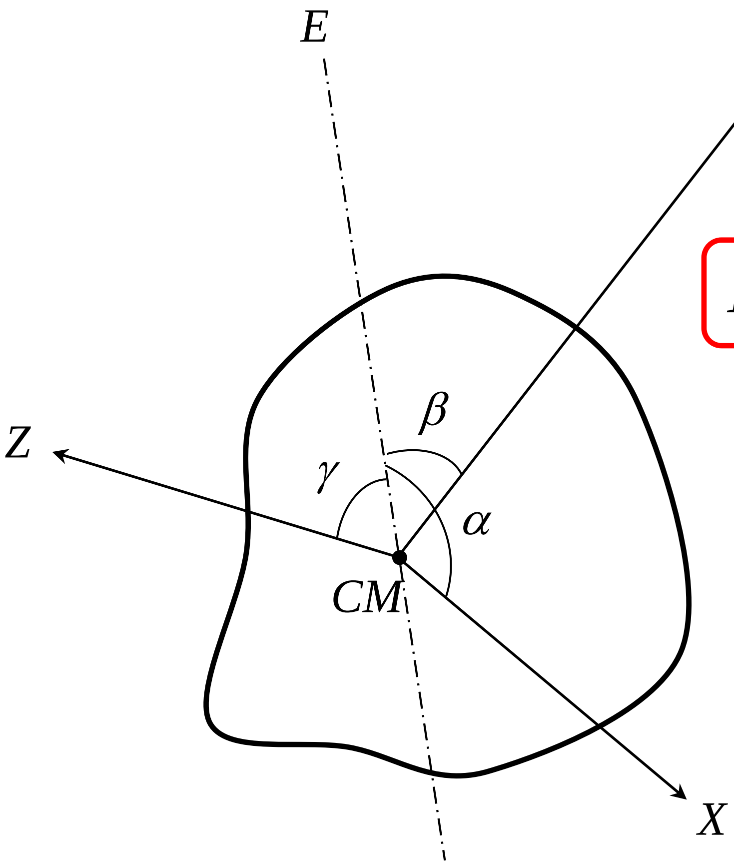
Calcular el momento de inercia de una placa rectangular homogénea de lados a y b, respecto de los ejes mostrados en la figura.



(a) (b) (c)

4. MOMENTO DE INERCIA

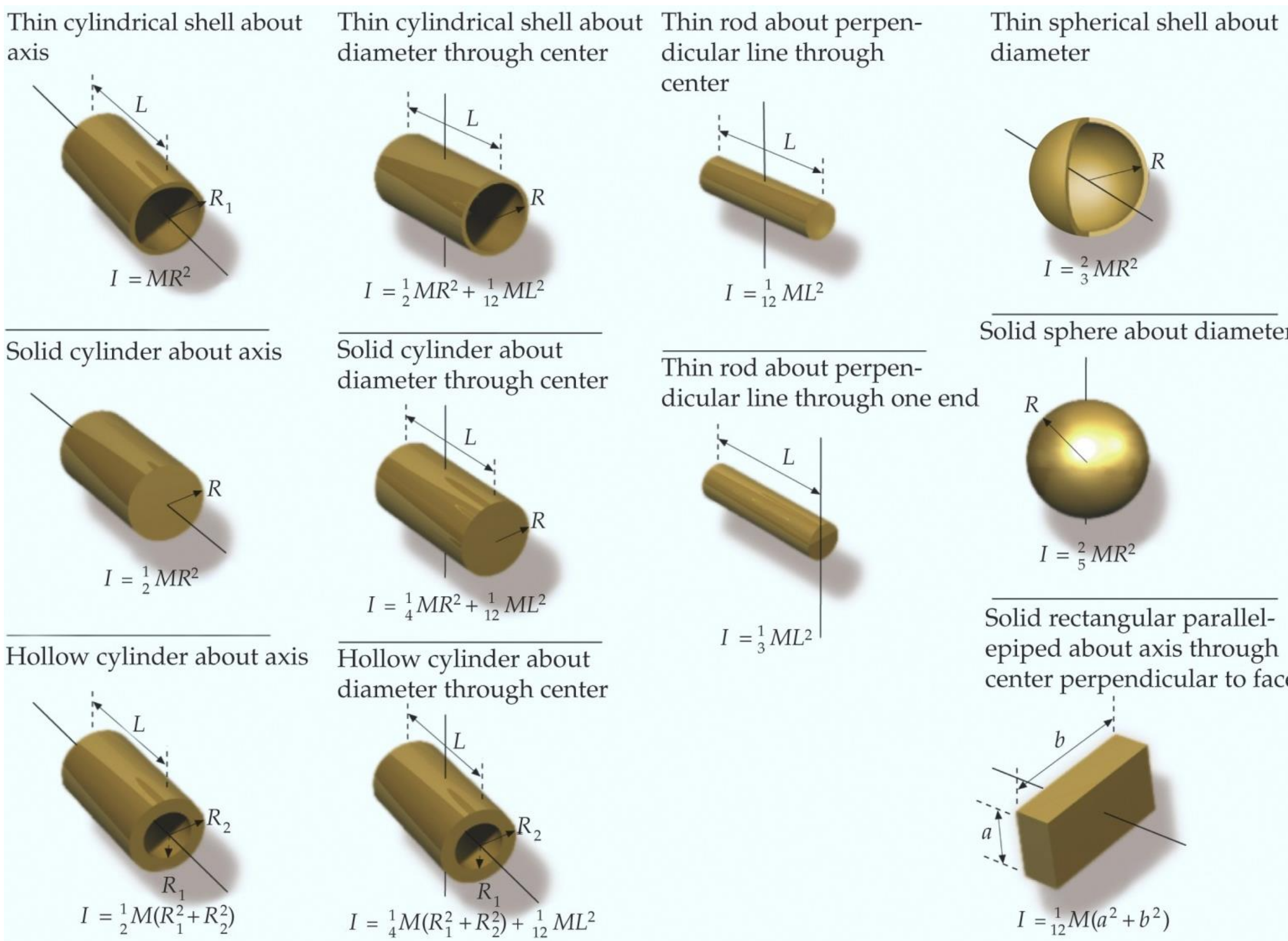
Teorema de Poinsot: Relaciona el momento de inercia de un sólido rígido respecto a cualquier eje que pase por su centro de masas con los momentos de inercia respecto a los ejes principales de inercia.



$$\boxed{I_E = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \cos^2 \beta + I_Z \cos^2 \gamma}$$

4. MOMENTO DE INERCIA

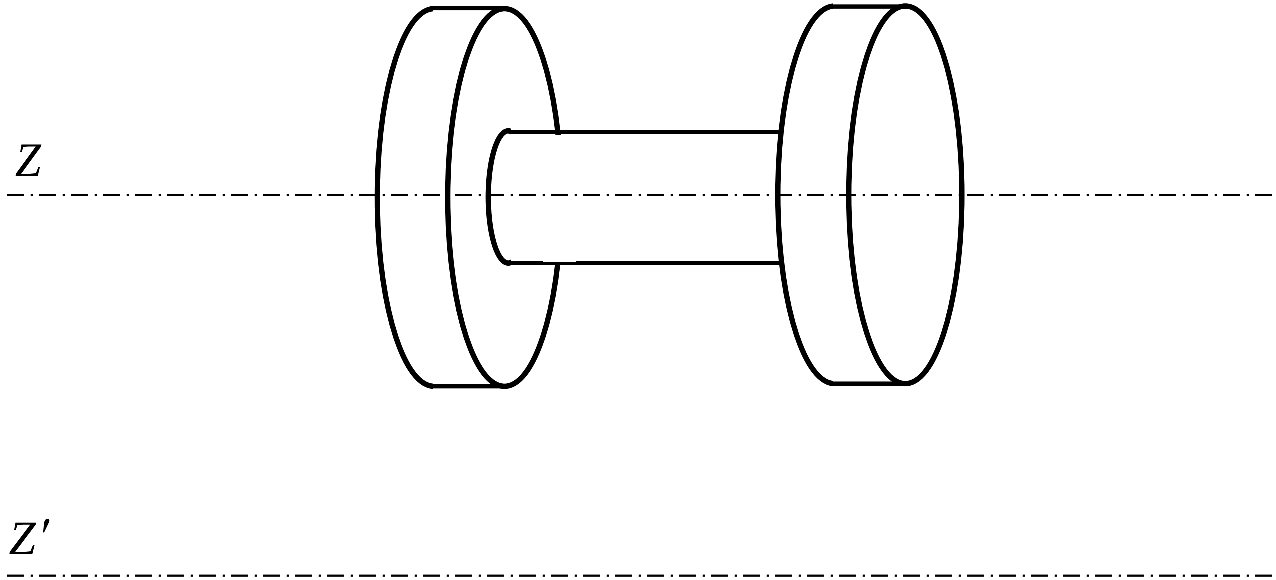
Momentos de inercia de cuerpos uniformes de formas diversas (tomado del Tipler-Mosca 5ª ed., pág. 254)



4. MOMENTO DE INERCIA

Problema

Calcular el momento de inercia del objeto representado abajo respecto al eje Z que pasa por su centro de masas. Los discos tienen 5 kg de masa y un radio de 10 cm. La barra cilíndrica que los une tiene 2 kg de masa, 3 cm de radio y 15 cm de longitud. ¿Cuánto vale el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior (Z') separado 20 cm de distancia?



SÓLIDO RÍGIDO II
(dinámica)

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA:

Caps. 8, 9 y 10 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Caps. 10, 11 y 12 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ª ed.
Caps. 11, 12 y 13 del Gettys-Frederick-Keller.

1. ECUACIÓN DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

Ecuación fundamental del movimiento de rotación:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}}$$

Si el cuerpo gira alrededor de un eje principal de inercia:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

2ª Ley de Newton para la rotación

$$\vec{M}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Ecuación de movimiento de un sólido rígido que rota alrededor de un eje principal. El origen de momentos debe elegirse respecto a cualquier punto fijo del eje en un sistema inercial o respecto al *CM*

1. ECUACIÓN DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

Pasos a seguir en la resolución de problemas de rotación

1. Dibujar el diagrama de cuerpo libre sobre cada elemento, situando las fuerzas en su punto de aplicación.

2. Aplicar las ecuaciones del movimiento (2ª Ley de Newton, tanto para movimiento de traslación como de rotación), eligiendo un sistema de referencia adecuado:

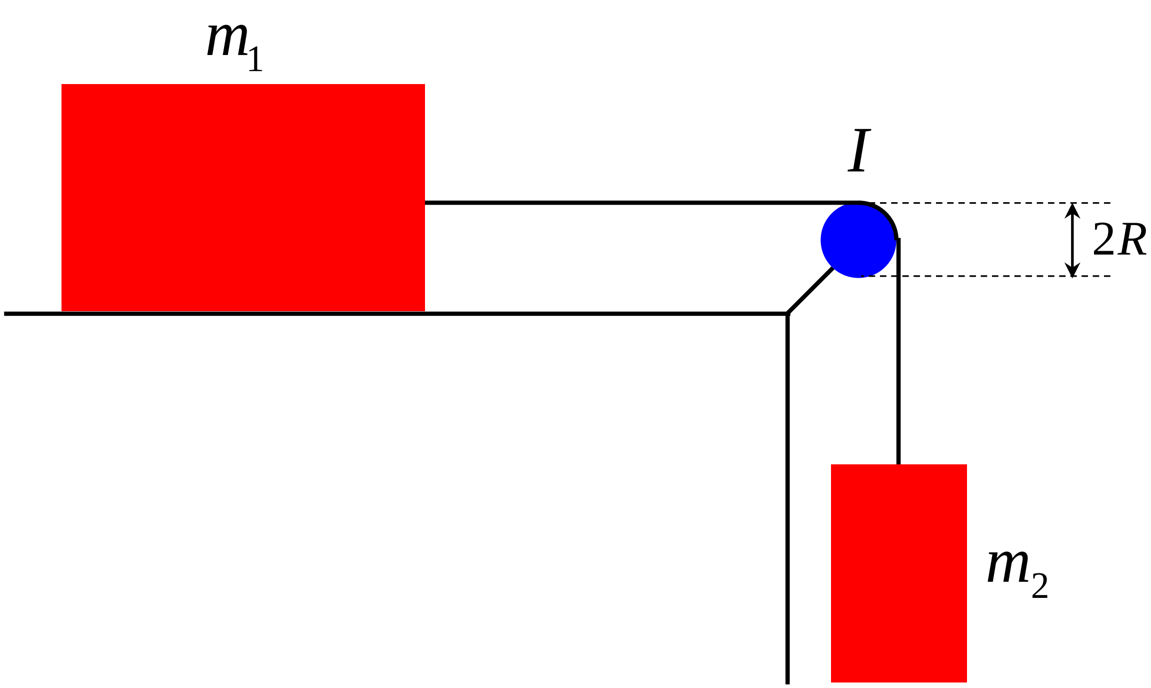
$$\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} \qquad \sum \vec{M} = I\vec{\alpha}$$

1. Obtener el valor de las incógnitas del problema, resolviendo las ecuaciones planteadas en el apartado 2.

1. ECUACIÓN DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO

Problema

El bloque de masa m_1 desliza sin rozamiento por la superficie horizontal, mientras que el bloque m_2 está suspendido de la cuerda que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I. Suponiendo que la cuerda no desliza por la polea, determinar la aceleración de los bloques y las tensiones T_1 y T_2. (Ejemplo 9.11 del Tipler-Mosca, 5ª ed.)



2. EQUILIBRIO ESTÁTICO

Un sólido está en equilibrio si tanto su aceleración lineal como su aceleración angular son nulas. Aplicando las ecuaciones de movimiento tenemos:

$$\underbrace{\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} = 0}_{\text{3 ecuaciones}} \quad + \quad \underbrace{\sum \vec{M} = I\vec{\alpha} = 0}_{\text{3 ecuaciones}}$$

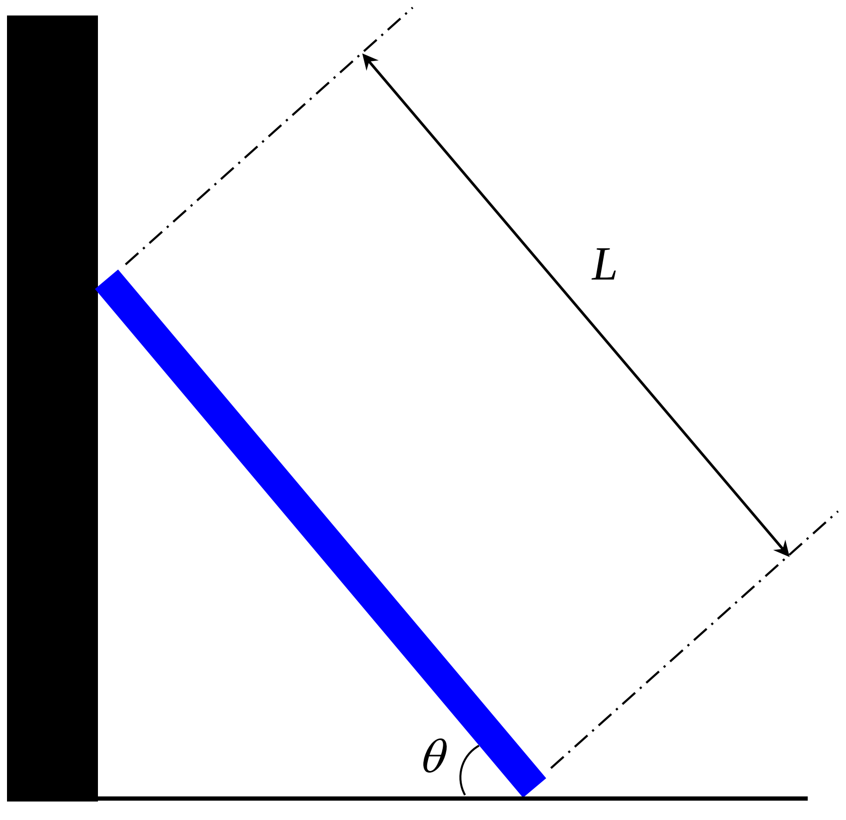
Si todas las fuerzas están en un mismo plano (por ejemplo en el plano XY):

$$\underbrace{\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0}_{\text{3 ecuaciones}}$$

2. EQUILIBRIO ESTÁTICO

Ejemplo

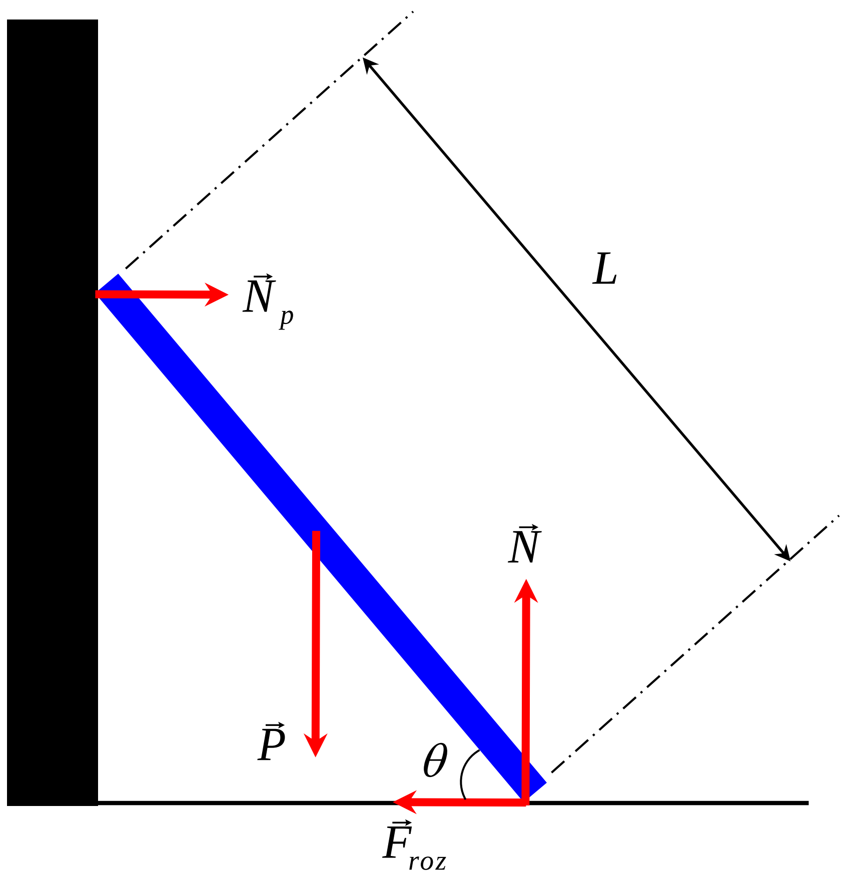
¿Cuánto tiene que valer, al menos, el coeficiente de rozamiento (estático) con el suelo para que la escalera no se caiga? (Suponer que no hay rozamiento en la pared).



2. EQUILIBRIO ESTÁTICO

Ejemplo

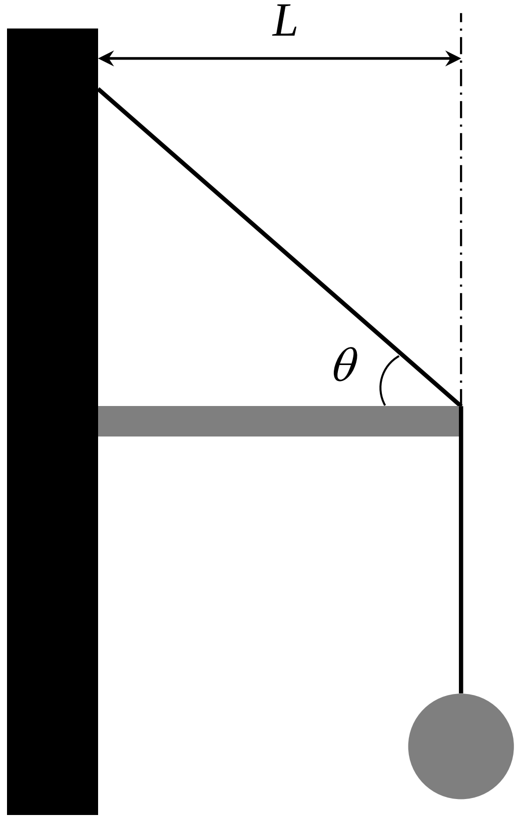
¿Cuánto tiene que valer, al menos, el coeficiente de rozamiento (estático) con el suelo para que la escalera no se caiga? (Suponer que no hay rozamiento en la pared).



2. EQUILIBRIO ESTÁTICO

Ejemplo

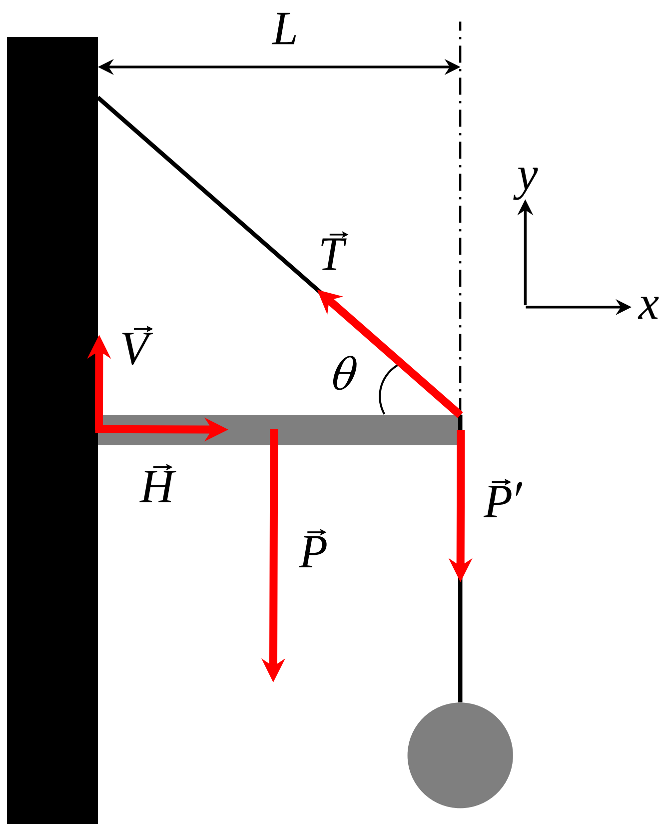
Calcular el valor de la tensión de la cuerda.



2. EQUILIBRIO ESTÁTICO

Ejemplo

Calcular el valor de la tensión de la cuerda.



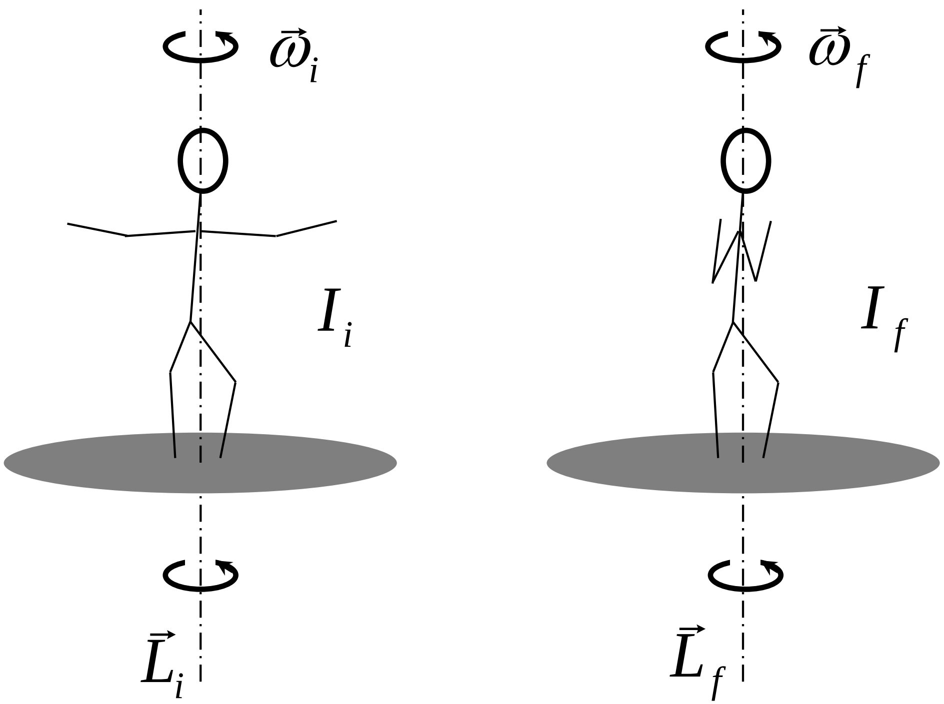
3. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

De la ecuación fundamental del movimiento de rotación,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}} \text{, si } \vec{M}_{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{cte.}$$

Ejemplo

Persona encima de una plataforma giratoria.



Si el momento externo es nulo, L se conserva:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \Rightarrow \quad I_i \vec{\omega}_i = I_f \vec{\omega}_f$$

$$I_i > I_f \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_i < \vec{\omega}_f$$

4. ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Sólido rígido con movimiento de traslación

Energía cinética de traslación:

$$E_{c_t} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Sólido rígido con movimiento de rotación

Energía cinética de rotación:

$$E_{c_r} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Sólido rígido con movimiento de traslación y rotación

Energía cinética de traslación y rotación:

$$E_c = E_{c_t} + E_{c_r} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

5. TRABAJO Y POTENCIA DE ROTACIÓN

Trabajo infinitesimal dW

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F dr\cos\alpha = FR\cos\alpha d\theta = M d\theta}$$

$$dr = R\,d\theta$$

$$\vec{M} = \vec{R}\times\vec{F}$$

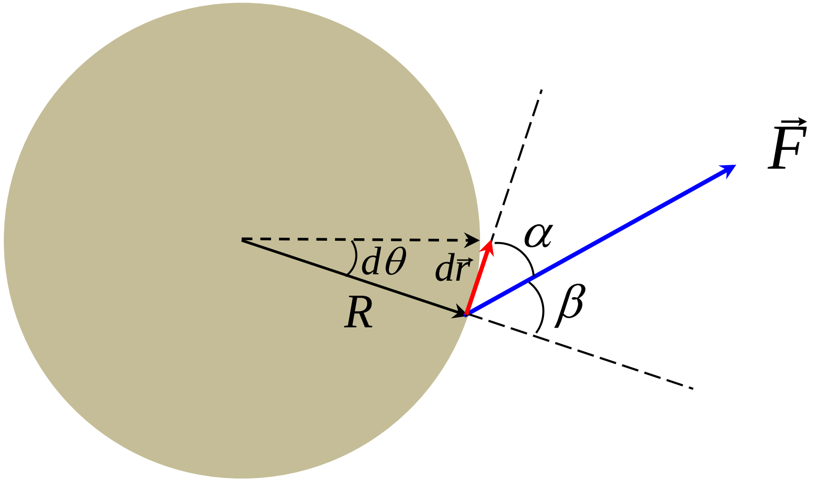
$$M = FR\operatorname{sen}\beta = FR\cos\alpha$$

Trabajo total W

$$\boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M d\theta}$$

Potencia

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega}$$



5. TRABAJO Y POTENCIA DE ROTACIÓN

Ejercicio

El motor de un coche presenta un par motor de 400 Nm a 2000 r.p.m. ¿Qué potencia ofrece el motor a esas revoluciones?

La potencia máxima que ofrece ese coche es de 170 c.v. a 3800 r.p.m. ¿Cuál es el par motor cuando el coche opera a su máxima potencia?

Dato: 1 c.v. = 735 W

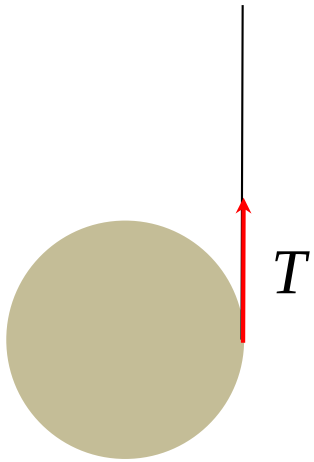
6. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_c = \Delta\left(E_{c_t} + E_{c_r}\right) = \Delta\left(\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

Problema

La cuerda que está enrollada en el cilindro de la figura está sostenida por la mano de una persona que tira hacia arriba de ella con aceleración constante, de forma que el centro de masas del cilindro permanece inmóvil.

a) ¿Qué velocidad alcanza el disco después de realizar 5 revoluciones, suponiendo que inicia el movimiento de rotación con velocidad angular nula?
b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?
c) ¿Cuánto vale la aceleración angular?



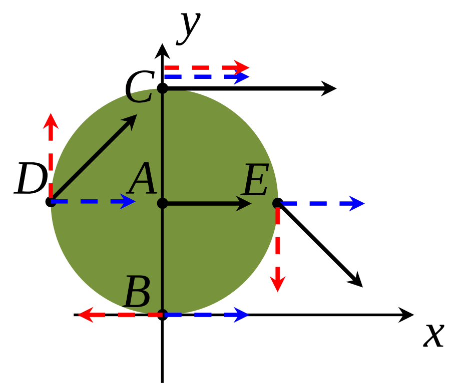
Datos: Radio del cilindro R = 5 cm.
Masa del cilindro M = 200 g.

7. MOVIMIENTO DE RODADURA

Este movimiento puede estudiarse como la combinación de una traslación del centro de masas más una rotación alrededor del centro de masas.

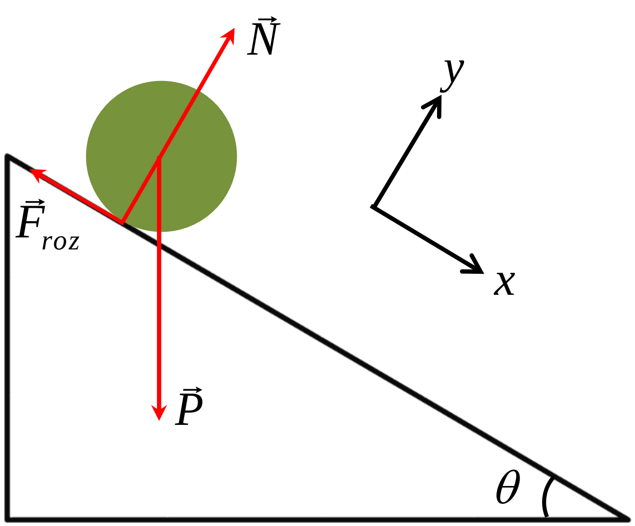
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{CM}$$
$$\sum \vec{M}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha}$$

$$v_{CM} = \omega R$$
$$a_{CM} = \alpha R$$



Ejemplo

Objeto que rueda (sin deslizar) por un plano inclinado. Existe rozamiento (estático).



Eje x: $P_x - F_{roz} = Ma_{CM}$

Eje y: $N - P_y = 0$

Eje z: $F_{roz}R = I_{CM}\alpha$

$a_{CM} = \alpha R$

7. MOVIMIENTO DE RODADURA

$$F_{roz} = \frac{I_{CM}\alpha}{R} \quad \Rightarrow \quad Mg\text{sen}\theta - \frac{I_{CM}\alpha}{R} = Ma_{CM} \quad \Rightarrow \quad Mg\text{sen}\theta - \frac{I_{CM}a_{CM}}{R^2} = Ma_{CM}$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{Mg\text{sen}\theta}{\mathrm{M} + \frac{\mathrm{I_{CM}}}{\mathrm{R}^2}} = \frac{g\text{sen}\theta}{1 + \frac{\mathrm{I_{CM}}}{\mathrm{MR}^2}}}$$

Casos:

a) <u>Esfera maciza:</u> $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{g\text{sen}\theta}{1+2/5} = \frac{5}{7}g\text{sen}\theta \approx 0.71g\text{sen}\theta$

a) <u>Cilindro:</u> $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{g\text{sen}\theta}{1+1/2} = \frac{2}{3}g\text{sen}\theta \approx 0.67g\text{sen}\theta$

b) <u>Aro:</u> $I_{CM} = MR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{g\text{sen}\theta}{1+1} = \frac{1}{2}g\text{sen}\theta = 0.5g\text{sen}\theta$

c) <u>Objeto puntual (no rueda, desliza sin rozamiento):</u> $a_{CM} = g\text{sen}\theta$

En los casos a), b) y c), los resultados sólo son válidos en el rango de ángulos en que hay sólo rodadura (no hay deslizamiento).

7. MOVIMIENTO DE RODADURA

Si el objeto se encuentra a una distancia h del suelo, su energía total será:

$$E = E_{c_t} + E_{c_r} + E_p = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + mgh$$

En el movimiento de rodadura la fuerza de rozamiento es estática, por lo tanto no realiza trabajo y la energía total se conserva.

Ejercicio

Sea una esfera, un cilindro y un aro en la alto de un plano inclinado. ¿Cuál llegará antes abajo?