SISTEMAS DE PARTÍCULAS

OBJETIVOS

1. Comprender el concepto de centro de masas y relacionar su movimiento con las fuerzas externas
2. Analizar la conservación del momento lineal para un sistema de partículas
3. Conocer los conceptos de momento angular orbital e interno para un sistema de partículas
4. Analizar la conservación de la energía para un sistema de partículas
5. Distinguir los conceptos de energía propia y energía interna para un sistema de partículas
6. Analizar colisiones aplicando leyes de conservación

BIBLIOGRAFÍA:

Caps. 4, 5 y 8 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Caps. 7, 8, 9 y 11 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ªed.
Cap. 10 del Gettys-Frederick-Keller.

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

ÍNDICE

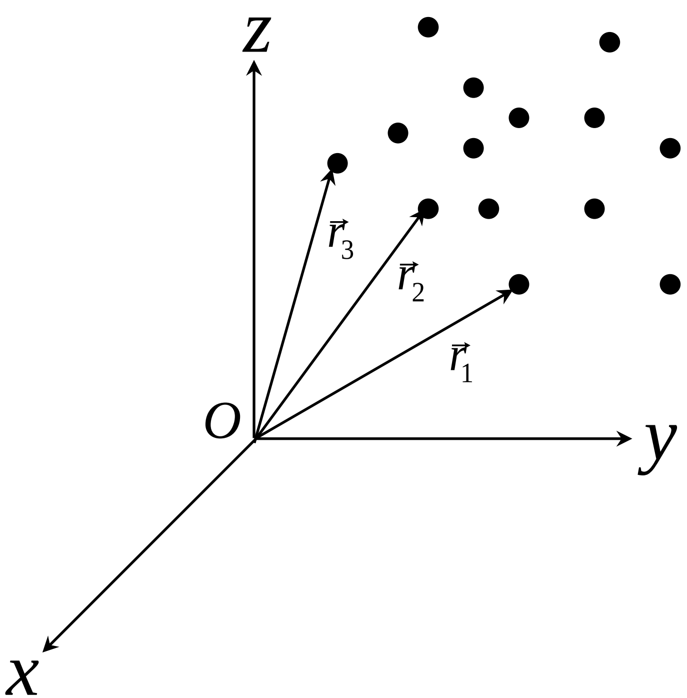
BIBLIOGRAFÍA:

Caps. 4, 5 y 8 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Caps. 7, 8, 9 y 11 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ªed.
Cap. 10 del Gettys-Frederick-Keller.

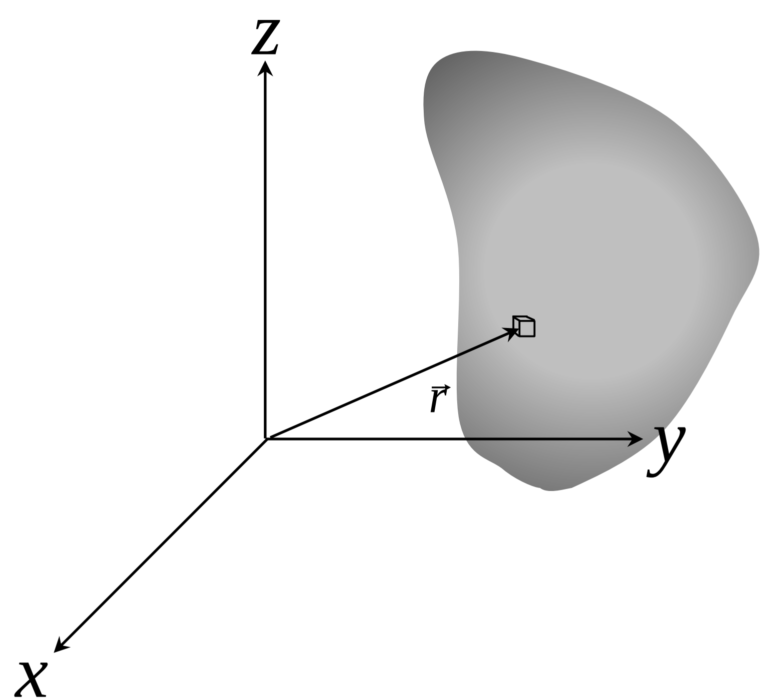
1. CENTRO DE MASAS

Centro de masas: Es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la suma de todas las fuerzas externas al sistema. Así, el sistema formado por toda la masa, concentrada en la posición del centro de masas, es un sistema equivalente al original

distribución discreta de masa



distribución continua de masa



1. CENTRO DE MASAS

Posición del centro de masas (distribución discreta de masa)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

En coordenadas cartesianas:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

Posición del centro de masas (distribución continua de masa)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int dm\vec{r}}{\int dm} = \frac{\int dm\vec{r}}{M}$$

En coordenadas cartesianas:

$$x_{CM} = \frac{\int dmx}{\int dm} = \frac{\int dmx}{M}$$

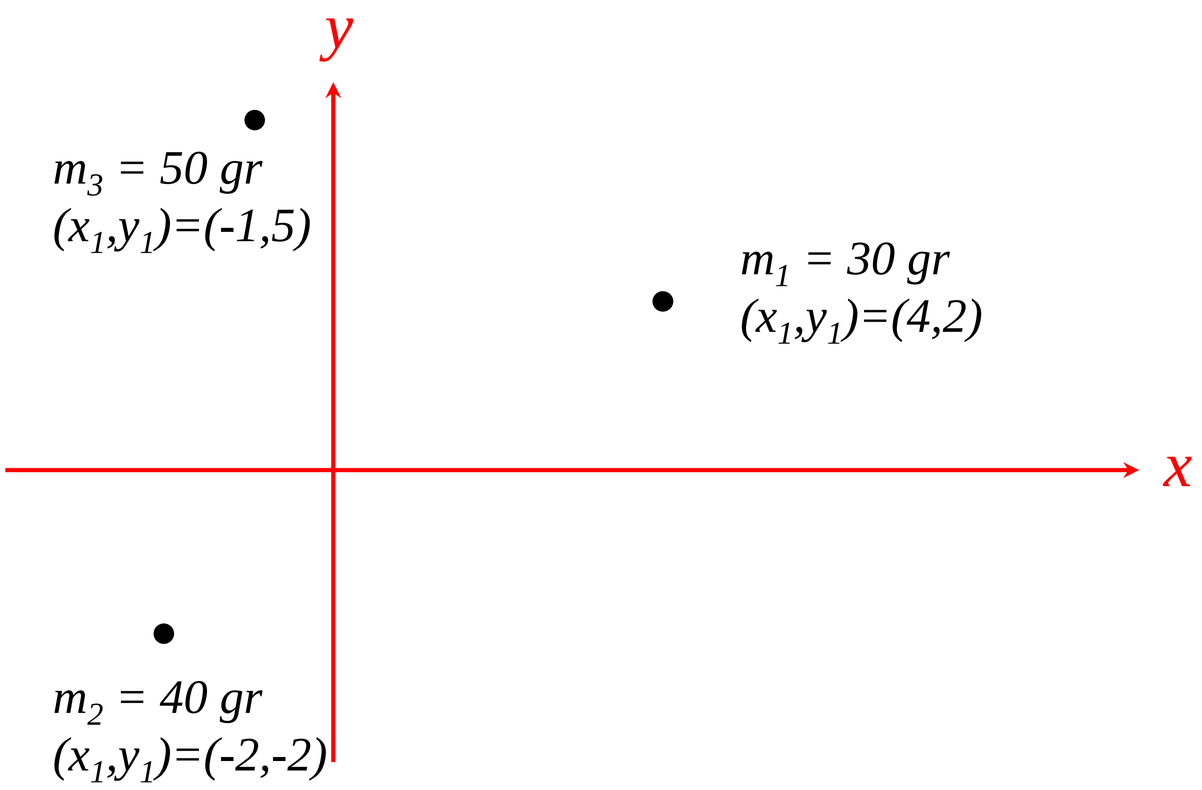
$$y_{CM} = \frac{\int dmy}{\int dm} = \frac{\int dmy}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\int dmz}{\int dm} = \frac{\int dmz}{M}$$

1. CENTRO DE MASAS

Problema

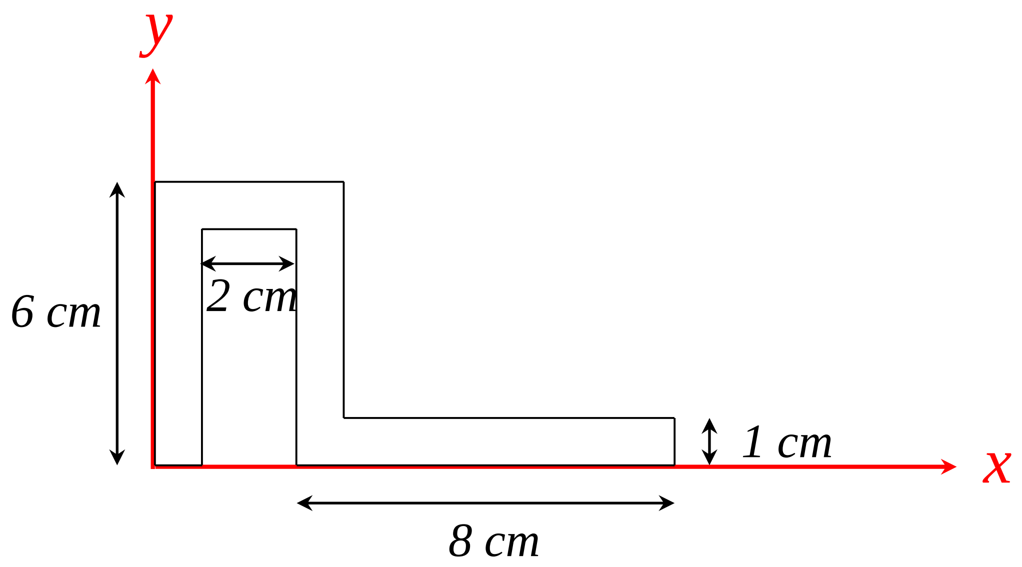
Calcular el centro de masas del sistema de tres cuerpos puntuales que aparece en la figura, respecto al sistema de ejes cartesianos x, y:



1. CENTRO DE MASAS

Problema

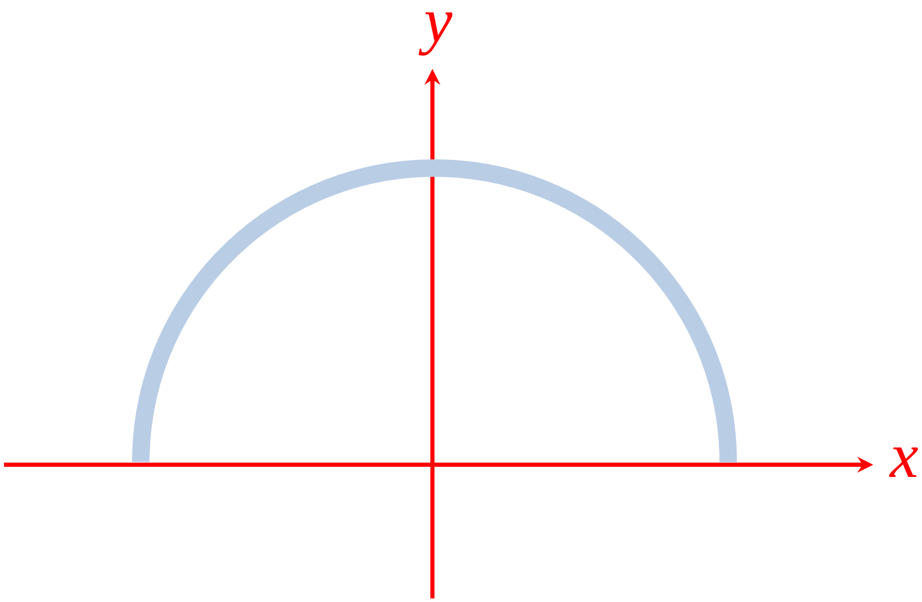
Calcular el centro de masas de la siguiente figura, respecto al sistema de ejes cartesianos x, y (suponiendo que la figura es bidimensional y homogénea):



1. CENTRO DE MASAS

Problema

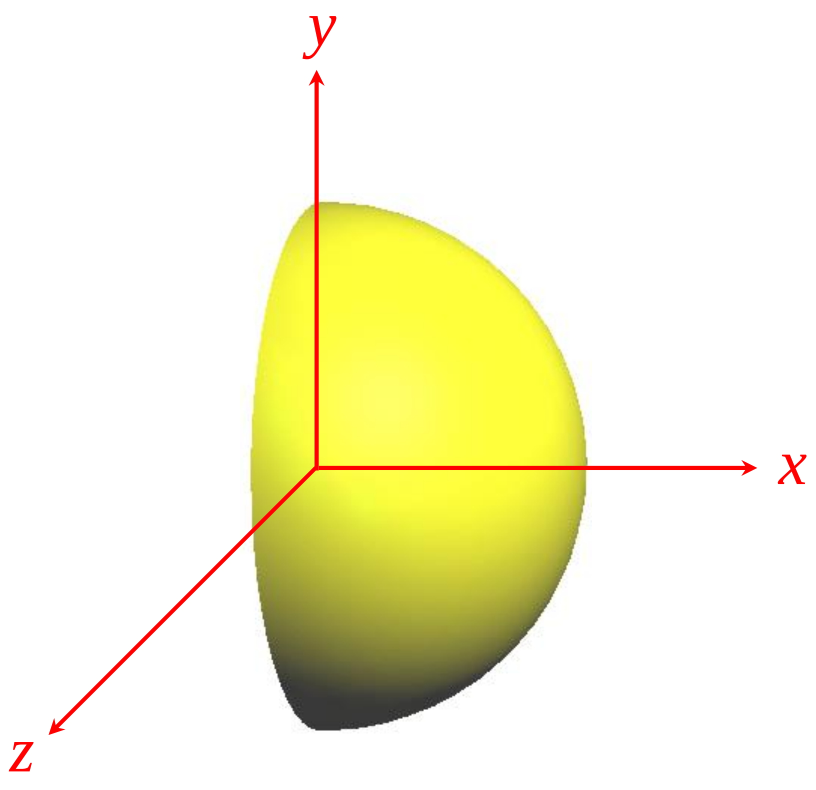
Calcular el centro de masas del aro semicircular homogéneo de la figura, respecto al sistema de ejes cartesianos x, y:
(solución en pags. 206-207 del Tipler-Mosca)



1. CENTRO DE MASAS

Problema

Calcular el centro de masas de la siguiente semiesfera homogénea, respecto al sistema de ejes cartesianos x, y, z de la figura:



2. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

La velocidad y aceleración del centro de masas se obtienen derivando el vector posición respecto al tiempo:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

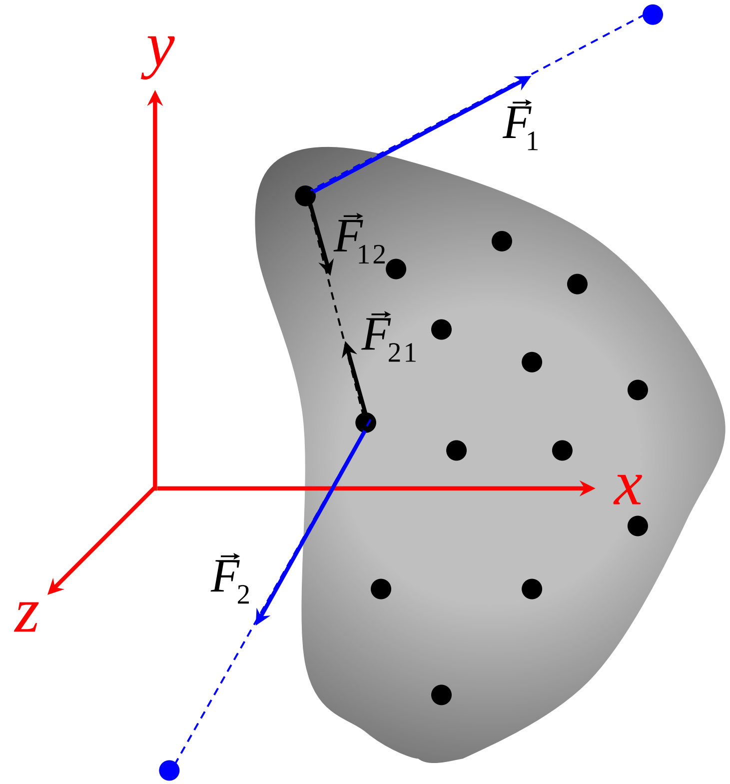
$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

2. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{M} = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{\,\text{ext}} + \vec{F}_i^{\,\text{int}}}{M} = \frac{\sum_i \vec{F}_i^{\,\text{ext}}}{M}$$

El centro de masas se mueve como una partícula de masa M sujeta a la fuerza resultante externa.

2ª Ley de Newton para un sistema de partículas



Las fuerzas que sienten las partículas del sistema pueden clasificarse en internas y externas. Las primeras son interacciones ejercidas entre partículas del sistema, mientras que las segundas se ejercen entre partículas internas y externas al sistema.

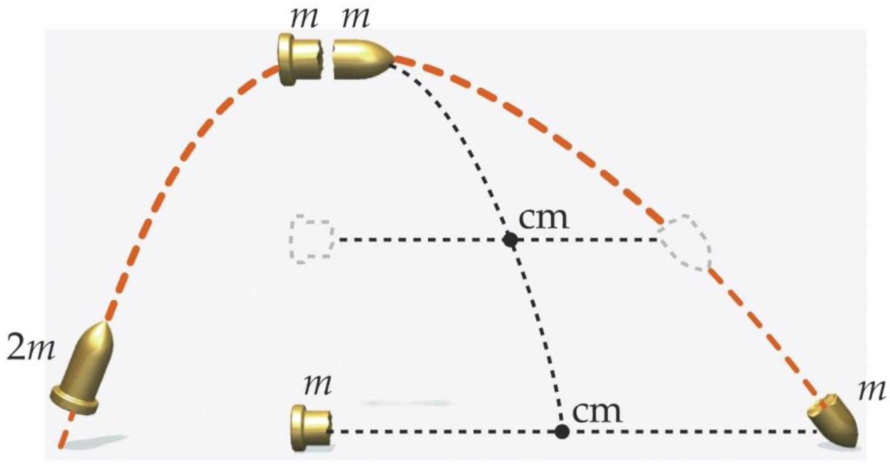
La suma a todas las partículas del sistema de las fuerzas internas es cero, ya que se cancelan dos a dos (acción-reacción), quedando sólo la contribución de las fuerzas externas al sistema:

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,\text{int}} = 0 \quad \text{puesto que} \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

2. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

Problema 5 (ejemplo 8.3 del Tipler-Mosca)

Se sabe que una bala de masa $2m$ al ser disparada con un cierto ángulo respecto a la horizontal tiene un alcance R. En uno de los disparos (todos bajo el mismo ángulo), la bala explota en dos fragmentos de igual masa justo en el punto más alto de su trayectoria. Después de la explosión, uno de los fragmentos tiene velocidad nula y cae hacia el suelo en vertical. Despreciando el rozamiento con el aire, ¿dónde cae el otro fragmento? (ver figura).



3. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

Cantidad de movimiento (momento lineal) de un sistema de partículas:

$$\boxed{\vec{P}_{tot} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}}$$

Cantidad de movimiento total del sistema = Cantidad de movimiento de una partícula puntual de masa M moviéndose en la posición del CM.

$$\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = M\,\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}}$$

Ley de conservación del momento lineal para sistemas de partículas

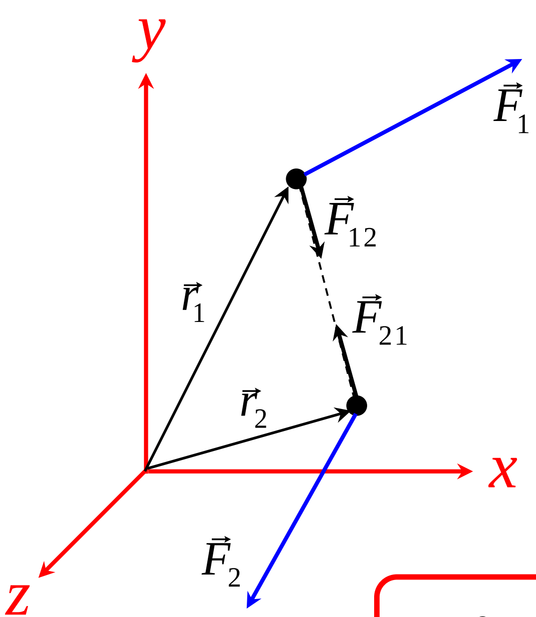
$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i^{\,\mathrm{ext}} = \vec{F}_{\mathrm{ext,neta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\ \mathrm{cte}}$$

4. MOMENTO ANGULAR

Se define como la suma vectorial del momento angular de cada partícula del sistema:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \underbrace{\vec{M}_1 + \vec{M}_2}_{\text{Momentos de las fuerzas respecto al origen de coordenadas}}$$



$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cancelto{0}{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_{21}}$$

Las fuerzas internas no varían el momento angular de un sistema

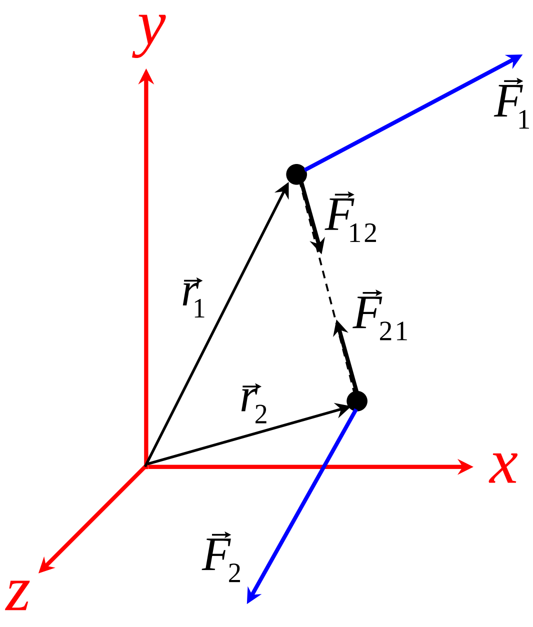
4. MOMENTO ANGULAR

Podemos expresar la derivada del momento angular de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext}$$

2ª Ley de Newton para el movimiento de rotación

$\vec{M}_{ext} =$ suma de los momentos de las fuerzas externas



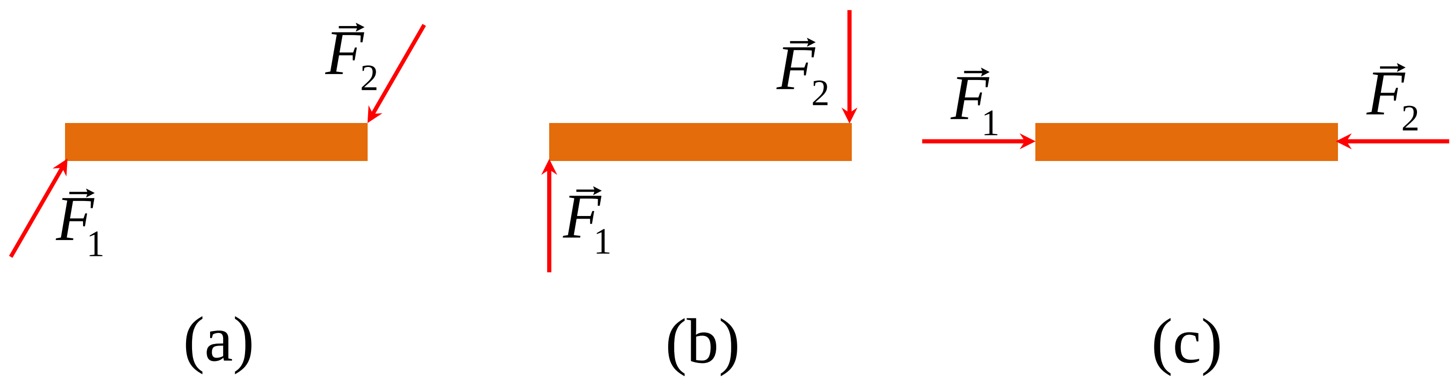
Principio de conservación del momento angular para sistemas de partículas

$$\vec{M}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ cte}$$

4. MOMENTO ANGULAR

Ejemplo

Sobre un bloque de madera inicialmente en reposo actúa un par de fuerzas. ¿En qué situación será mayor la variación de momento angular del bloque?



4. MOMENTO ANGULAR

El momento angular de un sistema respecto a un punto O se puede expresar como la suma de dos términos:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{\text{int}} + \vec{L}_{\text{orb}}}$$

$$\vec{L}_{\text{int}} = \sum_i \vec{L}_i' = \sum_i \left(\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'\right)$$

El **momento angular interno** se calcula sumando el momento angular de todas las partículas del sistema tomando como origen el centro de masas del sistema.

$$\vec{L}_{\text{orb}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times M\vec{v}_{\text{CM}}$$

El **momento angular orbital** coincide con el que tendría una partícula de masa M moviéndose con la velocidad del centro de masas del sistema, medido respecto del origen O.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\text{int}}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{\text{orb}}}{dt}$$

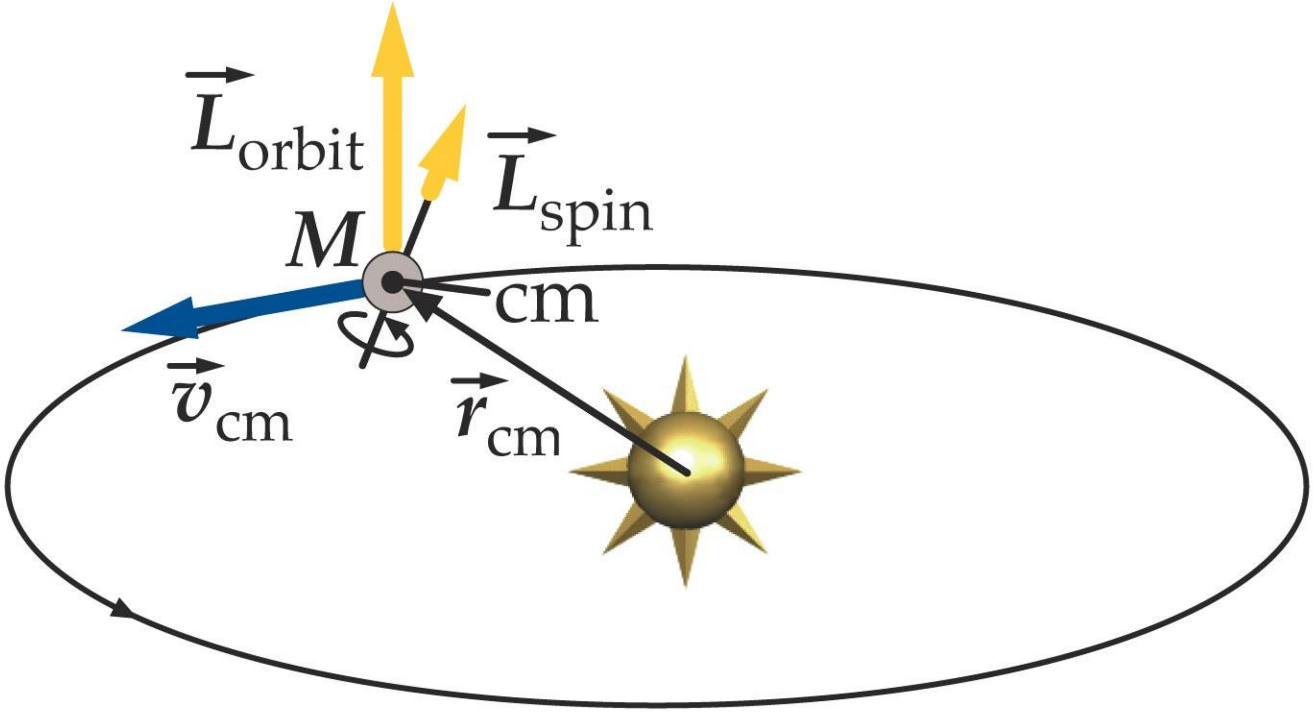
$$\frac{d\vec{L}_{\text{int}}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}}$$ respecto al centro de masas

$$\frac{d\vec{L}_{\text{orb}}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}}$$ aplicadas en CM respecto a O

4. MOMENTO ANGULAR

Ejemplo (fig. 10.15 del Tipler-Mosca, vol. 1)

El momento angular de la Tierra respecto al centro del Sol es la suma del momento angular interno (rotación de la Tierra alrededor de su eje) y el momento angular orbital (traslación de la Tierra alrededor del Sol).



5. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La **energía cinética de un sistema de partículas** es la suma de la energía cinética de cada una de las partículas:

$$\boxed{E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

El **trabajo total** es la suma de los trabajos de todas las fuerzas que se ejercen a las partículas, tanto internas como externas:

$$W = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = \Delta E_c$$

Notar que el trabajo de las fuerzas internas no es cero (hay que tener en cuenta las trayectorias).

Si las **fuerzas internas** son **conservativas**, tendrán una **energía potencial** asociada:

$$W_{\text{int}} = -\Delta E_{p_{\text{int}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\text{ext}} = \Delta\left(E_c + E_{p_{\text{int}}}\right) = \Delta U}$$

U es la **energía propia** del sistema
E_c depende del SR
$E_{p_{\text{int}}}$ no depende del SR

5. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

1. Sistema aislado (no actúan fuerzas externas):

$$\boxed{W_{\text{ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 0 \quad (U = \text{cte})}$$

La energía propia se conserva

2. Fuerzas externas conservativas $\left(W_{\text{ext}} = -\Delta E_{p_{\text{ext}}}\right)$:

$$\boxed{\begin{gathered} W_{\text{ext}} = \Delta U = -\Delta E_{p_{\text{ext}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\left(U + E_{p_{\text{ext}}}\right) = 0 \\ E = U + E_{p_{\text{ext}}} = E_c + E_{p_{\text{int}}} + E_{p_{\text{ext}}} = \text{cte} \end{gathered}}$$

Si las fuerzas internas y externas son conservativas,
la energía mecánica del sistema se conserva

3. Fuerzas de rozamiento (no conservativas):

$$\boxed{\Delta E = W_{\text{roz}}}$$

Si actúan fuerzas de rozamiento, la variación de energía
mecánica es igual al trabajo de las fuerzas de rozamiento

6. DESCOMPOSICIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = E_{c_{\mathrm{orb}}} + E_{c_{\mathrm{int}}}$$

Energía cinética orbital $(E_{c_{\mathrm{orb}}})$ **:** Energía de una partícula de masa M que se mueve con la velocidad del centro de masas del sistema (depende del SR).

Energía cinética interna $(E_{c_{\mathrm{int}}})$**:** Es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas, pero tomando como origen el centro de masas del sistema (por esa razón las velocidades llevan tilde). Esta energía es independiente del SR (sólo depende del movimiento de las partículas con respecto al centro de masas).

$$U = E_c + E_{p_{\mathrm{int}}} = E_{c_{\mathrm{orb}}} + E_{c_{\mathrm{int}}} + E_{p_{\mathrm{int}}} = E_{c_{\mathrm{orb}}} + U_{\mathrm{int}}$$

$$U_{\mathrm{int}} = E_{c_{\mathrm{int}}} + E_{p_{\mathrm{int}}}$$

Energía interna: no depende del SR

$$\boxed{W_{\mathrm{ext}} = \Delta\left(E_{c_{\mathrm{orb}}} + E_{c_{\mathrm{int}}} + E_{p_{\mathrm{int}}}\right) = \Delta\left(E_{c_{\mathrm{orb}}} + U_{\mathrm{int}}\right)}$$

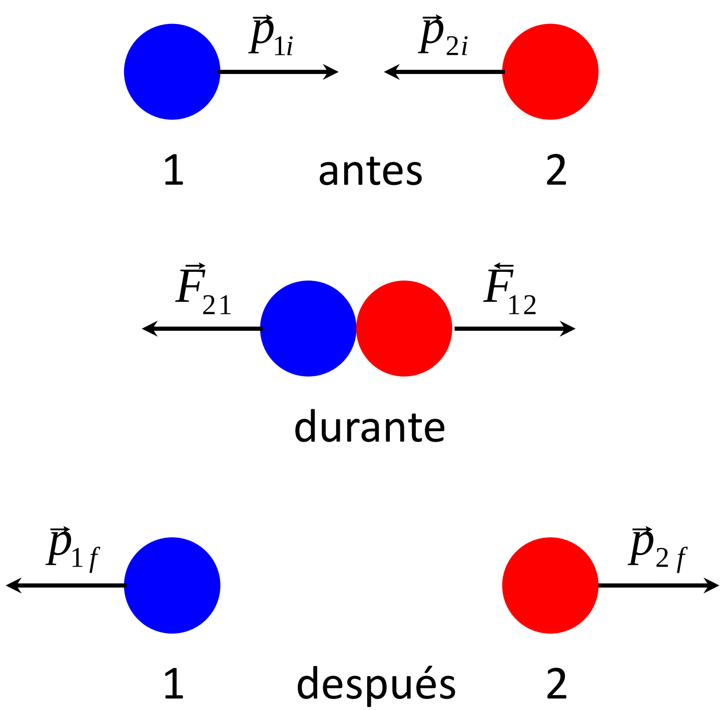
7. COLISIONES

Al **colisionar** dos o más cuerpos, actúan **fuerzas internas** que hacen que cambien sus momentos y energías. Al no existir fuerzas externas se conserva el momento lineal:

$$\Delta\vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2$$

Si además la **colisión** es **elástica** también se conserva la **energía cinética:**

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$



El **coeficiente de restitución** da una medida del grado de elasticidad de una colisión:

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \qquad e \in [0,1]$$

$e=0$ $\rightarrow$ colisión totalmente inelástica.
$e=1$ $\rightarrow$ colisión elástica.

7. COLISIONES

Problema

Una bola de billar que lleva una velocidad de 1 m/s realiza un choque elástico no frontal con otra bola de igual masa inicialmente en reposo. Después del choque, la bola incidente es desviada 30º respecto de su dirección original. ¿Cuáles son los vectores velocidad de cada bola después de la colisión?