CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA:

Caps. 2 y 3 del Tipler–Mosca, vol. 1, 5ª ed.
Caps. 2, 4 y 6 del Serway–Jewett, vol. 1, 7ª ed.
Caps. 3 y 4 del Gettys-Frederick-Keller.

1. INTRODUCCIÓN

Mecánica: La mecánica es la rama de la física que estudia y analiza el movimiento de los cuerpos y su evolución en el tiempo, bajo la acción de fuerzas

Cinemática: es la rama de la mecánica que estudia las leyes del movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que lo producen, limitándose, esencialmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo

1. INTRODUCCIÓN

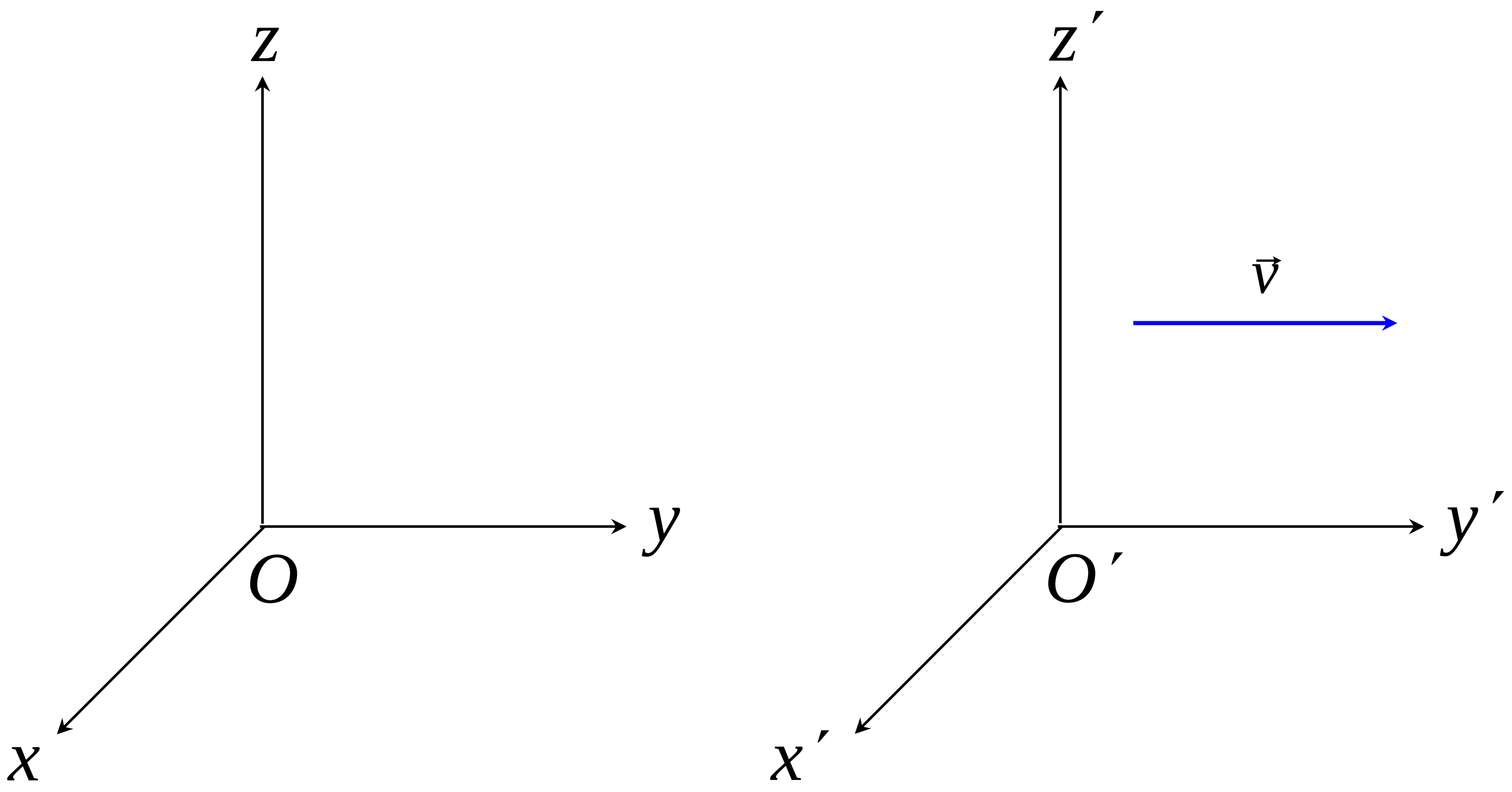
$\boxed{\text{Objetos} \longrightarrow \text{Masas puntuales}}$

… de ahí el título del capítulo
“Cinemática de la Partícula”

2. REPOSO Y MOVIMIENTO. SISTEMAS DE REFERENCIA

Son conceptos relativos (dependen del sistema de referencia).

Un sistema de referencia es un objeto al que se asocia unos ejes coordenados y un origen de tiempos.

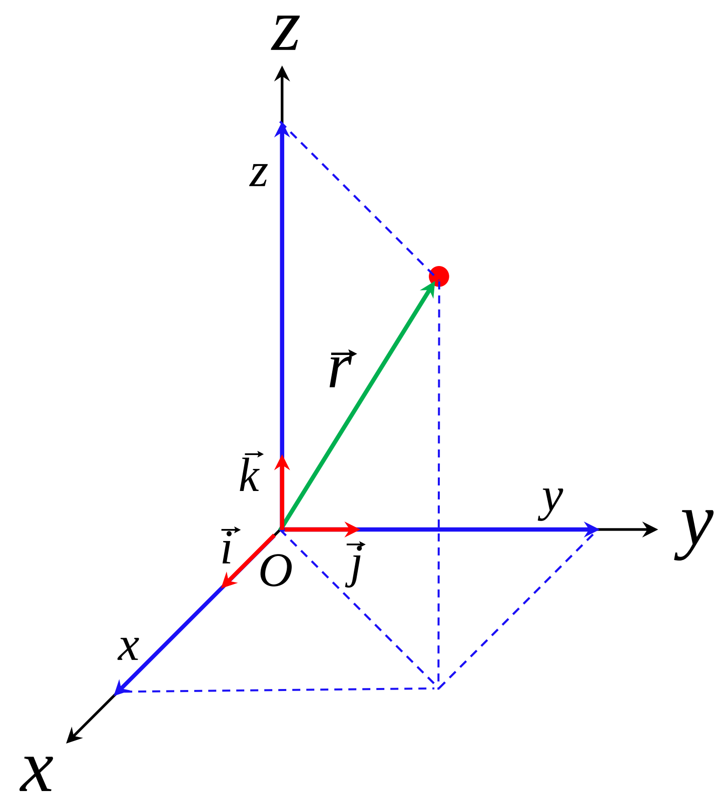


3. VECTORES POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

<u>Posición:</u> Lugar del espacio donde se encuentra un objeto en un instante dado. Se describe por las tres coordenadas del punto del espacio donde se encuentra la partícula. Matemáticamente se describe por el vector $\vec{r}$:

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}}$$

Se llaman $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a los tres vectores unitarios en las direcciones x, y, z respectivamente.



La distancia del origen a la posición de la partícula es:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

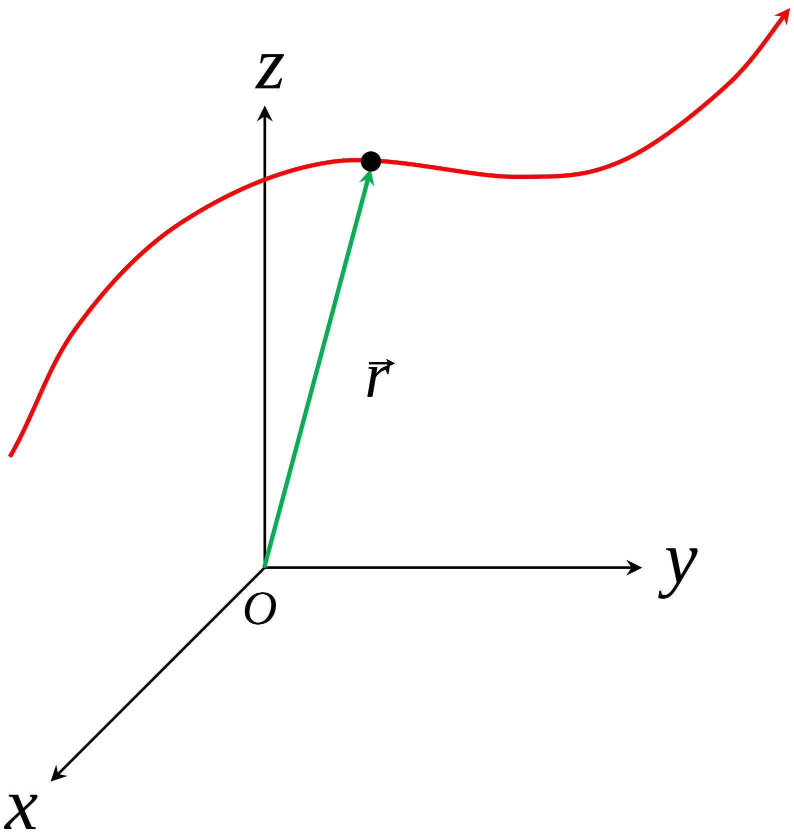
Dimensiones del vector posición: $[r] = \mathrm{L}$
Unidades en el S. I. : metro

3. VECTORES POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

<u>Trayectoria:</u> Es el lugar geométrico de los posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento. Depende del sistema de referencia y su expresión se obtiene a partir del vector posición, eliminando el tiempo.

Movimiento en el plano *x-y:* $\boxed{y = f(x)}$

Movimiento en general: $\boxed{\begin{array}{l} y = f(x) \\ z = f(x) \end{array}}$



Problema

El vector de posición de una partícula, en coordenadas cartesianas, viene dado por la siguiente expresión:

$$\vec{r}(t) = \left(3t^2 + 1\right)\vec{i} + (t-2)\,\vec{j} + (\ln t)\,\vec{k}$$

¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?

3. VECTORES POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Velocidad (media)

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad (instantánea)

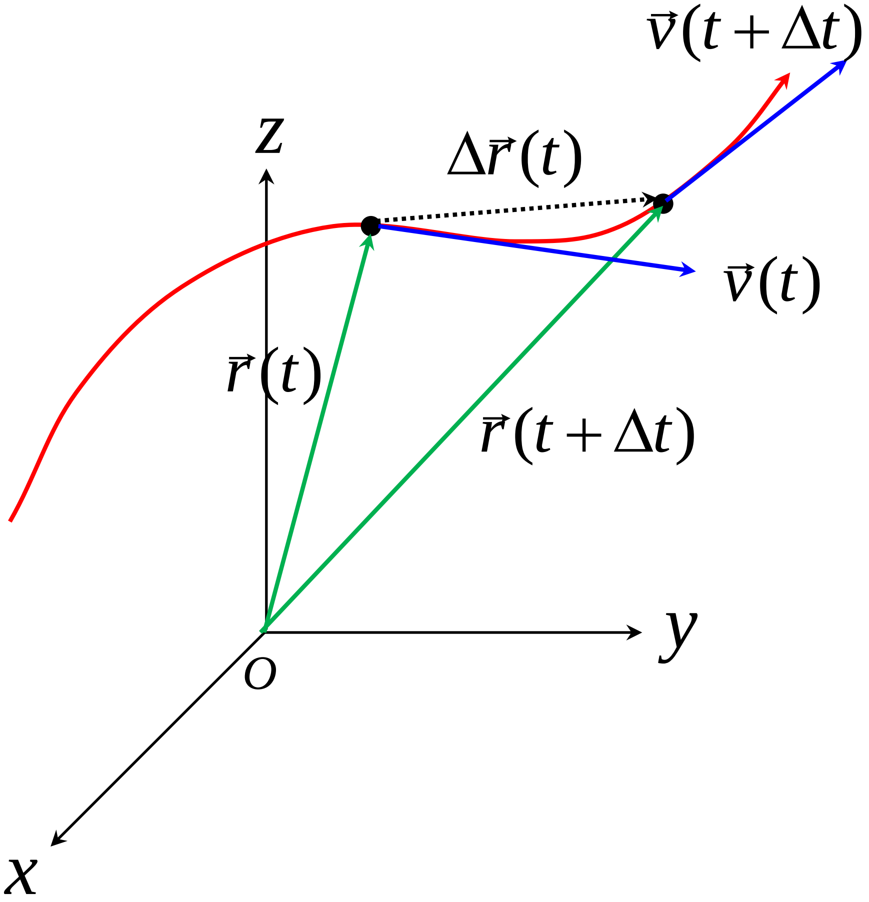
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Y en componentes cartesianas:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$\Delta \vec{r}(t)$: Vector desplazamiento



3. VECTORES POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Problema

Un automóvil que se mueve a una velocidad constante realiza el siguiente trayecto: se desplaza hacia el Norte 15 km, 6 km hacia el Oeste, 5 km hacia el Sur, 4 km hacia el Sureste y 7 km hacia el Sudoeste. Si tarda 30 minutos en efectuar el recorrido determinar:

a) Magnitud y dirección del vector desplazamiento al final del recorrido.
b) Módulo y dirección del vector velocidad media.
c) Vector velocidad en cada uno de los tramos.

3. VECTORES POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Aceleración (media)

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Aceleración (instantánea)

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

Y en componentes cartesianas:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} =$$

$$= \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

La aceleración se puede expresar como suma de dos componentes, una tangente a la trayectoria y otra perpendicular o normal

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v(t)\,\vec{u}_t\right] = \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_t + v(t)\frac{d\vec{u}_t}{dt} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n}$$

<u>aceleración tangencial</u>

Da cuenta del cambio en magnitud del vector velocidad

$$\boxed{a_t = \frac{dv(t)}{dt}}$$

<u>aceleración normal</u>

Da cuenta del cambio en dirección del vector velocidad

$$\boxed{a_n = \left|v(t)\frac{d\vec{u}_t}{dt}\right| = \frac{v^2}{\rho}}$$

Dimensiones de aceleración: $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$

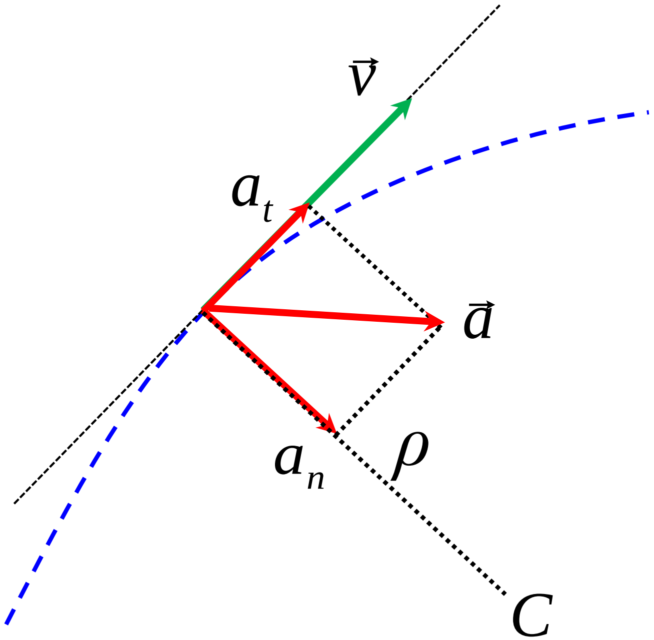
Unidades en el S. I. : metro/segundo^2

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

$$\boxed{\vec{a}(t)=a_t(t)\vec{u}_t+a_n(t)\vec{u}_n=\vec{a}_t(t)+\vec{a}_n(t)}$$

$$\Downarrow \quad \left(\vec{a}_t \perp \vec{a}_n\right)$$

$$\boxed{a^2=a_t^{\,2}+a_n^{\,2}}$$



- La aceleración tangencial $\vec{a}_t(t)$ siempre apunta en dirección tangente a la trayectoria
- La aceleración normal $\vec{a}_n(t)$ siempre apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria
- El vector aceleración $\vec{a}(t)$ siempre apunta hacia el lado interior (cóncavo) de la trayectoria

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

Problema

Una partícula parte del reposo y se mueve sobre la curva de ecuaciones:

$$\vec{r}(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\vec{i} + R\cos(\omega t)\,\vec{j}$$

siendo R y ω constantes. Hallar:

a) Los vectores velocidad y aceleración.
b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.
c) El radio de curvatura.

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

Problema

Una partícula parte del reposo y se mueve sobre la curva de ecuaciones:

$$\vec{r}(t) = R[\omega t + \mathrm{sen}(\omega t)]\,\vec{i} + R[1 + \cos(\omega t)]\,\vec{j}$$

siendo R y ω constantes. Hallar:

a) Los vectores velocidad y aceleración.
b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.
c) El radio de curvatura.

Datos: $\begin{cases} \mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$

5. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Ecuaciones horarias del movimiento

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

En formulación integral:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \int g(x)dx + C$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt + \vec{C} = \left(\int a_x(t)\,dt + C_x\right)\vec{i} + \left(\int a_y(t)\,dt + C_y\right)\vec{j} + \left(\int a_z(t)\,dt + C_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt + \vec{C} = \left(\int v_x(t)\,dt + C_x\right)\vec{i} + \left(\int v_y(t)\,dt + C_y\right)\vec{j} + \left(\int v_z(t)\,dt + C_z\right)\vec{k}$$

6. ALGUNOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

Movimiento rectilíneo uniforme (movimiento en 1 dimensión)

$$a_x = a = 0$$

$$v_x = v = v_0 = \mathrm{cte}$$

$$x = x_0 + v_0 t$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (movimiento en 1 dimensión)

$$a_x = a = \mathrm{cte}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{array}\right\} v_x^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Movimiento con aceleración constante (más de una dimensión)

$$\vec{a} = \mathrm{cte}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

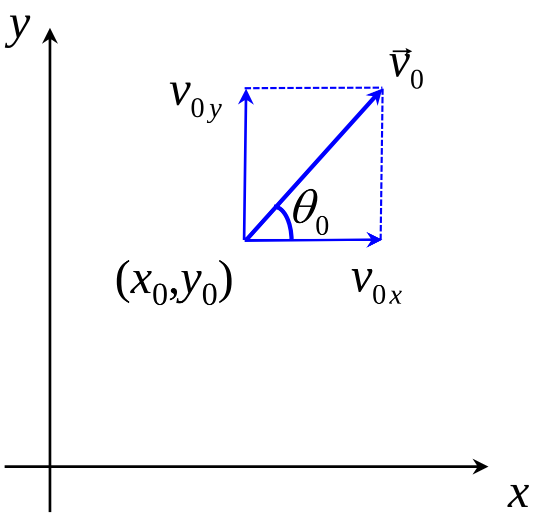
6. ALGUNOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

Movimiento de proyectiles (2-DIM, movimiento en un plano) (despreciando la resistencia con el aire)

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} - gt = v_{0y} - 9.8t$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}\, t$$
$$y(t) = y_0 + v_{0y}\, t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

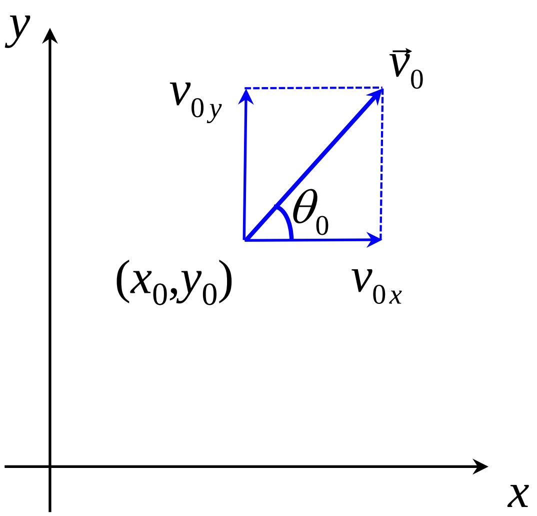


Según el eje x, el movimiento es rectilíneo uniforme.
Según el eje y , el movimiento es rectilíneo uniformemente acelerado.
Las componentes x e y de posición, velocidad y aceleración son independientes!!!

6. ALGUNOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

Para obtener la ecuación de la trayectoria $y(x)$ eliminamos el tiempo de las ecuaciones anteriores para la posición:

Suponiendo $(x_0,y_0)= (0,0)$:



$$x = v_{0x}\, t \Rightarrow t = x / v_{0x}$$

$$y(x) = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2$$

$$\boxed{y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2}$$

Ecuación tipo $y(x)=ax+bx^2$ que se corresponde con una parábola

6. ALGUNOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

Problema

Un helicóptero vuela a una altura de 150 metros a una velocidad constante de 30 m/s. En un momento dado deja caer un objeto. Despreciando la resistencia con el aire, hallar:

a) El tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo.
b) La posición del objeto al impactar con el suelo.
c) La posición del helicóptero respecto al objeto en el instante del impacto.
d) La velocidad instantánea del objeto en cualquier instante.
e) La trayectoria que sigue el objeto en su caída.
f) Aceleración normal y tangencial en cualquier punto de la trayectoria.
g) El radio de curvatura a los 4 segundos de iniciar la caída.
h) La velocidad del objeto justo antes del momento de impacto.

6. ALGUNOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

Problema

Desde lo alto de una torre de altura h se deja caer un objeto. ¿A qué distancia del suelo su velocidad será igual a la mitad de la que tiene al llegar al suelo?

Problema

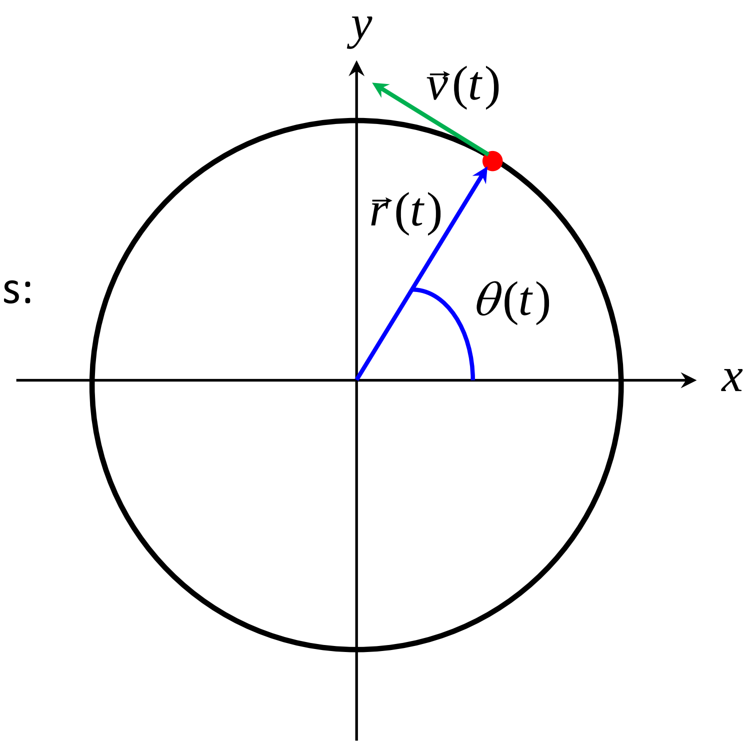
Un móvil se mueve sobre una recta con movimiento uniformemente acelerado. En los instantes 1, 2 y 3 s las posiciones son 70, 90 y 100 m respectivamente. Calcular:

a) La posición inicial.
b) La velocidad inicial.
c) La aceleración.
d) En qué instante pasa por el origen.

7. MOVIMIENTO CIRCULAR

Es todo aquel movimiento cuya trayectoria es una circunferencia: $[x(t)-x_0]^2+[y(t)-y_0]^2=R^2$

Para describirlo se definen estas nuevas magnitudes:



Posición angular: $\theta(t)$

Velocidad angular: $\omega=\dfrac{d\theta(t)}{dt}$

Aceleración angular: $\alpha=\dfrac{d\omega(t)}{dt}$

Movimiento circular uniforme

$$\alpha=0$$
$$\omega=\mathrm{cte}$$
$$\theta=\theta_0+\omega t$$

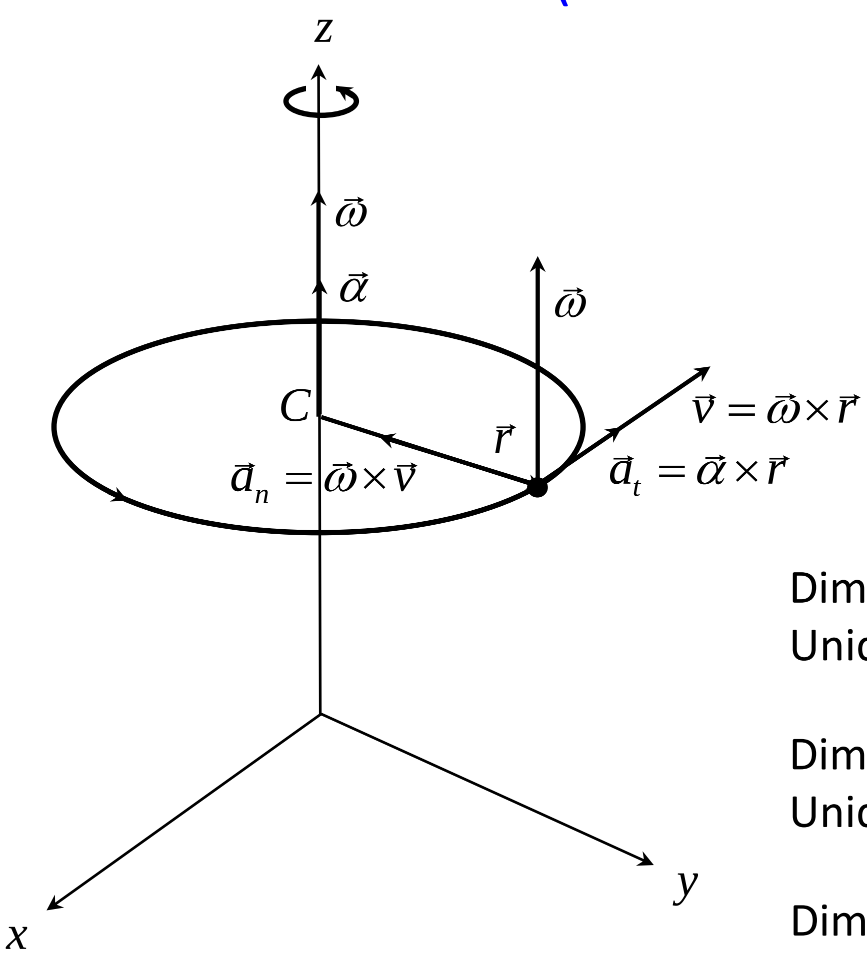
Movimiento circular uniformemente acelerado

$$\alpha=\mathrm{cte}$$
$$\omega=\omega_0+\alpha t$$
$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

La analogía con las ecuaciones para el movimiento rectilíneo es clara.

7. MOVIMIENTO CIRCULAR

(VISTO EN PERSPECTIVA)



Relación entre magnitudes lineales y angulares

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Dimensiones de posición angular: $[\theta] = \text{adimens.}$
Unidades en el S. I. : radián (rad).

Dimensiones de velocidad angular: $[\omega] = \mathrm{T}^{-1}$
Unidades en el S. I. : radián/segundo (rad/s).

Dimensiones de aceleración angular: $[\alpha] = \mathrm{T}^{-2}$
Unidades en el S. I. : radián/segundo^2 (rad/s^2).

7. MOVIMIENTO CIRCULAR

Problema

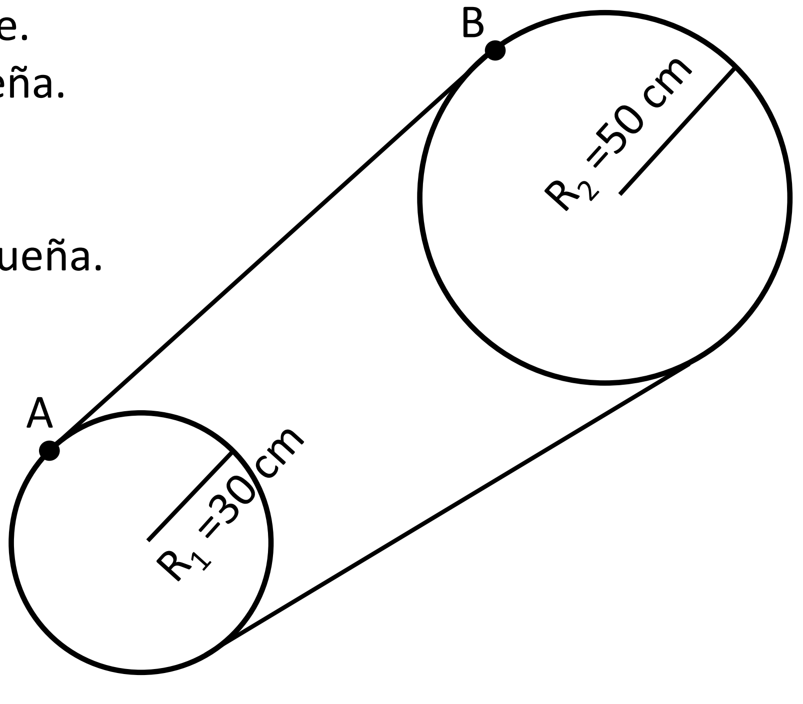
Un disco gira alrededor de su eje vertical de simetría en el sentido de las agujas del reloj con velocidad angular ω_0 constante. En un cierto instante actúa un momento que le ocasiona una aceleración angular constante de 300 r.p.m. cada segundo, que se opone al movimiento. El momento actúa durante 9 s, al final de los cuales la velocidad angular del disco es de 1200 r.p.m. en sentido contrario al inicial. Determinar ω_0 y el número total de revoluciones que da el disco durante el tiempo que actúa el momento.

7. MOVIMIENTO CIRCULAR

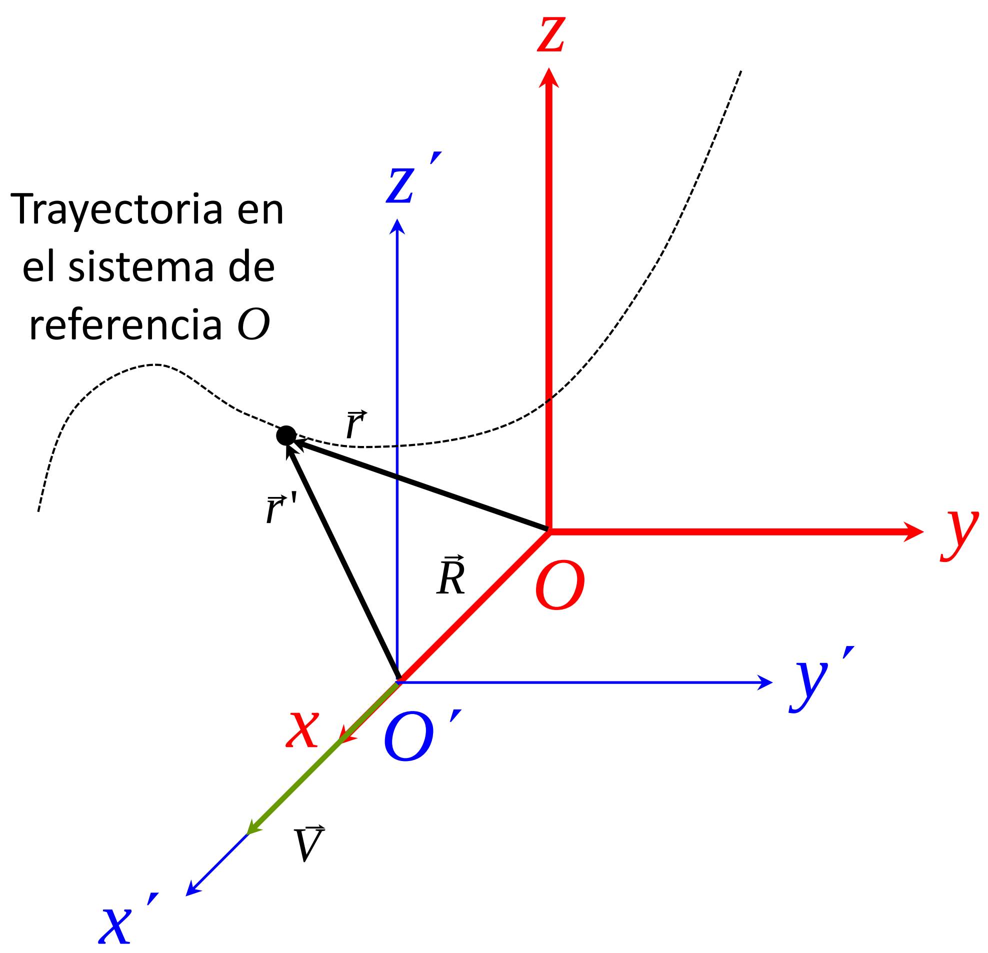
Problema

En el sistema mostrado en la figura, las dos ruedas están unidas por una correa. Inicialmente las ruedas se encuentran en reposo. En un instante determinado la rueda grande empieza a moverse con una aceleración angular α_B = 1 rad/s^2. Determinar pata t=2 s:

a) Velocidad angular de la rueda grande.
b) Velocidad angular de la rueda pequeña.
c) Velocidad lineal del punto A.
d) Velocidad lineal del punto B.
e) Aceleración angular de la rueda pequeña.



8. VELOCIDAD RELATIVA



Transformación de Galileo

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}$$

$$t = t'$$

$$\Downarrow$$

Válido si $\vec{V} << c$

8. VELOCIDAD RELATIVA

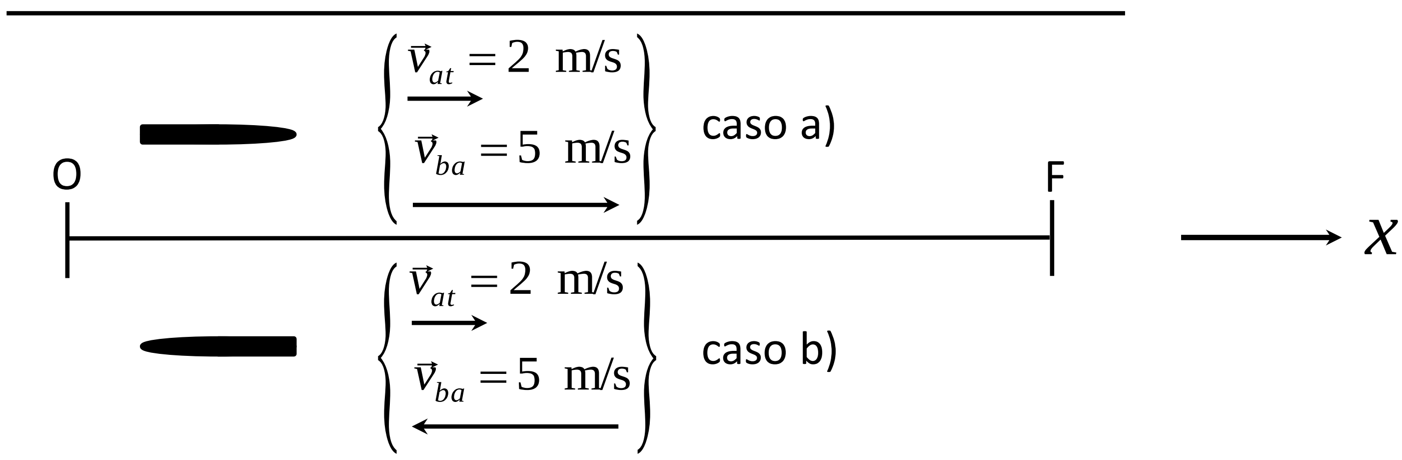
Problema

Un río fluye con velocidad $v_{rt} = 2$ m/s respecto de tierra.

a) ¿Qué velocidad respecto de tierra, v_{bt} ,tendrá un bote que se dirige aguas abajo a una velocidad $v_{br} = 5$ m/s relativa al agua?

b) ¿ Qué velocidad respecto de tierra , v_{bt} , tendrá el mismo bote si se dirige aguas arriba con la misma velocidad respecto al agua que en el apartado a)?

c) Si la velocidad relativa del bote respecto al agua es siempre $v_{br} = 5$ m/s, ¿cuánto tiempo tardará el bote en ir del punto O hasta el punto F y volver, sabiendo que están a 200 metros de distancia?



8. VELOCIDAD RELATIVA

Problema

Un nadador se propone cruzar perpendicularmente a nado un río de 100 metros de anchura. Parte del punto A con una velocidad respecto al agua de 1 m/s. Al llegar a la otra orilla, se da cuenta de que se ha desviado respecto a la perpendicular 50 metros en la dirección de la corriente (punto C).

a) ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?
b) ¿ Cuál es la velocidad del nadador respecto a la orilla?
c) ¿En qué dirección debería nadar para llegar justamente al punto B?