OSCILADOR ARMÓNICO

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA:

Caps. 12 y 14 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Caps. 12 y 15 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ª ed.
Caps. 14 y 15 del Gettys-Frederick-Keller.

1. MOVIMIENTO PERIÓDICO

Un **movimiento periódico** es el tipo de evolución temporal que presenta un sistema cuyo estado se repite exactamente a intervalos regulares de tiempo. Si $S(t)$ representa el estado del sistema, para un movimiento oscilatorio se tiene que:

$$S(t) = S(t+T), \forall\, t$$

Ejemplos

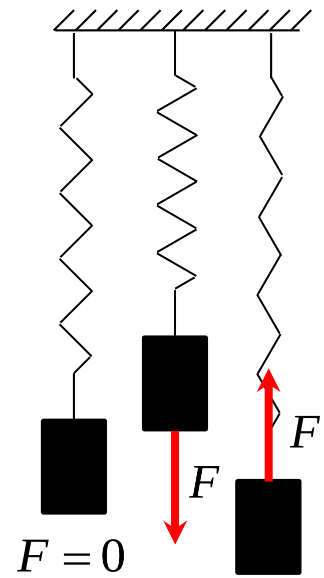
Movimiento de un objeto unido a un muelle.
La oscilación de un péndulo en un plano.
La Tierra girando alrededor del Sol.
Partícula moviéndose en una superficie cóncava bajo la acción de la gravedad.

2. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

El Movimiento Armónico Simple (MAS) es el más común e importante de todos los movimientos periódicos.

Ejemplo (objeto unido a un muelle)

$$F = -kx$$



Si sujetamos un objeto a un muelle y lo soltamos en la vertical, el objeto empieza a oscilar. Además, si la oscilación es pequeña, el tipo de movimiento que realiza es un MAS.

La k de la fórmula $F = -kx$ es la constante elástica del muelle y sus unidades S.I. son N/m.

El signo menos indica que se trata de una fuerza recuperadora: el sentido de la fuerza tiende a recuperar la longitud inicial, de forma que se opone al desplazamiento inicial.

3. CINEMÁTICA DEL MAS

Ecuación del MAS

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

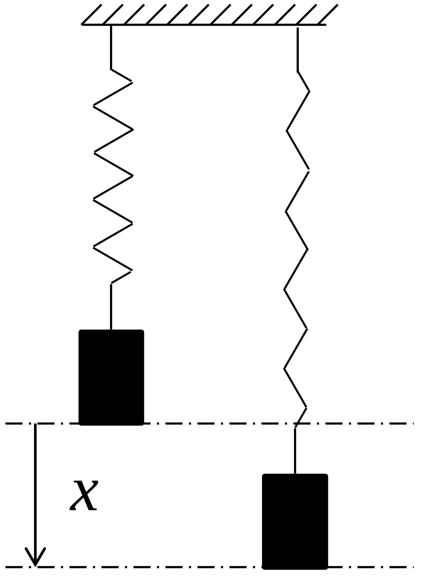
$$\begin{cases} x & \text{desplazamiento respecto 0} \\ A & \text{amplitud} \\ \omega & \text{frecuencia angular} \\ \varphi & \text{fase inicial} \end{cases}$$

Periodo

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

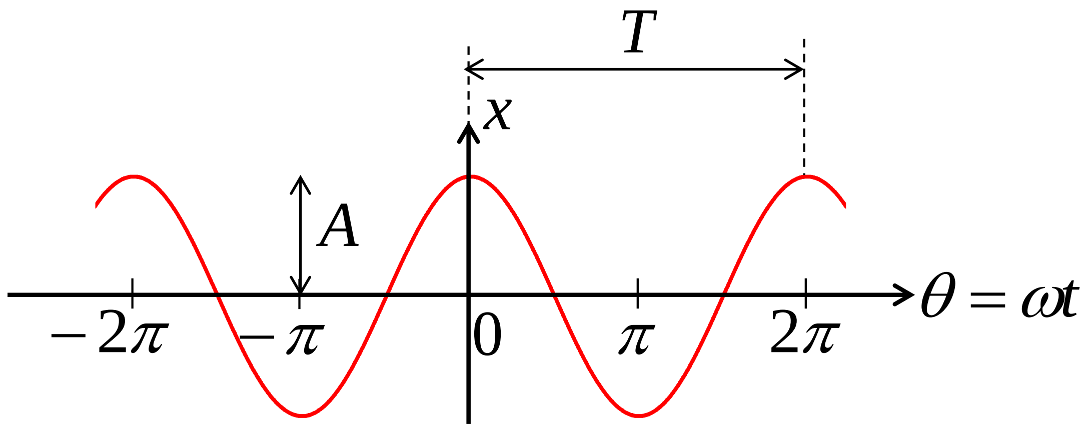
Frecuencia

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

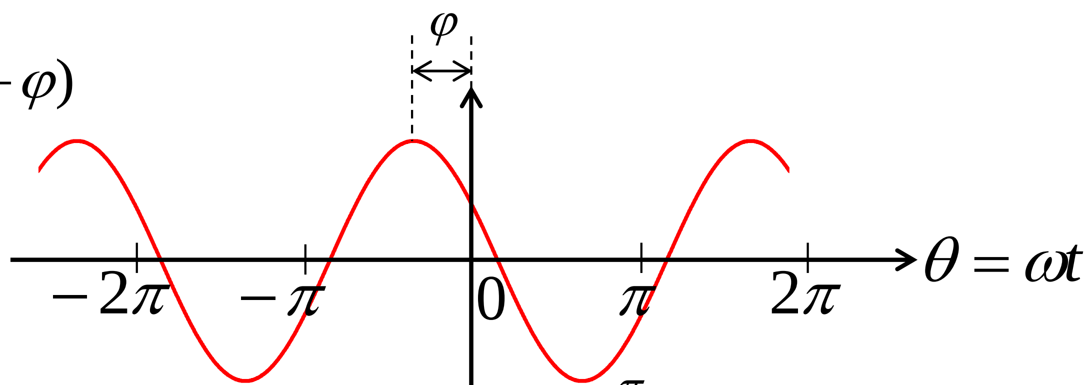


3. CINEMÁTICA DEL MAS

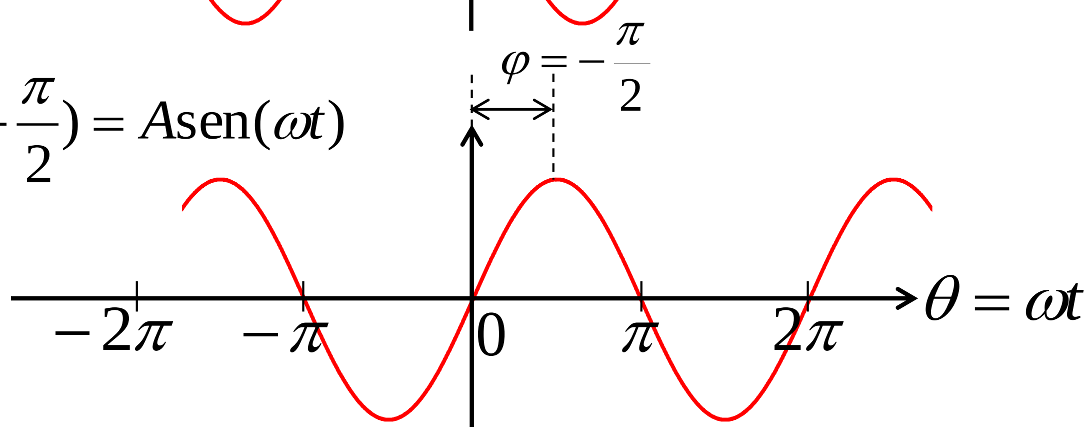
$$x(t) = A\cos\omega t$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



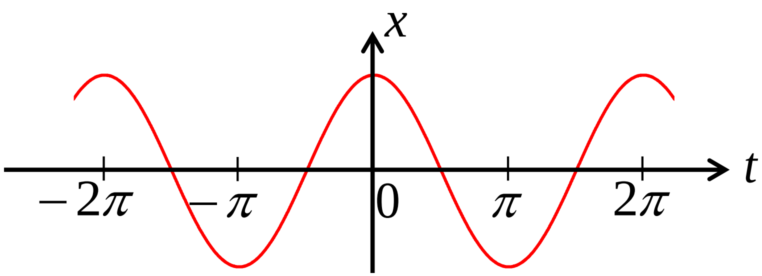
$$x(t) = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A\mathrm{sen}(\omega t)$$



3. CINEMÁTICA DEL MAS

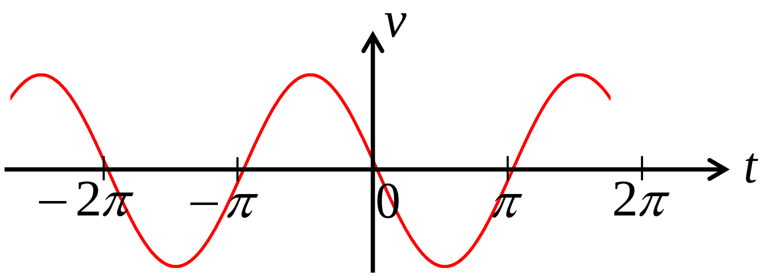
Posición

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



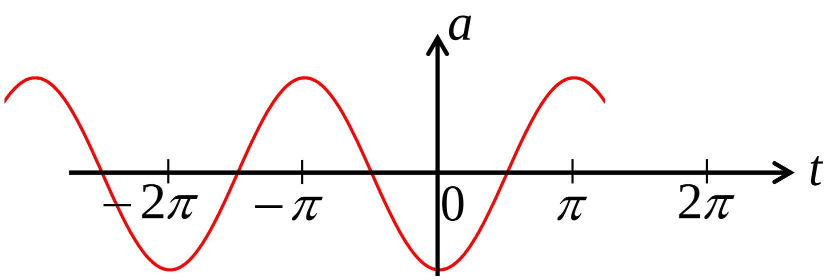
Velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$



Aceleración

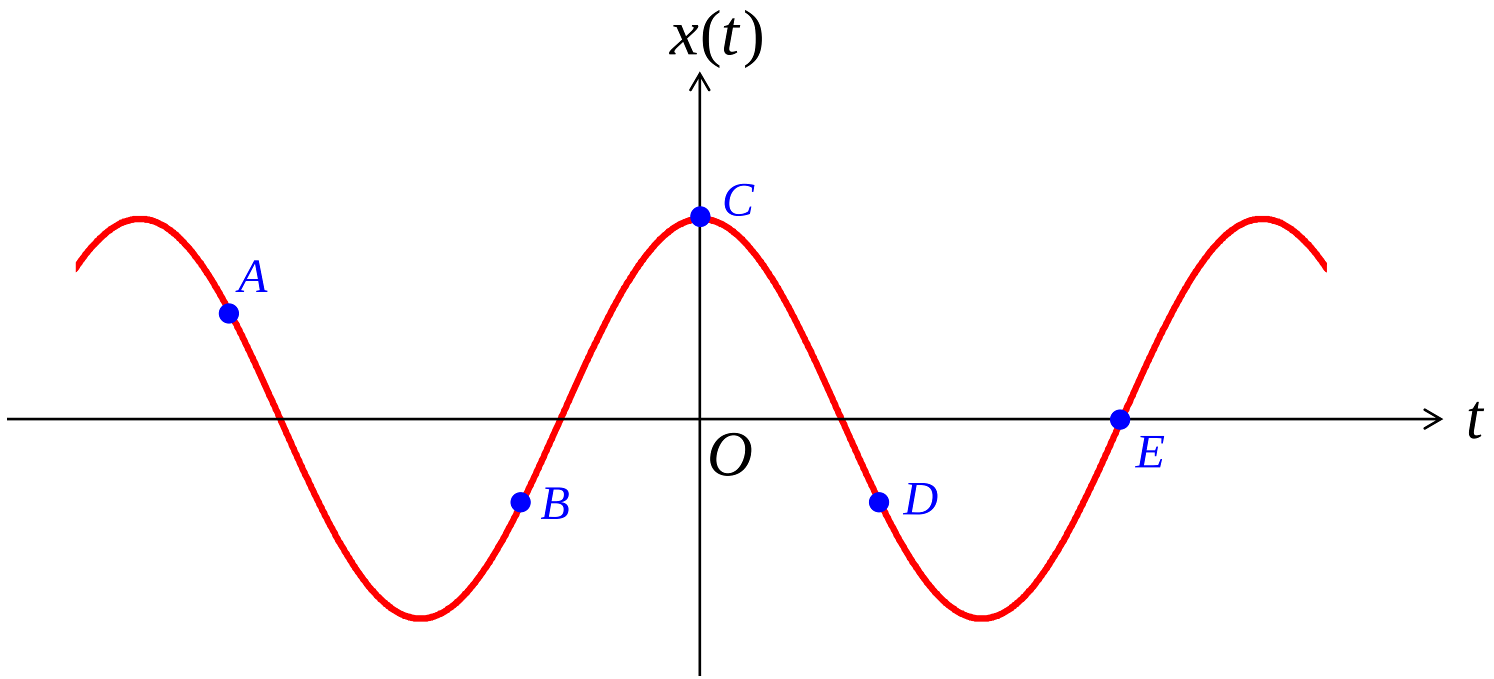
$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$



3. CINEMÁTICA DEL MAS

Ejemplo

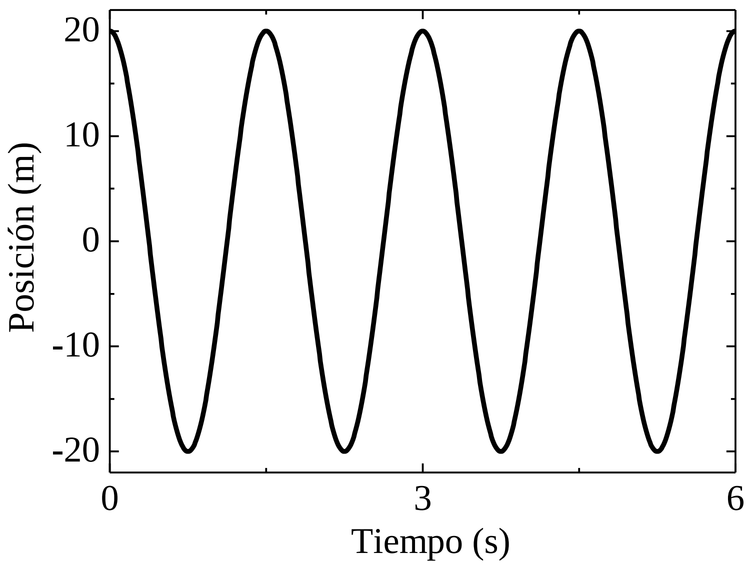
Un objeto se mueve efectuando un MAS como el indicado en la figura. ¿Qué signo tienen la velocidad y aceleración del objeto en los puntos señalados?



3. CINEMÁTICA DEL MAS

Ejemplo

Una partícula efectúa el MAS indicado en la figura. Hallar las ecuaciones para la posición, velocidad y aceleración de la partícula frente al tiempo.



4. FUERZA Y ENERGÍA DEL MAS

En un MAS, la fuerza es proporcional y opuesta al desplazamiento de la partícula (en el caso del muelle, la fuerza viene dada por la Ley de Hooke, $F = -kx$).

$$\boxed{a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad F = ma = -m\omega^2 x = -kx}$$

ENERGÍA

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \mathrm{sen}^2(\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$$

$$E_{\mathrm{pot}} = -\int F\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{\mathrm{total}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

4. FUERZA Y ENERGÍA DEL MAS

Ejemplo

Un objeto de 5 kg oscila sobre un muelle con una amplitud de 10 cm. La aceleración máxima es de 5 m/s^2. Determinar la energía total.

5. ECUACIÓN BÁSICA DEL MAS

$$\underbrace{F = -k\,x \qquad + \qquad F = m\,a}$$

$$-k\,x = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

5. ECUACIÓN BÁSICA DEL MAS

Ejemplo

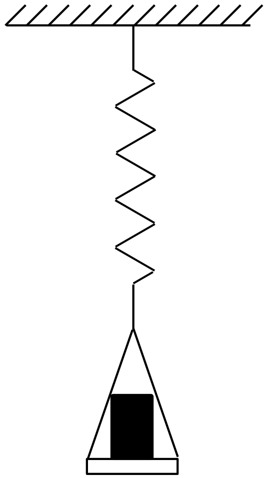
Se coloca un objeto en el extremo de un muelle que cuelga verticalmente de un techo, de forma que se estira 5 cm. Estando el objeto en reposo con el muelle estirado, se perturba ligeramente (se estira nuevamente el muelle) de manera que el objeto comienza a oscilar. ¿Cuál es el periodo del movimiento?

5. ECUACIÓN BÁSICA DEL MAS

Ejemplo

Al situar la pesa sobre el platillo el muelle se alarga 2 cm. Se hace oscilar el sistema con amplitud de 4 cm.

a) ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?
b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la pesa en el punto más alto?
c) ¿Cuál es la máxima amplitud para que la pesa permanezca sobre el platillo?



Masa pesa = 25 g
Masa platillo = 100 g

6. OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Se producen cuando además de la fuerza elástica existe una fuerza de amortiguamiento. Nos centraremos en fuerzas de amortiguamiento de la forma:

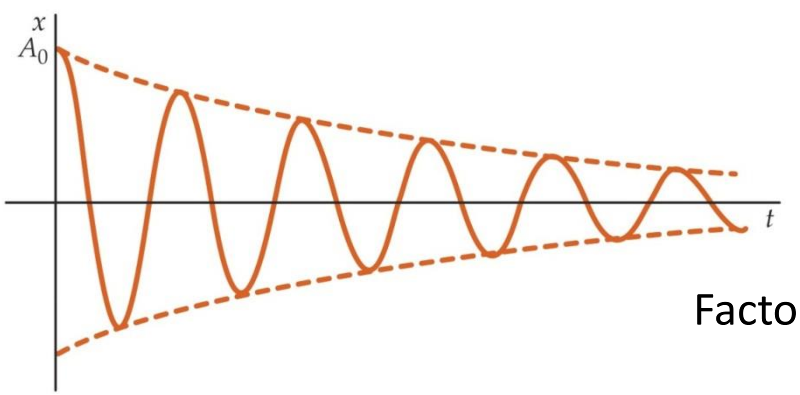
$$\boxed{F_{\text{roz}} = -bv}$$ donde b es la *constante de amortiguamiento*

$$F_{\text{elas}} + F_{\text{roz}} = ma \quad \Rightarrow \quad -kx - bv = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}v = 0}$$

Solución

$$\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\boxed{E(t) = E_0 e^{-\frac{b}{m}t} = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \tau = \frac{m}{b}$$ Constante de tiempo

La energía mecánica **no se conserva!**

Factor de calidad $$\boxed{Q = \omega_0 \tau = \omega_0 \frac{m}{b} = \frac{2\pi}{\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}}}}$$

6. OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Problema

Un objeto de 5 kg está unido a un muelle de constante k = 250 N/m y oscila con una amplitud inicial de 5 cm. Hallar:

a) El periodo del movimiento.
b) La energía inicial total.

Si el valor de Q (factor de calidad) es de 10000, ¿cuál es el valor de la constante de amortiguamiento (b) y la disminución relativa de energía por ciclo ($\Delta E/E$)?

7. OSCILACIONES FORZADAS

Se producen cuando además de las fuerzas elástica y de amortiguamiento, se añade una nueva fuerza externa sinusoidal de frecuencia ω_F:

$$F_{\mathrm{elas}} + F_{\mathrm{roz}} + F_{\mathrm{ext}} = ma \quad \Rightarrow \quad -kx - bv + F_0 \cos(\omega_F t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

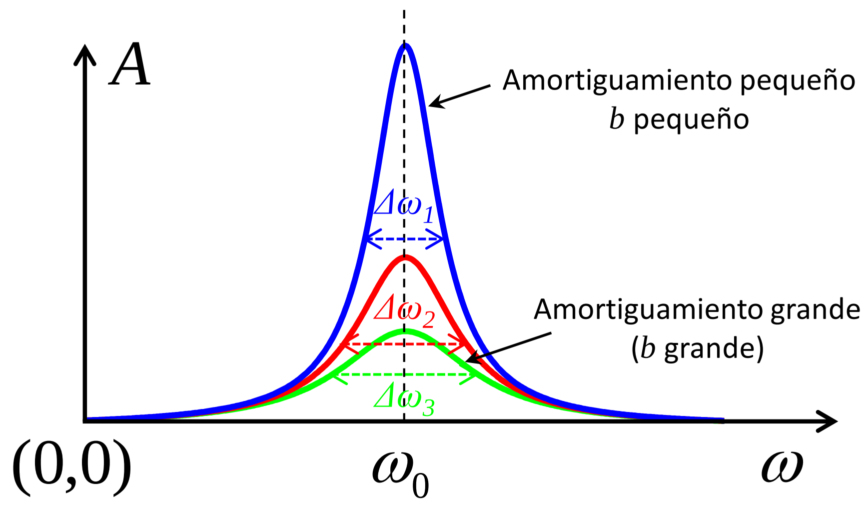
La solución es suma de una parte transitoria y una parte estacionaria.
La solución estacionaria viene dada por la siguiente ecuación:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_F t - \delta)} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)^2 + b^2\omega_F^2}} \\ \delta = \dfrac{b\omega_F}{m\left(\omega_0^2 - \omega_F^2\right)} \end{cases}$$

En estado estacionario, el sistema oscila a la frecuencia de la fuerza externa. Además, si $\omega_F = \omega_0$ se produce la resonancia, caracterizada porque la amplitud es máxima al ser máxima la transferencia de energía.

Si el amortiguamiento es relativamente pequeño:

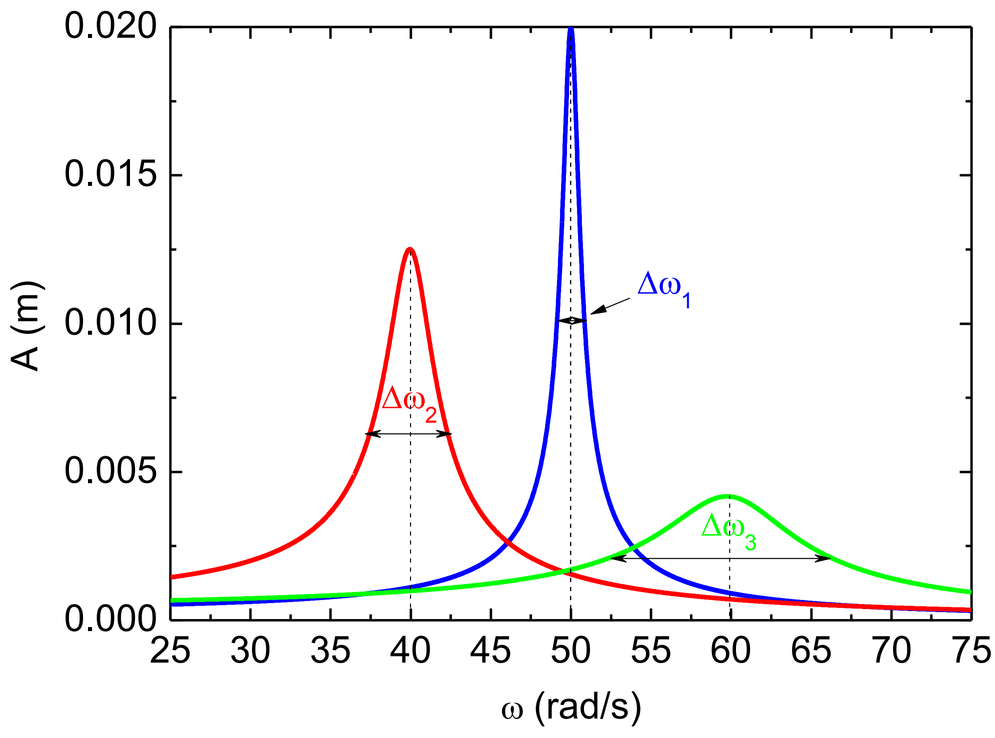
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$



7. OSCILACIONES FORZADAS

Problema

La figura muestra la amplitud (A) en función de la frecuencia impulsora (ω) para tres osciladores forzados (azul, rojo y verde). ¿Cuáles son los valores de la frecuencia de resonancia y factor de calidad (Q) para cada uno de ellos? ¿Cuál tiene mayor pérdida de energía por ciclo?



8. PÉNDULO SIMPLE Y PÉNDULO FÍSICO

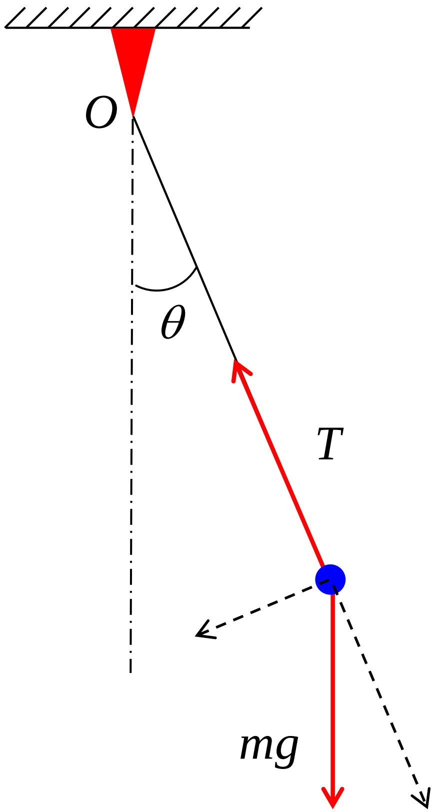
El péndulo simple está compuesto de una masa puntual que cuelga de un hilo inextensible y sin masa.

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma \quad \Rightarrow \quad g\,\mathrm{sen}\,\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l}\theta = 0}$$

ángulos pequeños, $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$

Ecuación de un MAS, cuya solución es: $\boxed{\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)}$

donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. El periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$



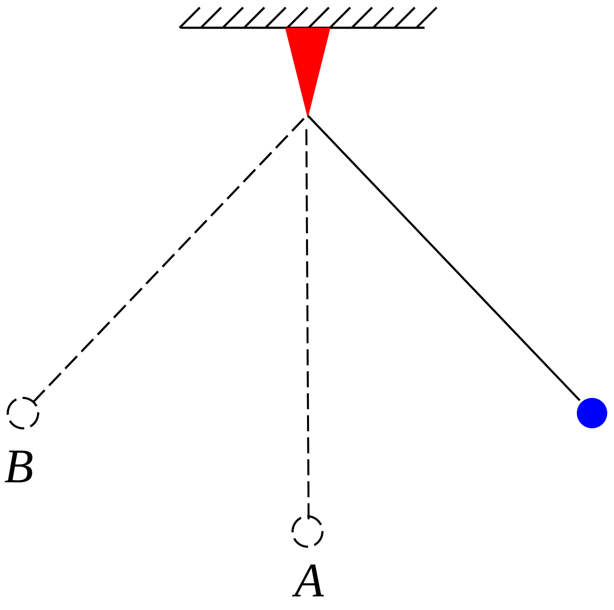
El periodo del movimiento depende de la longitud, pero no depende de la masa ni de la amplitud (pequeñas oscilaciones).

8. PÉNDULO SIMPLE Y PÉNDULO FÍSICO

Ejemplo

Inicialmente, el péndulo (simple) se deja caer desde la altura indicada (lenteja azul).

1) ¿Qué trayectoria sigue la lenteja si se corta la cuerda cuando alcanza el punto A?
2) ¿Y si se corta cuando alcanza el punto B?



8. PÉNDULO SIMPLE Y PÉNDULO FÍSICO

El péndulo físico o compuesto es cualquier sólido rígido que pueda oscilar libremente alrededor de un eje que no pase por su centro de gravedad.

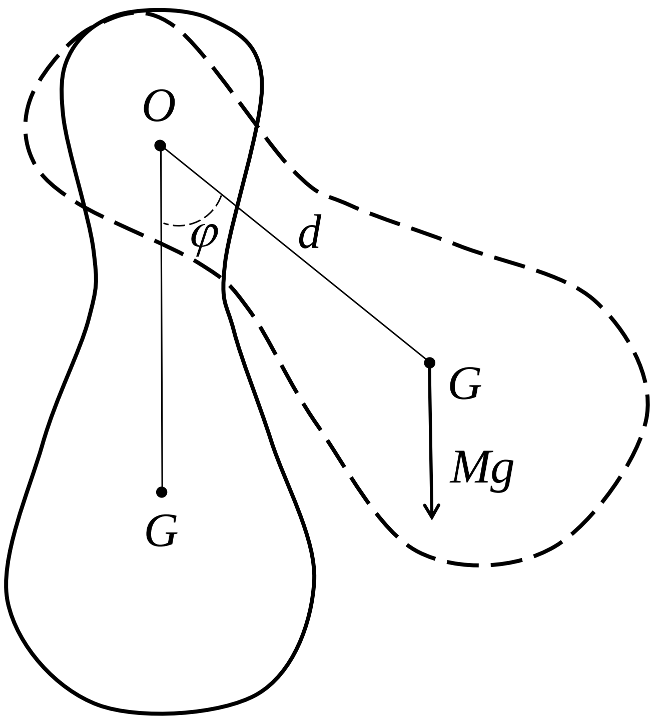
En el caso de un sólido rígido, el punto de aplicación del peso es el c.d.m. Este peso da lugar a un momento respecto al eje de giro:

$$M_O = -Mgd\,\mathrm{sen}\varphi = I_O \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mgd}{I_O}\mathrm{sen}\varphi \approx \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mgd}{I_O}\varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_O}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_G + Md^2}{Mgd}}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)}$$



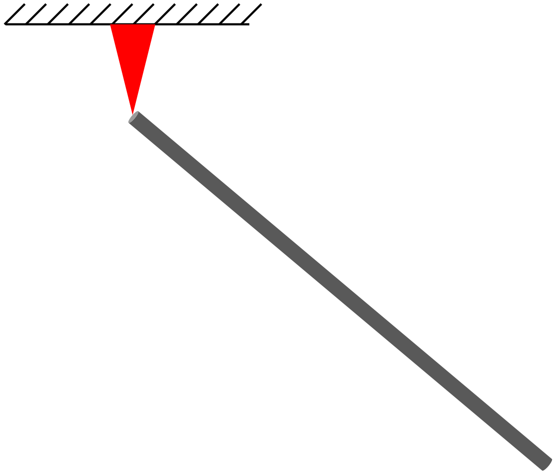
Ejemplo

Barra delgada de masa M y longitud L que oscila alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos.

8. PÉNDULO SIMPLE Y PÉNDULO FÍSICO

Ejemplo

Calcular el periodo del movimiento de una barra delgada de masa M y longitud L oscilando alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos. ¿Qué sucede si la barra tiene idénticas dimensiones y pesa el doble?

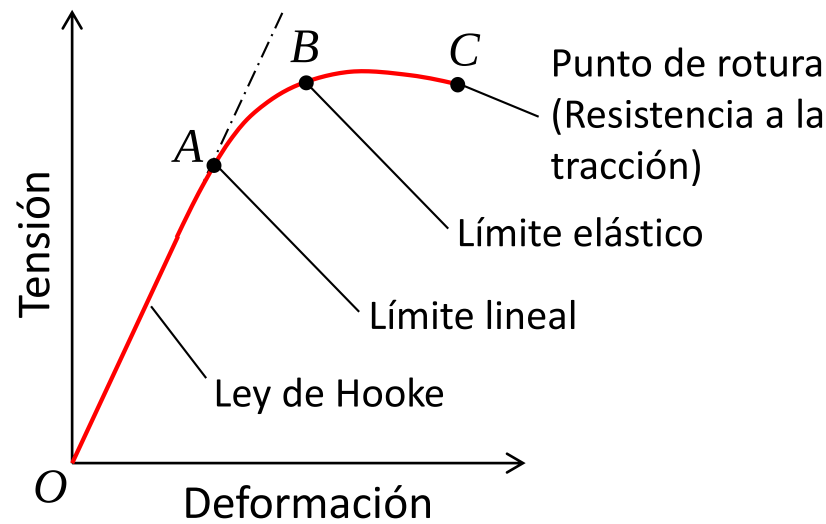


9. ELASTICIDAD EN SÓLIDOS

Elasticidad por tracción/compresión

$$\text{Tensión} = \frac{F}{A}$$

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta L}{L}$$



Módulo de Young

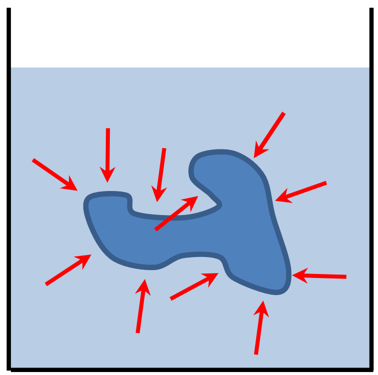
Se define como el cociente entre la tensión y la deformación en la zona lineal del diagrama tensión-deformación:

$$\mathrm{Y} = \frac{\text{Tensión}}{\text{Deformación}} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \qquad [Y] = N/m^2$$

- O-A Ley de Hooke: MAS
- A-B Zona elástica no lineal
- B-C Zona plástica

9. ELASTICIDAD EN SÓLIDOS

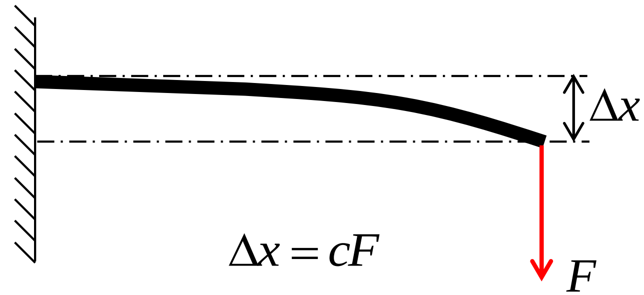
Compresibilidad



$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{K}$$

K: Módulo de compresibilidad

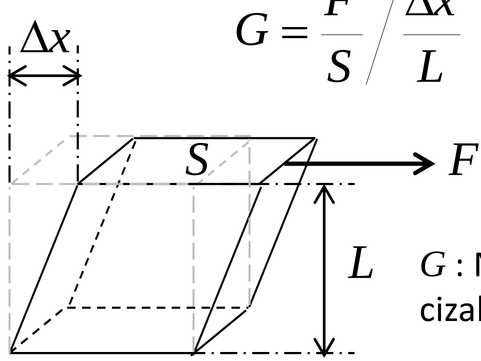
Elasticidad por flexión



$$\Delta x = cF$$

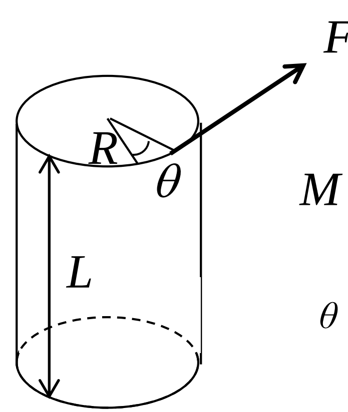
Elasticidad por cizalla

$$G = \frac{F}{S} \bigg/ \frac{\Delta x}{L}$$



G : Módulo de cizalla

Elasticidad por torsión



$$M = \frac{\pi G R^4}{2L}\theta$$

θ en radianes

9. ELASTICIDAD EN SÓLIDOS

Ejemplo

Una barra en forma de cilindro de radio $R = 3\ mm$ y longitud $L = 2\ m$ está sujeta por un extremo, mientras que por el extremo libre se le aplica una fuerza de forma que se produce una cizalla (ver figura). La masa del bloque que cuelga es de $m = 10\ kg$ y produce un giro de $\beta = 7$ grados sobre la cara libre. ¿Cuál es el módulo de torsión del material que compone la barra?