

# Hipótesis de Bohr. Cuantización del momento angular

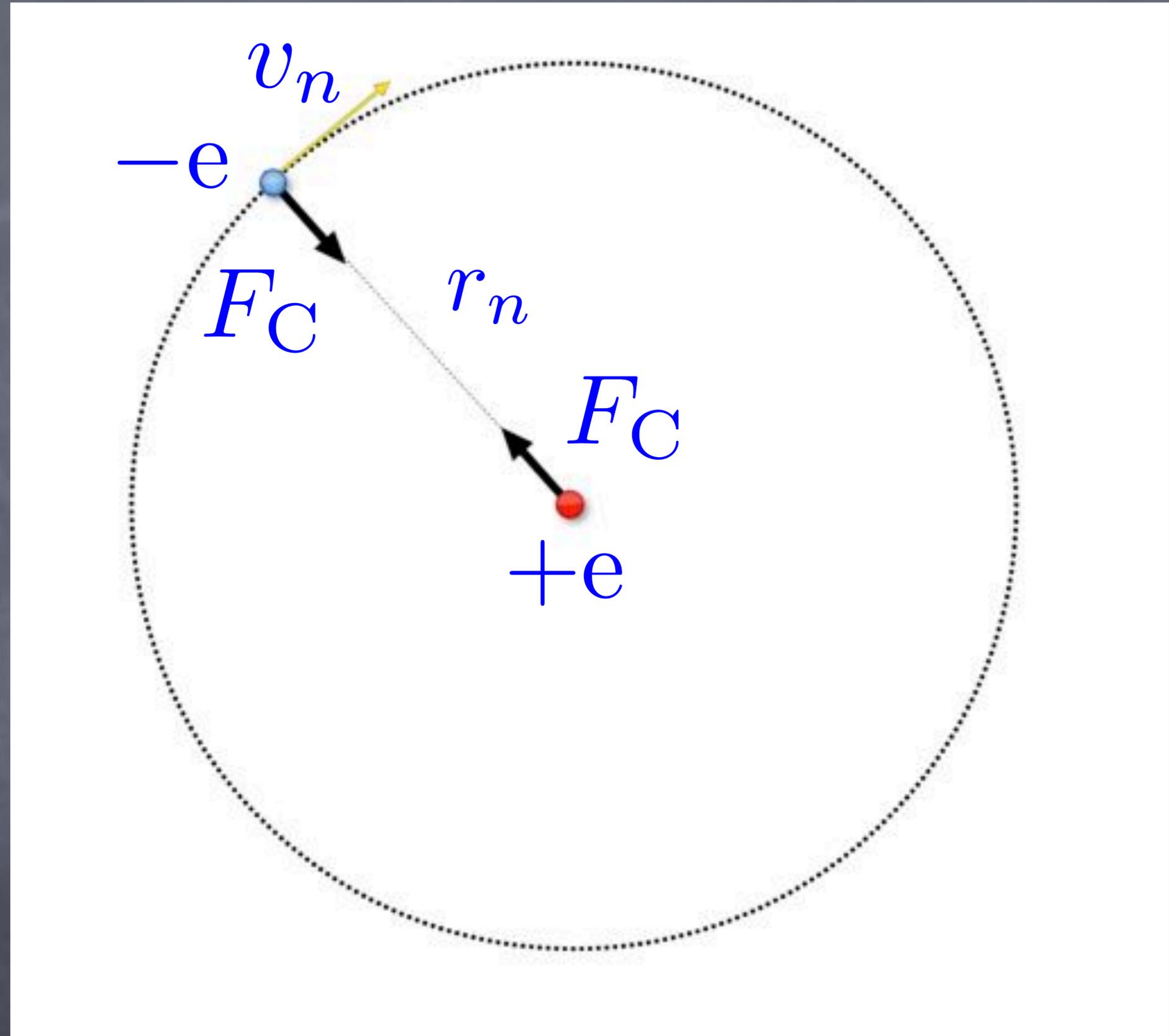
$$mv_n \times r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

# Cuantización del momento angular

Condición, adicional,  
que relaciona el radio  
con la velocidad  
permitida para el  
mismo.

$$mv_n \times r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

$$v_n = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}}$$



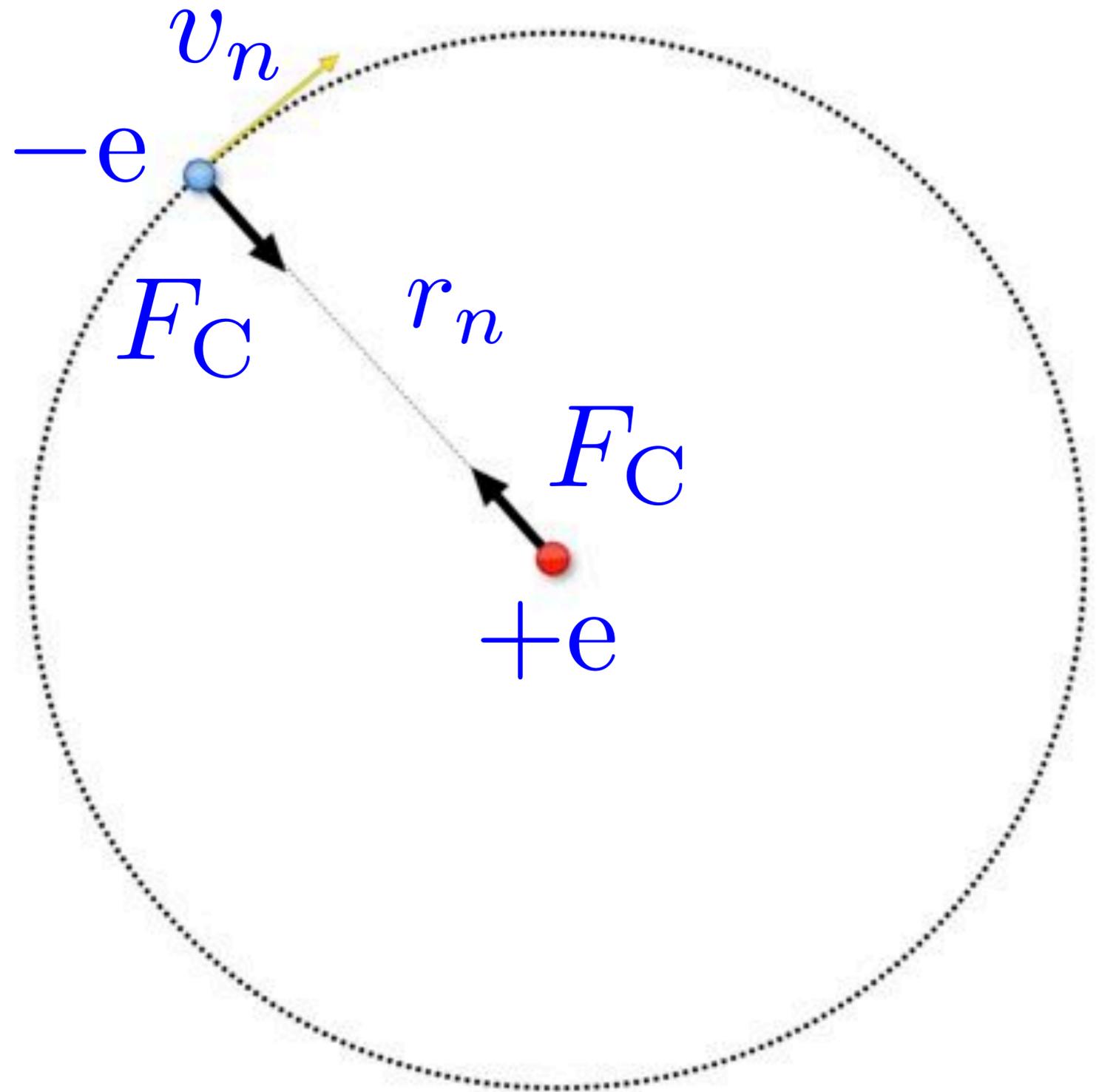
# Cuantización de la energía

$$r_n = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

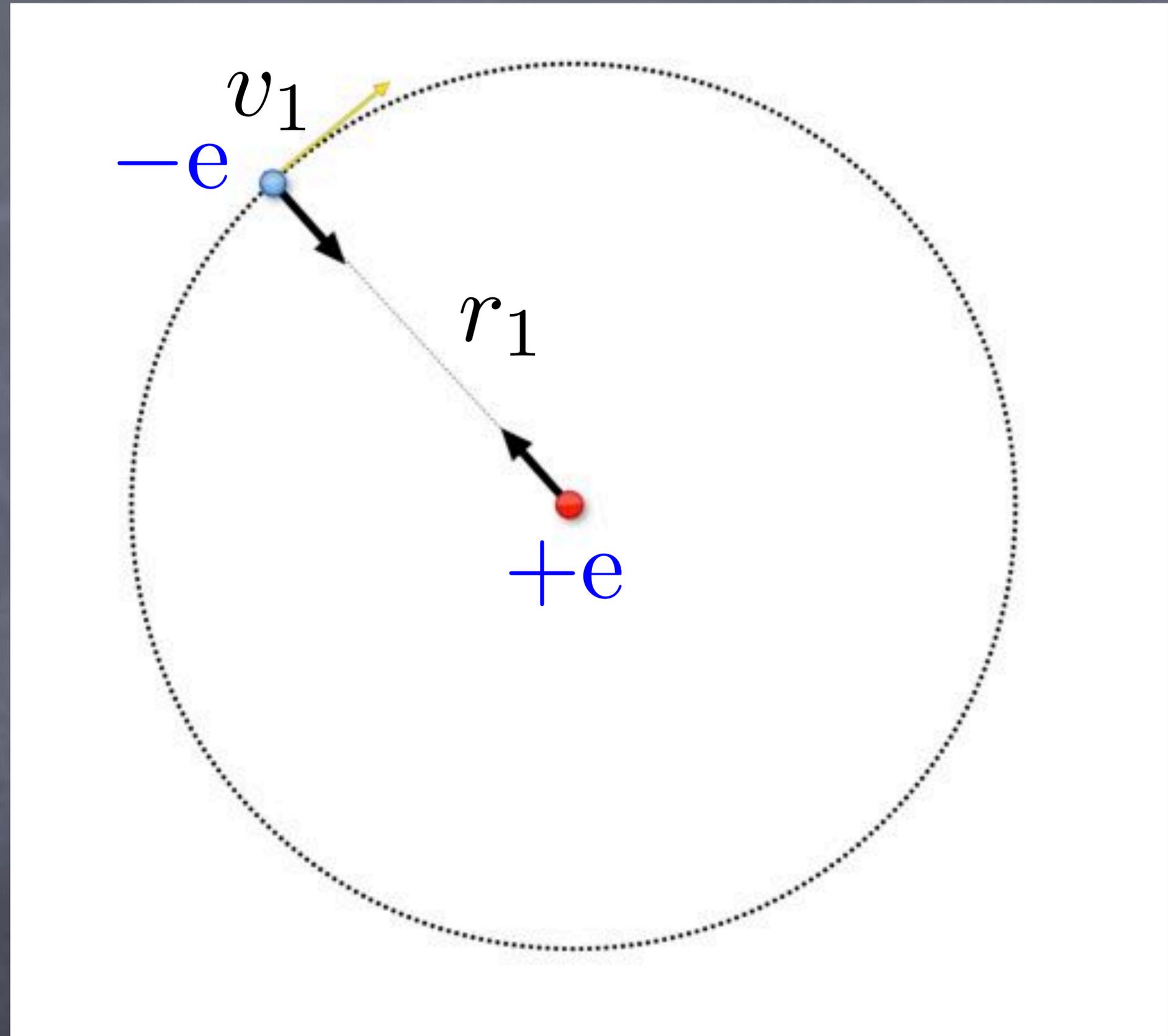
$$E_n = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2}$$



# Estado fundamental

$$r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2}$$

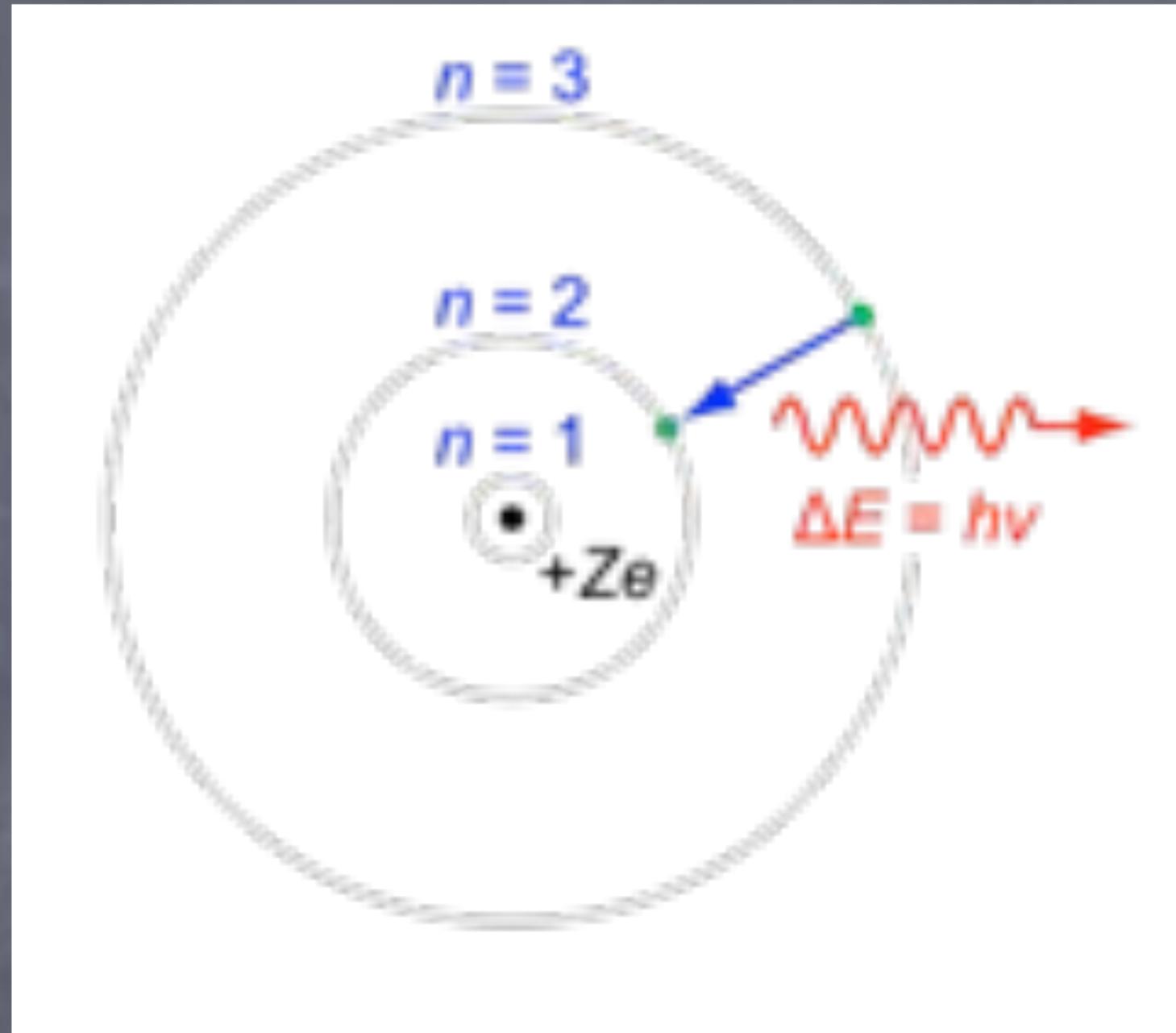
$$E_1 = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0 h^2}$$



¡Todos los átomos de hidrógeno son iguales!

# Átomo de Bohr.

Las órbitas están cuantizadas. El momento orbital debe ser un múltiplo de la constante de Planck.



# Modelo de emisión del átomo de Bohr

$$E_i - E_j = h\nu$$

$$E_i = -\frac{me^4}{8\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n_i^2}$$

$$E_f = -\frac{me^4}{8\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n_f^2}$$

$$\nu_{if} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

# Modelo de emisión del átomo de Bohr

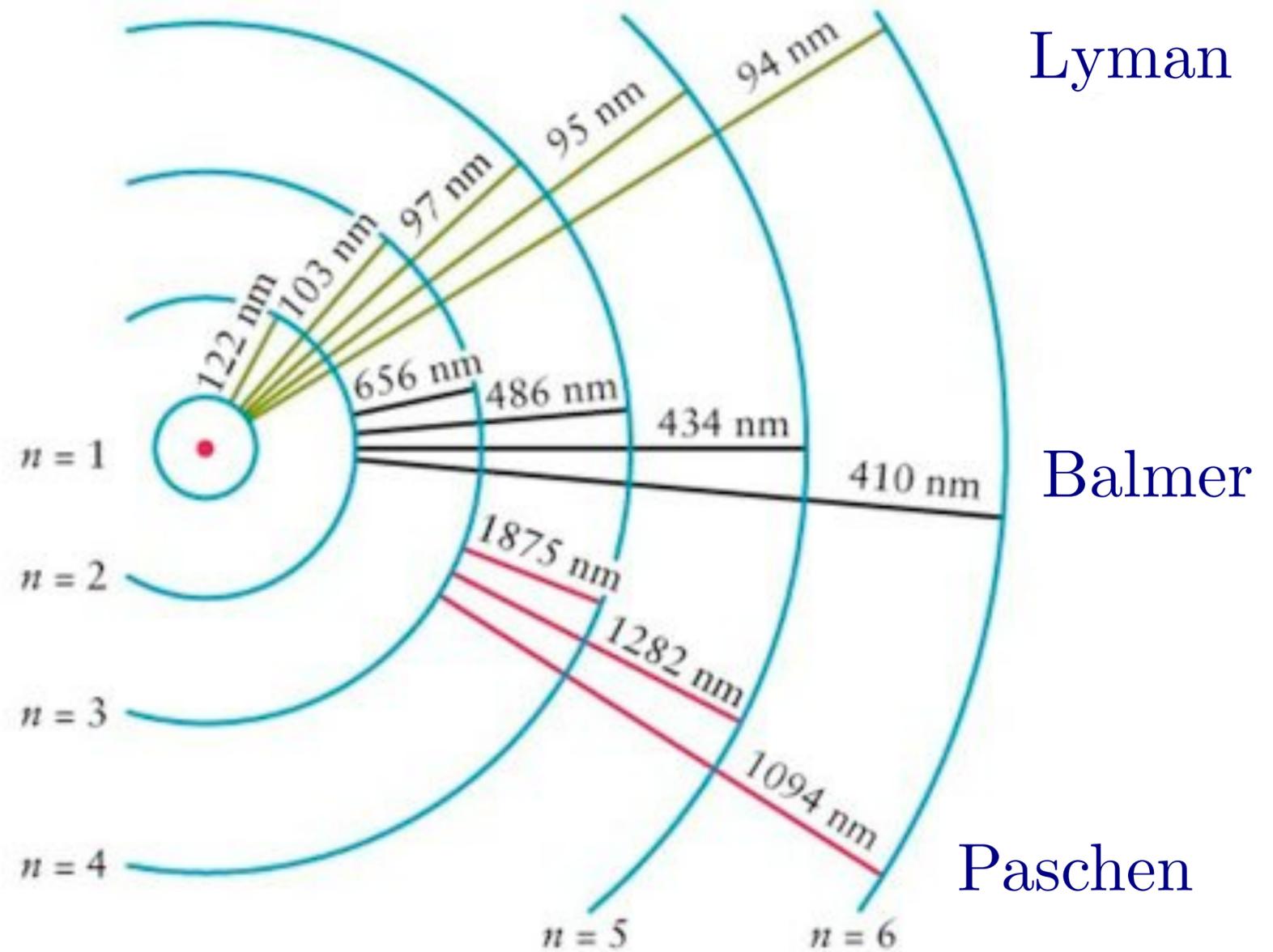
$$\nu_{if} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$
$$\nu = c/\lambda$$

$$\frac{1}{\lambda_{if}} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 c h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

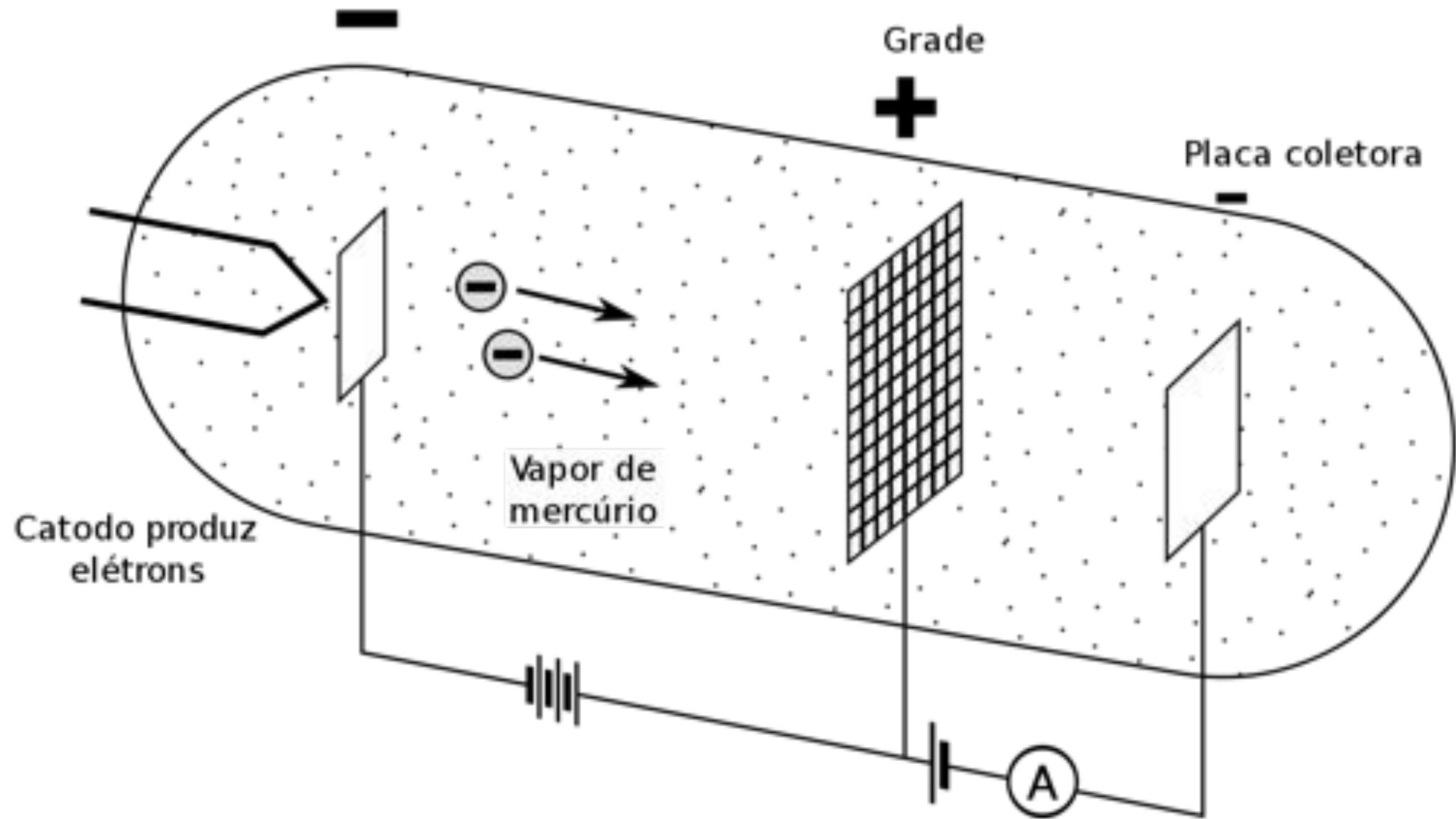
$$\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 c h^3} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} = R$$

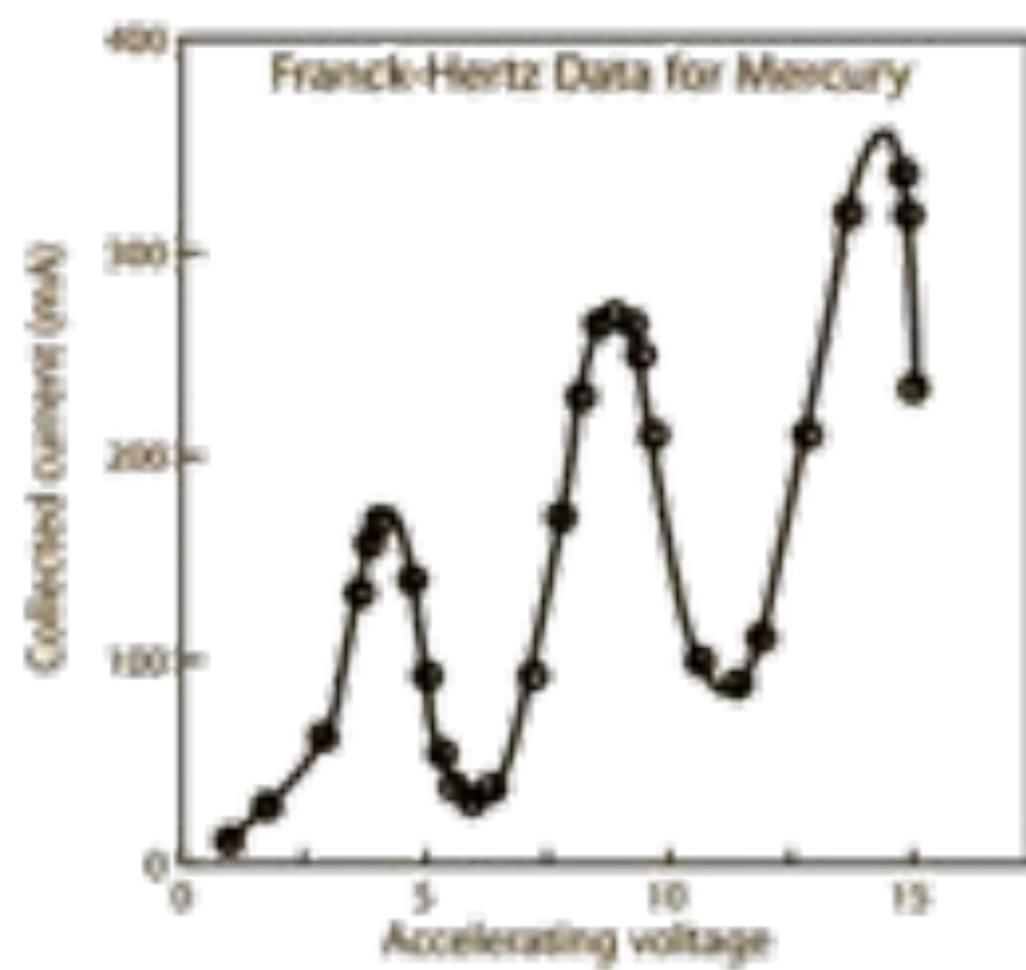
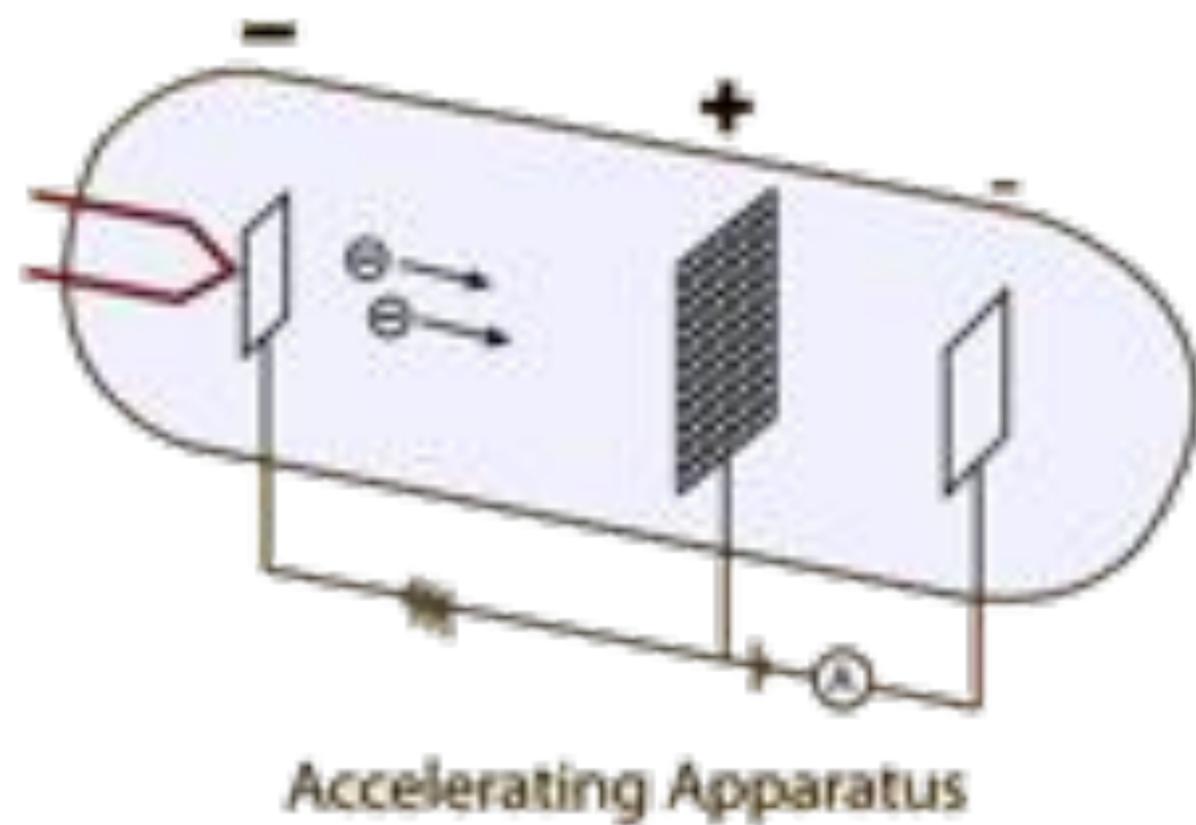
# Átomo de Bohr.

Las líneas del espectro del hidrógeno se obtienen cuando un electrón salta de una órbita exterior a otra más interior, ambas cuantizadas.



$$\frac{1}{\lambda_{if}} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 c h^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$





# Experimento de Franck-Hertz

# Relación de De Broglie

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp [i (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

Cuadrivector vector de ondas. Fase invariante

$$k^\mu = \left\{ \begin{array}{c} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \omega c^{-1} \end{array} \right\}, \quad x^\mu = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ ct \end{array} \right\}$$

# Relación Einstein y Planck. Fotones

$$E = h\nu$$

$$\mathbf{p} = h \frac{\nu}{c} \mathbf{u}$$

Relación entre cuadrivectores

$$\left\{ \begin{array}{c} c\hbar k_x \\ c\hbar k_y \\ c\hbar k_z \\ \hbar\omega \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} c(h\nu/c)u_x \\ c(h\nu/c)u_y \\ c(h\nu/c)u_z \\ h\nu \end{array} \right\},$$

# Einstein y Planck

Dualidad onda corpúsculo en fotones.

En ciertas circunstancias un fotón se comporta como una partícula y en otras circunstancias el mismo fotón se comporta como una onda.

# De Broglie. Electrones

$$\begin{pmatrix} c\hbar k_x \\ c\hbar k_y \\ c\hbar k_z \\ \hbar\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma_v m v_x \\ c\gamma_v m v_y \\ c\gamma_v m v_z \\ \gamma_v m c^2 \end{pmatrix} .$$

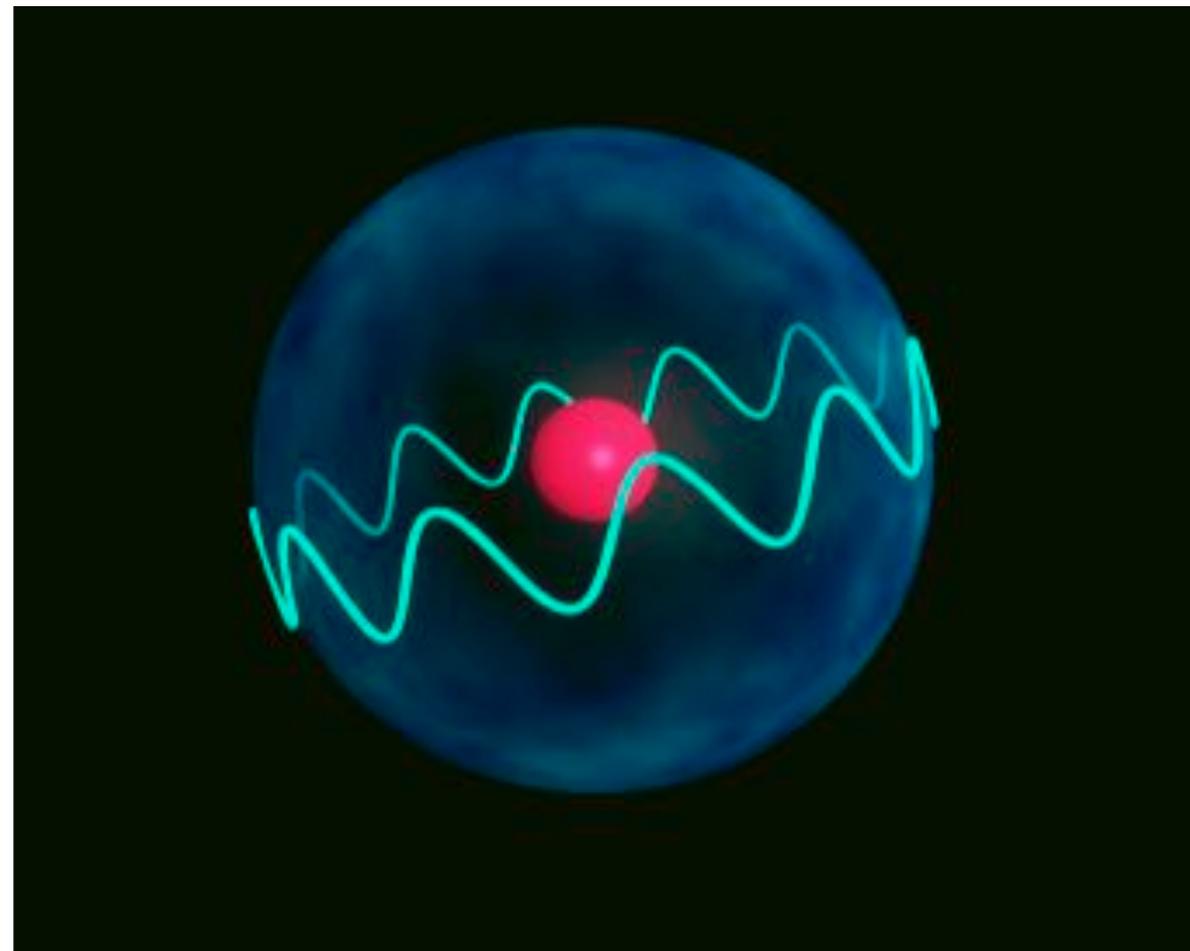
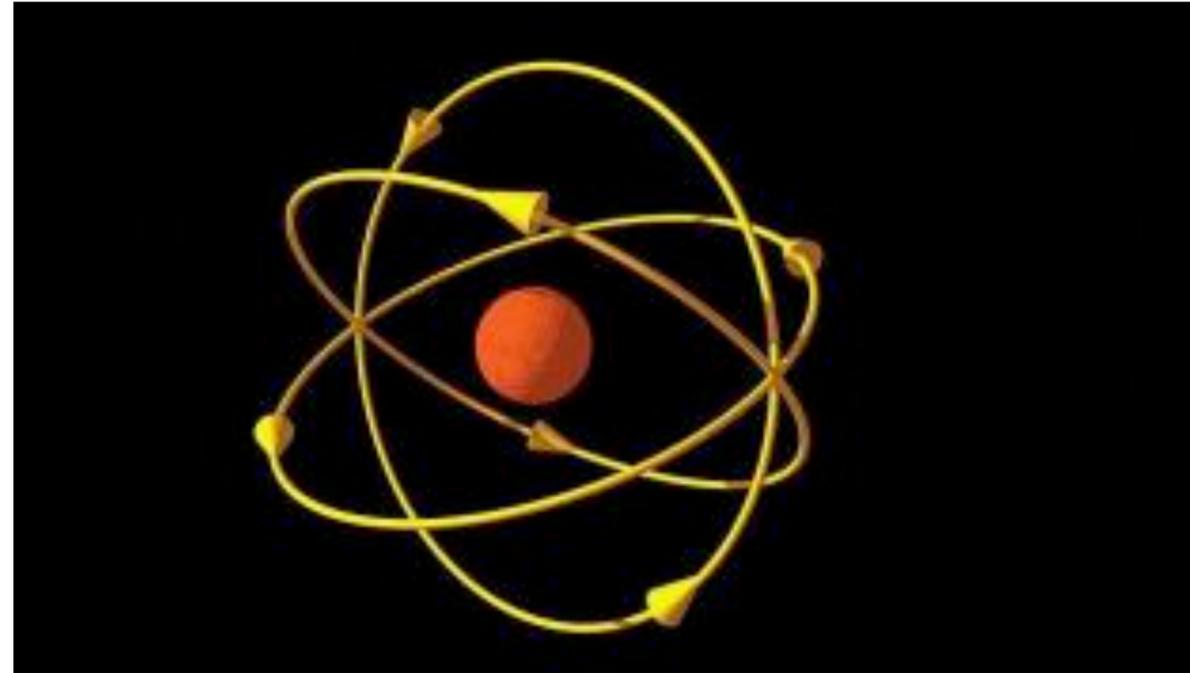
$$\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} = \gamma_v m \mathbf{v}$$

$$\hbar\omega = E = \gamma_v m c^2 .$$

# De Broglie

Dualidad onda  
corpúsculo en  
electrones.

En ciertas  
circunstancias un  
electrón se  
comporta como  
una partícula y en  
otras  
circunstancias el  
mismo electrón  
se comporta como  
una onda.



$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

## Postulado del átomo de Bohr.

Que un electrón se mueva en una órbita cuyo momento angular está cuantizado es equivalente a que el número de longitudes de onda de de Broglie de dicho electrón es un número entero.

Dualidad  
onda  
corpúsculo en  
electrones.

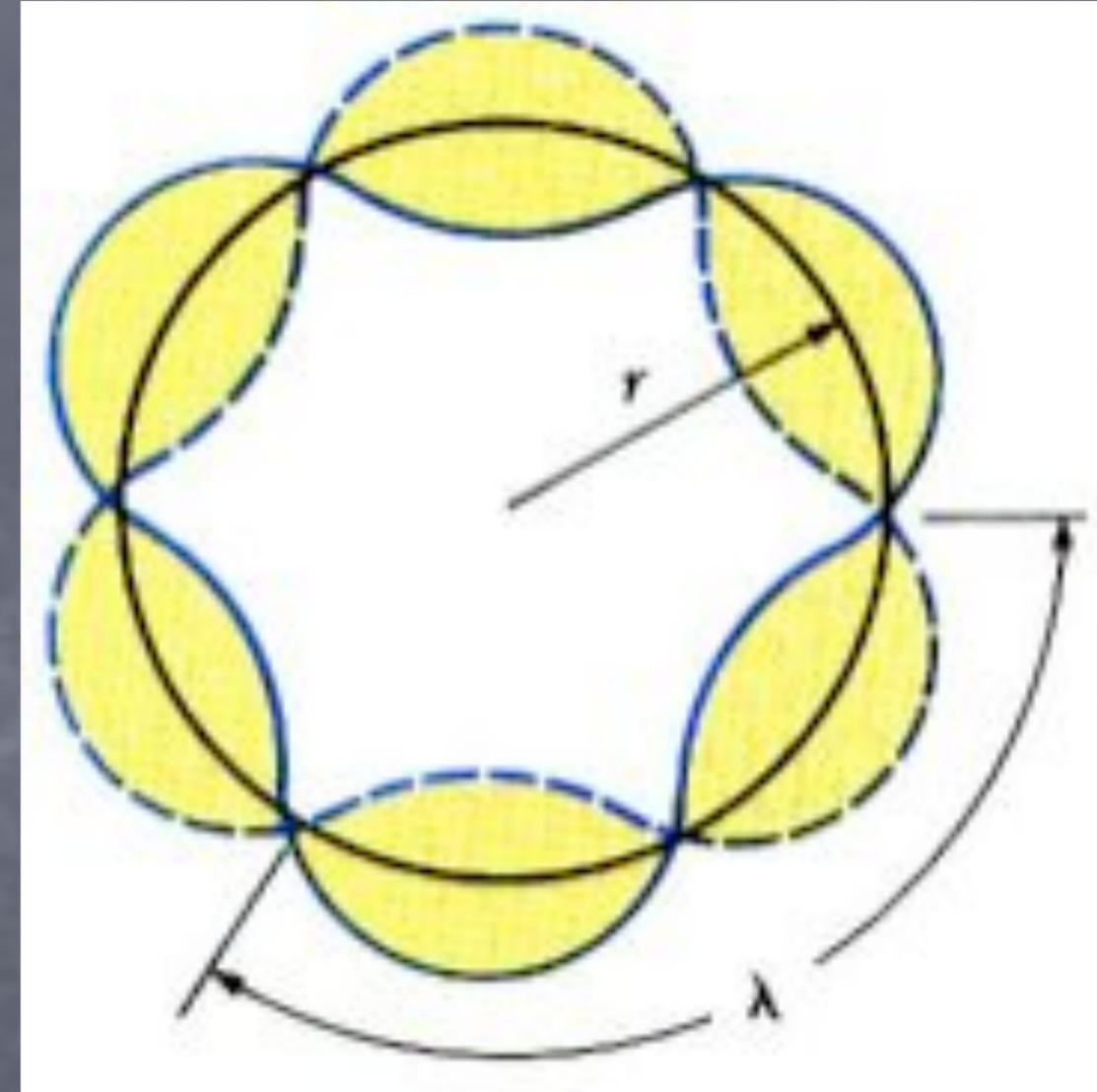
Justificación  
de la ley de  
cuantización  
de Bohr.

$$m_e v_n \times r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

$$2\pi m_e v_n \times r_n = nh$$

$$\frac{2\pi r_n}{n} = \frac{h}{m_e v_n}$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n}$$



# Ecuación de ondas de Schrödinger

Wien. Conferencia

Debye. Ecuación de ondas

Schrödinger. Ecuación

# Función de ondas y ecuación de ondas materiales de Schrödinger

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r}) \right]$$

Física clásica

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

# Ecuación de ondas de Schrödinger

Espectro del hidrógeno.

$$H\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

Esta ecuación permite obtener el espectro del hidrógeno.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) + V(r, t)\psi(r, t)$$

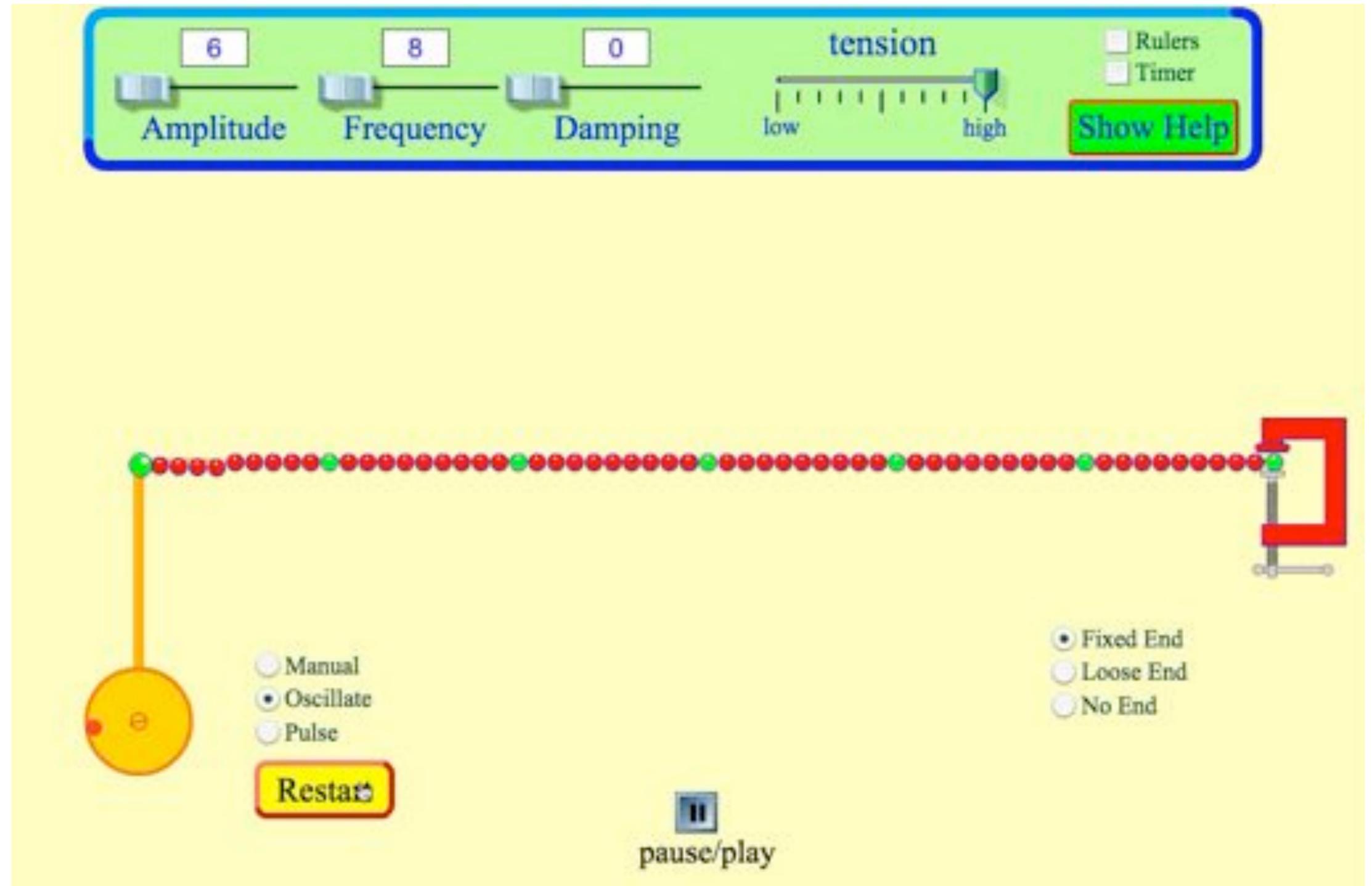
Ecuación de ondas estacionarias de Schrödinger

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(r)] \psi(x) = 0$$

# Ondas estacionarias

## Modos normales de una cuerda.

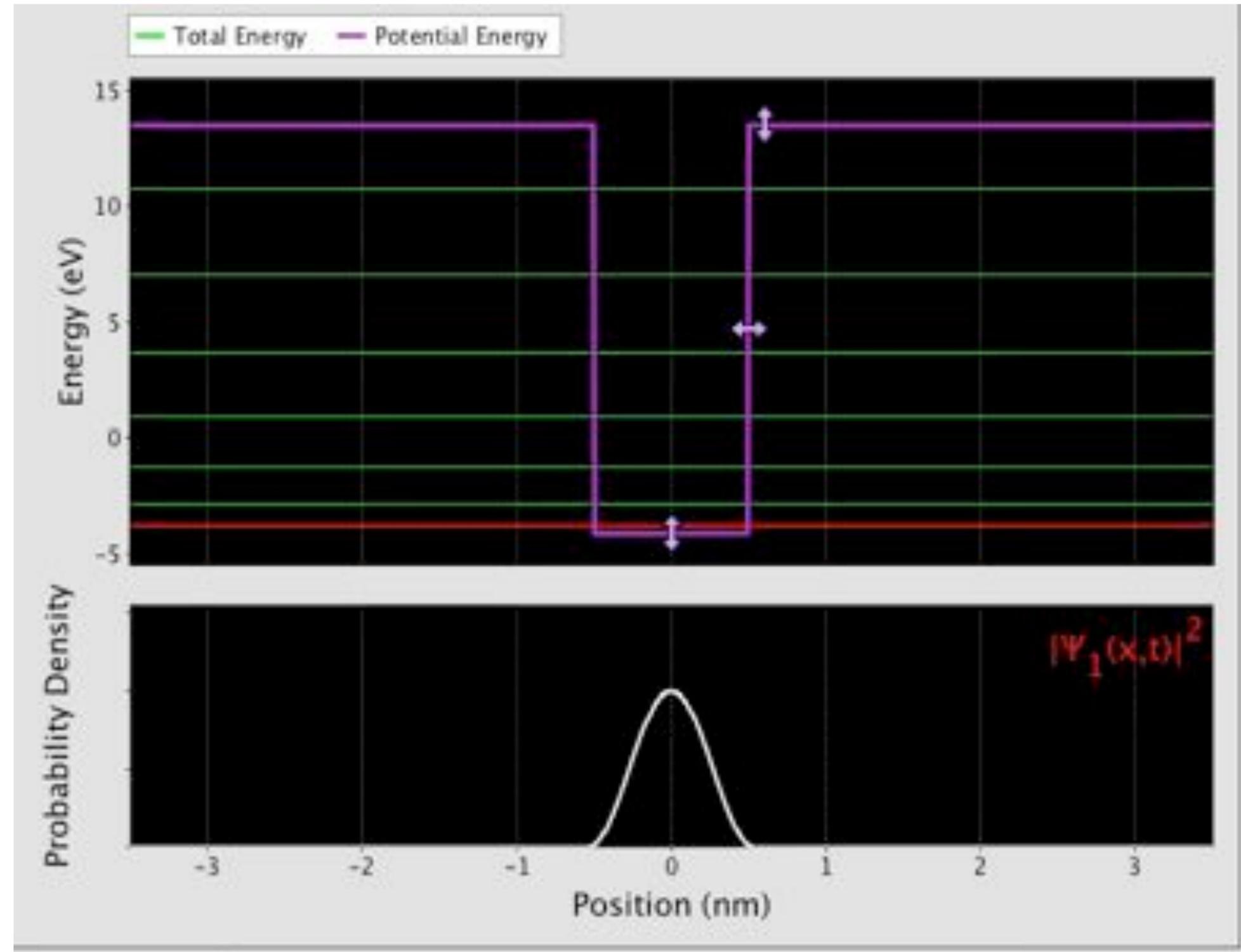
Una cuerda, de determinada densidad y sometida a una tensión, sólo puede tener una serie de modos normales, de energía cuantizada.



# Ecuación de Schrödinger

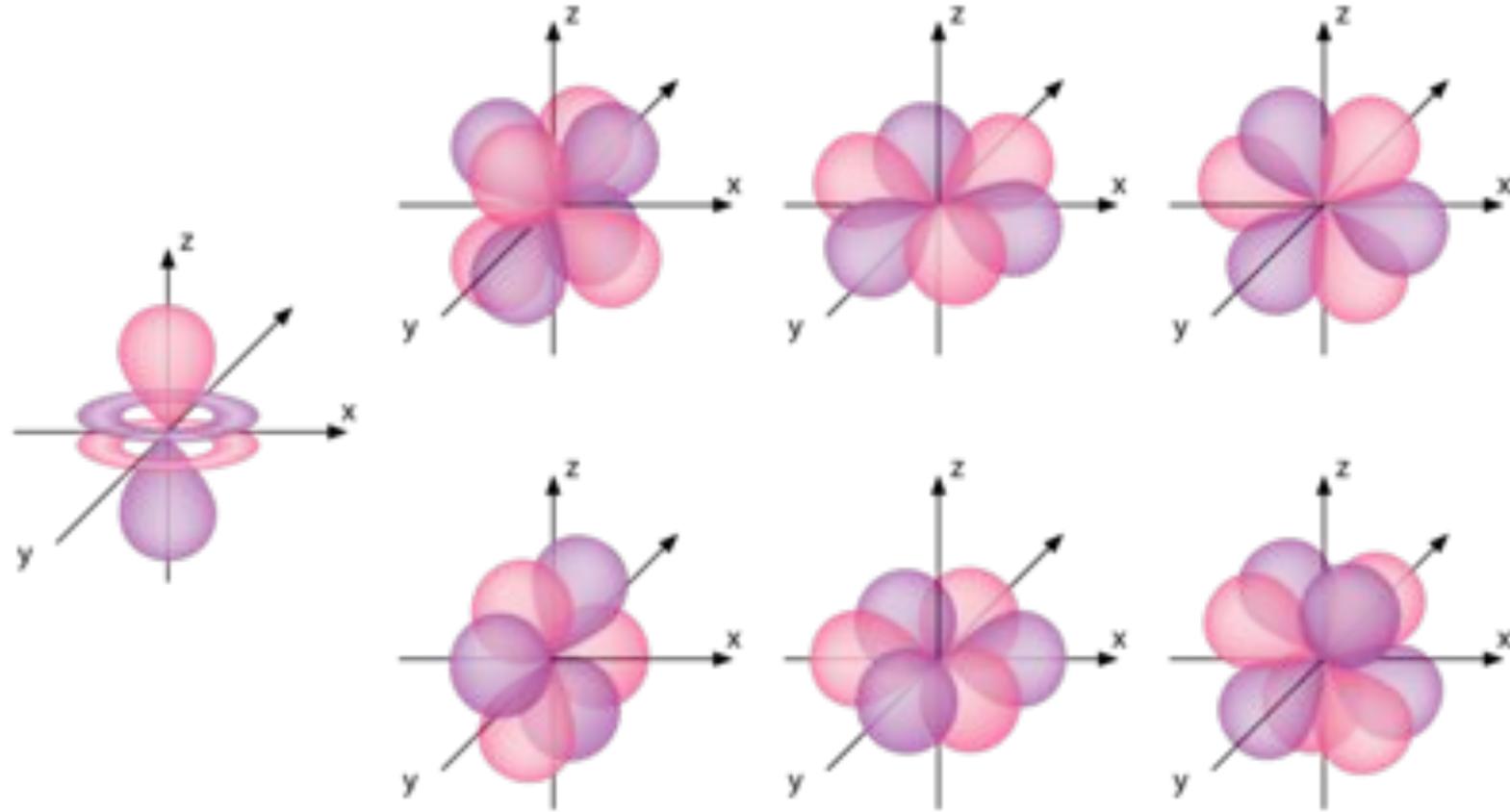
Partícula en una caja.

Un electrón colocado en una caja tiene un espectro discreto de energías.



# Interpretación probabilística de Born de la función de onda.

El cuadrado de la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger da la probabilidad de encontrar la partícula en un punto y en un instante.

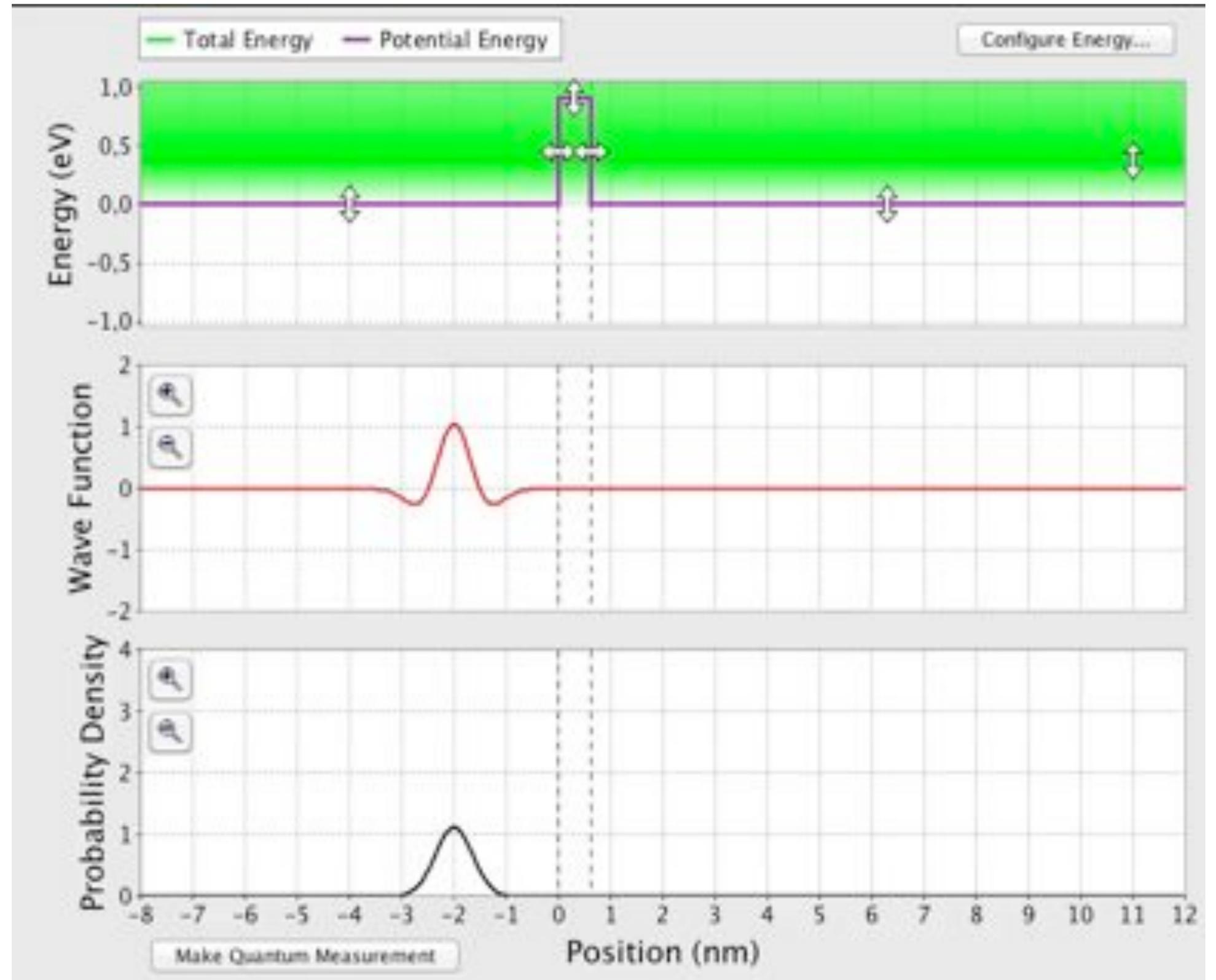


# Ecuación de Schrödinger

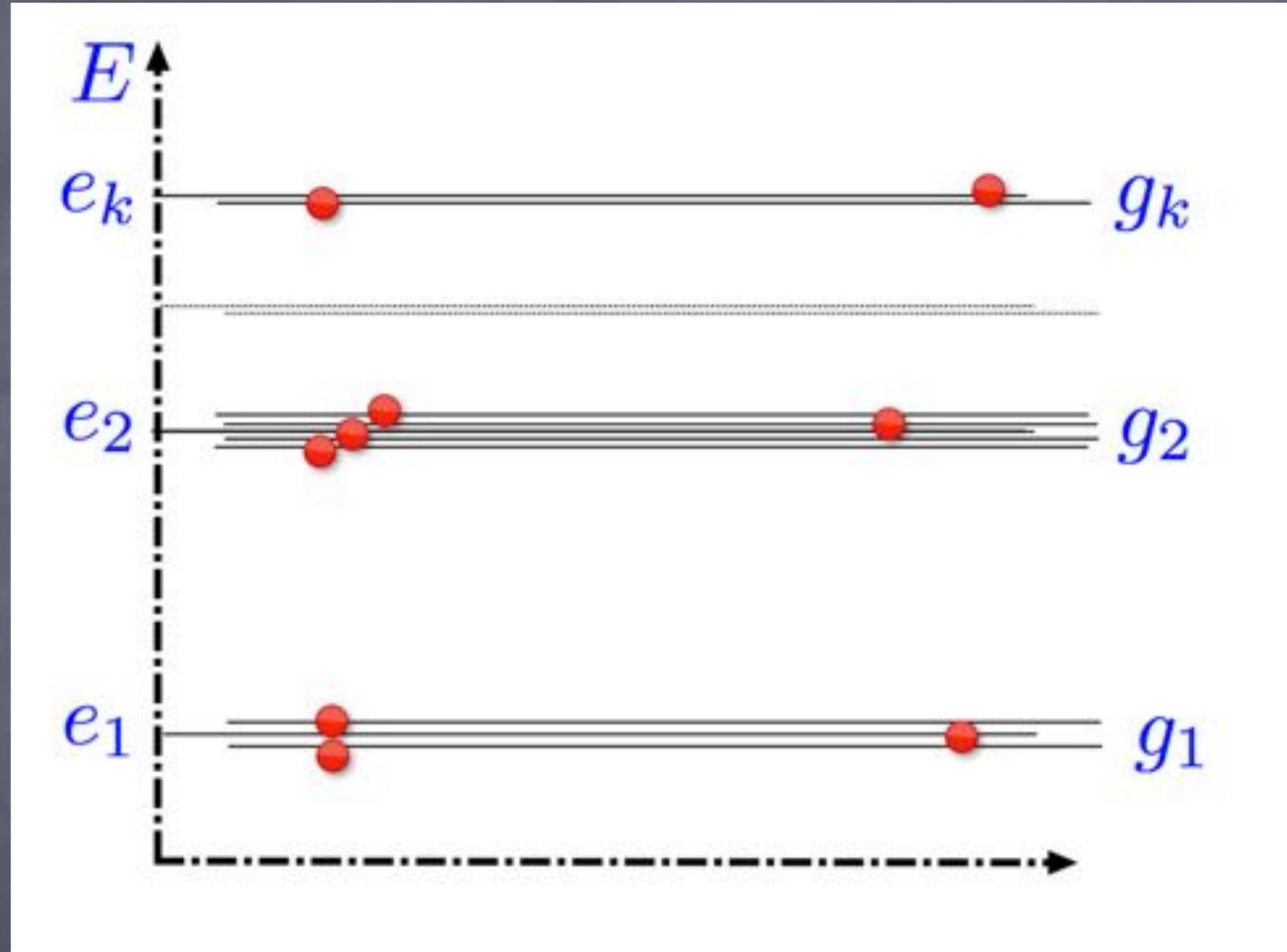
## Efecto túnel.

Un electrón tiene cierta probabilidad de superar una barrera de potencial mayor que la energía que posee.

Hay una probabilidad de que la partícula rebote cuando se encuentre con una barrera más baja que su energía.



# Distribución Fermi-Dirac. Pauli



$$W = \prod \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Distribución de Fermi-Dirac.  
Electrones en un átomo.  
Principio de exclusión de Pauli

$$W = \prod \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

$$n_i = g_i \left( e^{\alpha} e^{u_i/k_B T} + 1 \right)^{-1}$$

Tabla periódica de los elementos de Mendeleiev

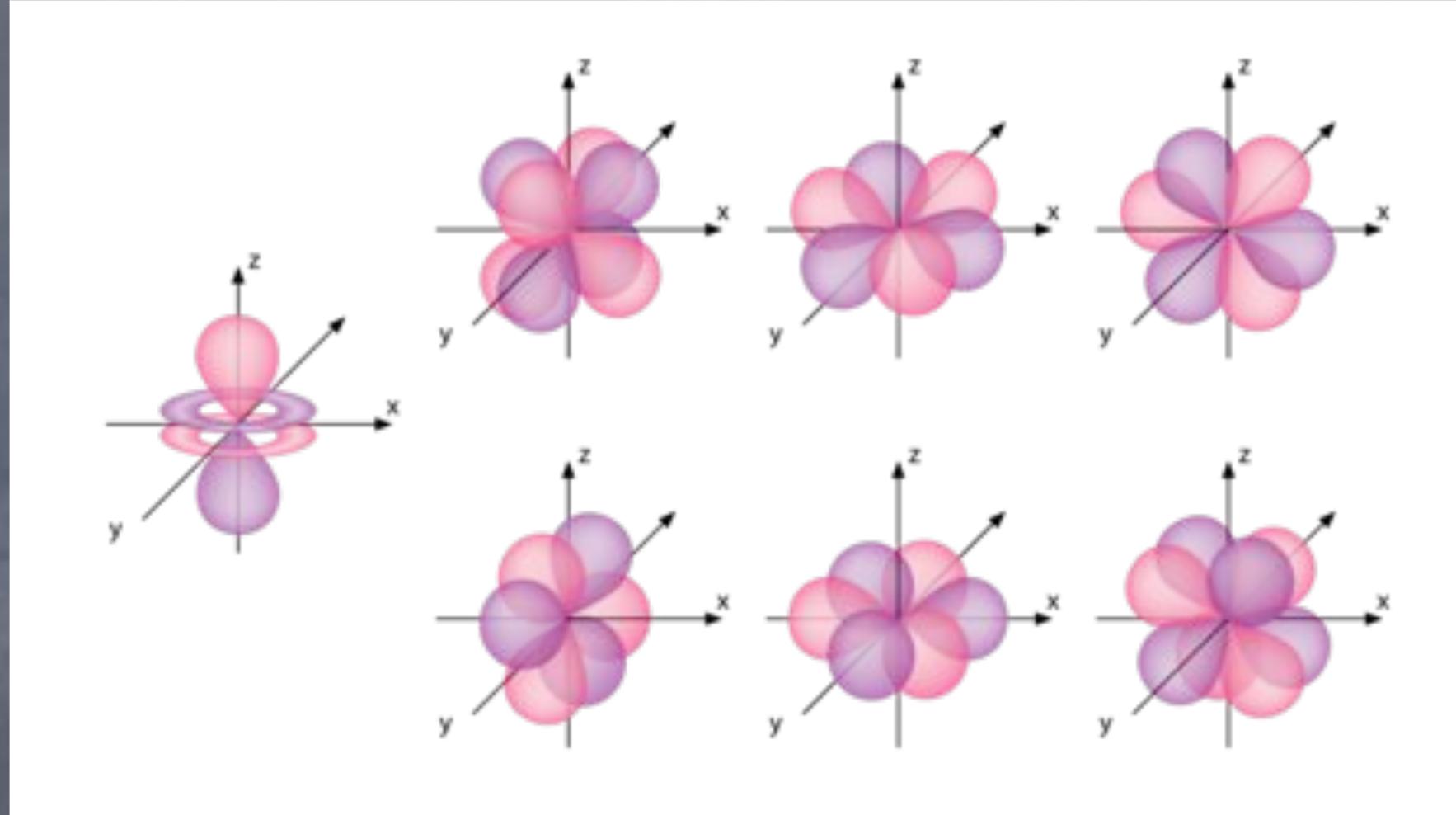
Soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial electrostático.

Principio de exclusión de Pauli.  
(Teorema spin-estadística)

# Soluciones de la ecuación de Schrödinger para un potencial electrostático.

Interpretación probabilística de Born de la función de onda.

El cuadrado de la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger da la probabilidad de encontrar la partícula en un punto y en un instante.



Principio de exclusión de Pauli.

# Tabla periódica de los elementos.

El principio de exclusión de Pauli aplicado a las soluciones de la ecuación de Schrödinger permite explicar la tabla periódica de Mendeleiev.

1 1A 11A H Hydrogen 1.008	2 2A 2A He Helium 4.002											3 3A 3A B Boron 10.811	4 4A 4A C Carbon 12.011	5 5A 5A N Nitrogen 14.007	6 6A 6A O Oxygen 15.999	7 7A 7A F Fluorine 18.998	8 8A 8A Ne Neon 20.180
3 11 11A Na Sodium 22.990	4 12 2A Mg Magnesium 24.305	5 3B 3B Sc Scandium 44.956	6 7B 4B Ti Titanium 47.88	7 8B 5B V Vanadium 50.942	8 8B 6B Cr Chromium 51.996	9 8B 7B Mn Manganese 54.938	10 8B 8B Fe Iron 55.845	11 8B 9B Co Cobalt 58.933	12 8B 10B Ni Nickel 58.693	13 9B 11B Cu Copper 63.546	14 10B 12B Zn Zinc 65.39	15 13A 13A Ga Gallium 69.723	16 14A 14A Ge Germanium 72.64	17 15A 15A As Arsenic 74.922	18 16A 16A Se Selenium 78.96	19 17A 17A Br Bromine 79.904	20 18A 18A Kr Krypton 84.96
19 39 11A K Potassium 39.098	20 40 2A Ca Calcium 40.078	21 39 3B Sc Scandium 44.956	22 40 4B Ti Titanium 47.88	23 41 5B V Vanadium 50.942	24 42 6B Cr Chromium 51.996	25 43 7B Mn Manganese 54.938	26 44 8B Fe Iron 55.845	27 45 9B Co Cobalt 58.933	28 46 8B Ni Nickel 58.693	29 47 9B Cu Copper 63.546	30 48 10B Zn Zinc 65.39	31 49 13A Ga Gallium 69.723	32 50 14A Ge Germanium 72.64	33 51 15A As Arsenic 74.922	34 52 16A Se Selenium 78.96	35 53 17A Br Bromine 79.904	36 54 18A Kr Krypton 84.96
37 87 11A Rb Rubidium 85.468	38 88 2A Sr Strontium 87.62	39 89-91 3B Y Yttrium 88.906	40 90 4B Zr Zirconium 91.224	41 91 5B Nb Niobium 92.906	42 92 6B Mo Molybdenum 95.94	43 93 7B Tc Technetium 98.906	44 94 8B Ru Ruthenium 101.07	45 95 9B Rh Rhodium 102.906	46 96 8B Pd Palladium 106.42	47 97 9B Ag Silver 107.868	48 98 10B Cd Cadmium 112.411	49 101 13A In Indium 114.818	50 112 14A Sn Tin 118.71	51 113 15A Sb Antimony 121.757	52 114 16A Te Tellurium 127.6	53 126 17A I Iodine 126.905	54 136 18A Xe Xenon 131.29
55 137 11A Cs Cesium 132.905	56 137 2A Ba Barium 137.327	57-71 3B La-Lu Lanthanide Series	72 102 4B Hf Hafnium 178.49	73 103 5B Ta Tantalum 180.948	74 104 6B W Tungsten 183.85	75 105 7B Re Rhenium 186.207	76 106 8B Os Osmium 190.23	77 107 9B Ir Iridium 192.22	78 108 8B Pt Platinum 195.08	79 109 9B Au Gold 196.967	80 110 10B Hg Mercury 200.59	81 115 13A Tl Thallium 204.384	82 116 14A Pb Lead 207.2	83 117 15A Bi Bismuth 208.980	84 118 16A Po Polonium 209	85 119 17A At Astatine 209	86 120 18A Rn Radon 222
87 223 11A Fr Francium 223	88 226 2A Ra Radium 226	89-103 3B La-Lu Lanthanide Series	104 210 4B Rf Rutherfordium 210	105 211 5B Db Dubnium 211	106 212 6B Sg Seaborgium 212	107 213 7B Bh Bohrium 213	108 214 8B Hs Hassium 214	109 215 9B Mt Meitnerium 215	110 216 8B Ds Darmstadtium 216	111 217 9B Rg Roentgenium 217	112 218 10B Cn Copernicium 218	113 219 13A Uut Ununtrium 219	114 220 14A Fl Flerovium 220	115 221 15A Uup Ununpentium 221	116 222 16A Lv Livermorium 222	117 223 17A Uus Ununseptium 223	118 224 18A Uuo Ununoctium 224

Lanthanide Series	57 La Lanthanum 138.905	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodymium 140.908	60 Nd Neodymium 144.24	61 Pm Promethium 144.913	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolinium 157.25	65 Tb Terbium 158.925	66 Dy Dysprosium 162.50	67 Ho Holmium 164.930	68 Er Erbium 167.26	69 Tm Thulium 168.934	70 Yb Ytterbium 173.054	71 Lu Lutetium 174.967
Actinide Series	89 Ac Actinium 227	90 Th Thorium 232.038	91 Pa Protactinium 231.036	92 U Uranium 238.029	93 Np Neptunium 237.048	94 Pu Plutonium 244.064	95 Am Americium 243.061	96 Cm Curium 247.070	97 Bk Berkelium 247.070	98 Cf Californium 251.080	99 Es Einsteinium 252.083	100 Fm Fermium 257.095	101 Md Mendelevium 258.10	102 No Nobelium 259.103	103 Lr Lawrencium 262



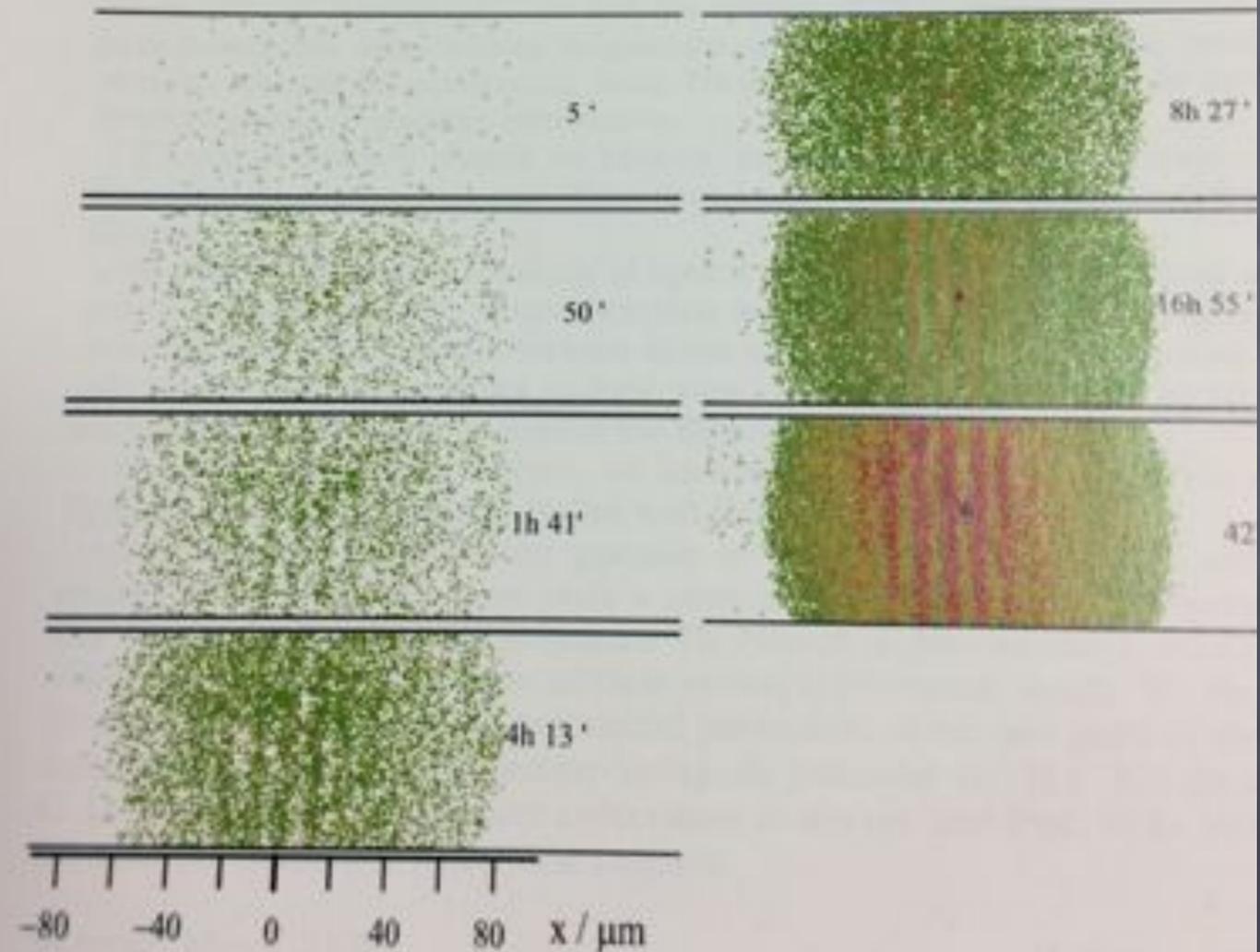
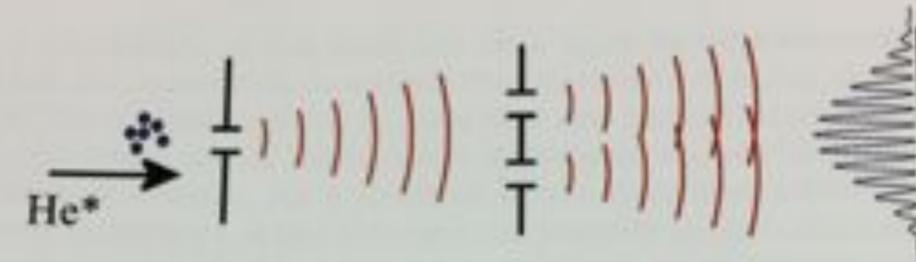
# Double Slit Interference

Shining three lasers  
with different wavelengths  
through two identical  
small slits

La luz como onda

# Interferencia de electrones

## A Fundamental Experiment in Quantum Physics: *The Wave-Particle Dualism of Matter*



When helium atoms all having the same direction and velocity are passed through a double-slit each atom produces a strictly localised *point* of impact on a screen behind the slits; the atoms

# Los electrones como ondas

# Interferencia de electrones



Los electrones como ondas

Las ondas electromagnéticas se comportan,  
también, como partículas.

Las partículas másicas se comportan, también,  
como ondas.

El comportamiento depende del experimento.  
Teorema de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

Incetridumbre tiempo-energía

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

# Radiación Hawking de agujeros negros.

Los agujeros negros deben cumplir las leyes de la termodinámica (Bekenstein).

Los agujeros negros deben tener energía (Einstein), entropía y temperatura.

$$T_{\text{AN}} \approx 6 \cdot 10^{-8} \left( \frac{m_{\text{S}}}{m} \right) \text{ K}$$

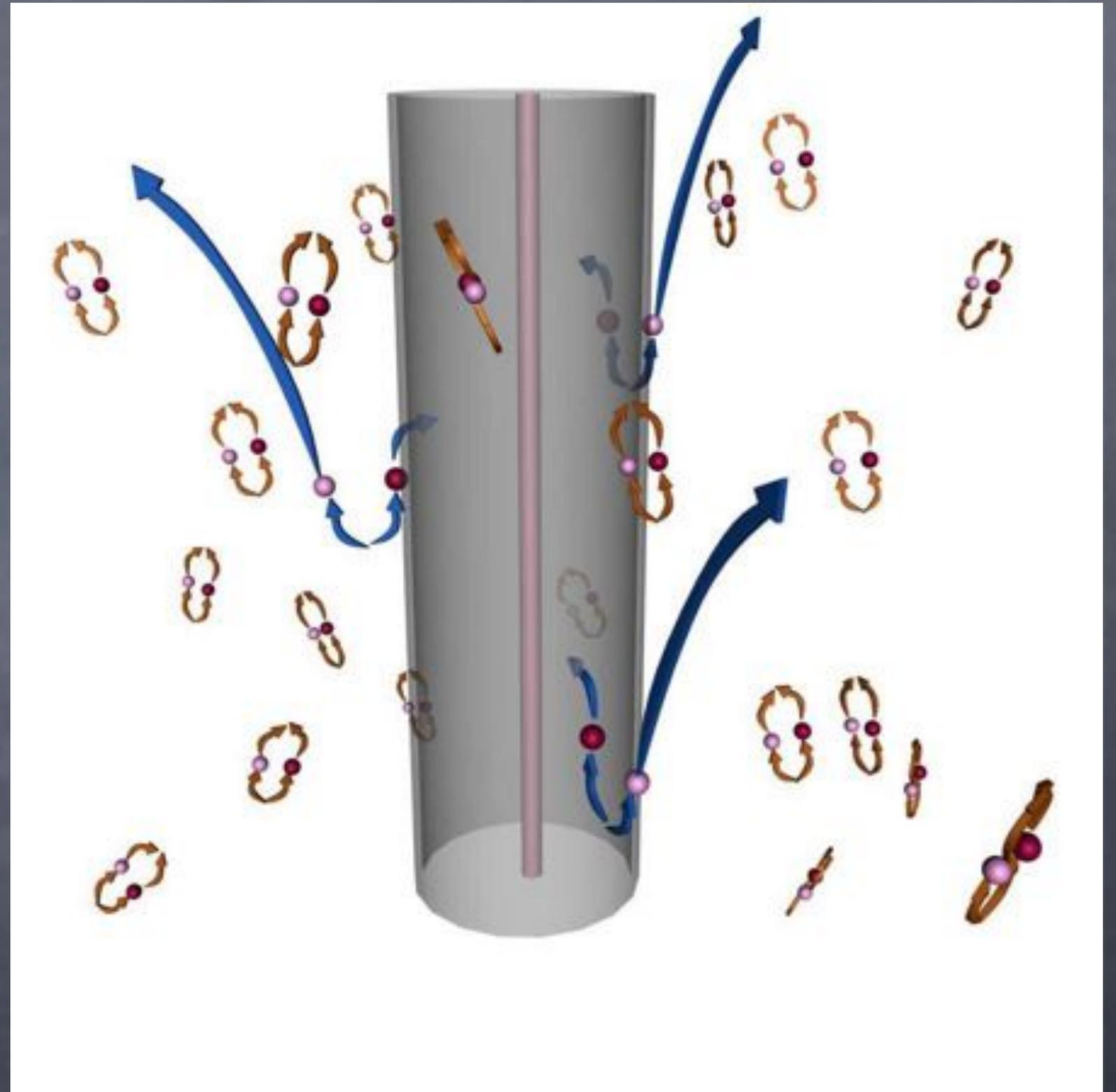
Los agujeros negros deben radiar (Teorema de Hawking).

Los agujeros negros tienen pelo.

# Mecanismo de Hawking de radiación de agujeros negros.

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

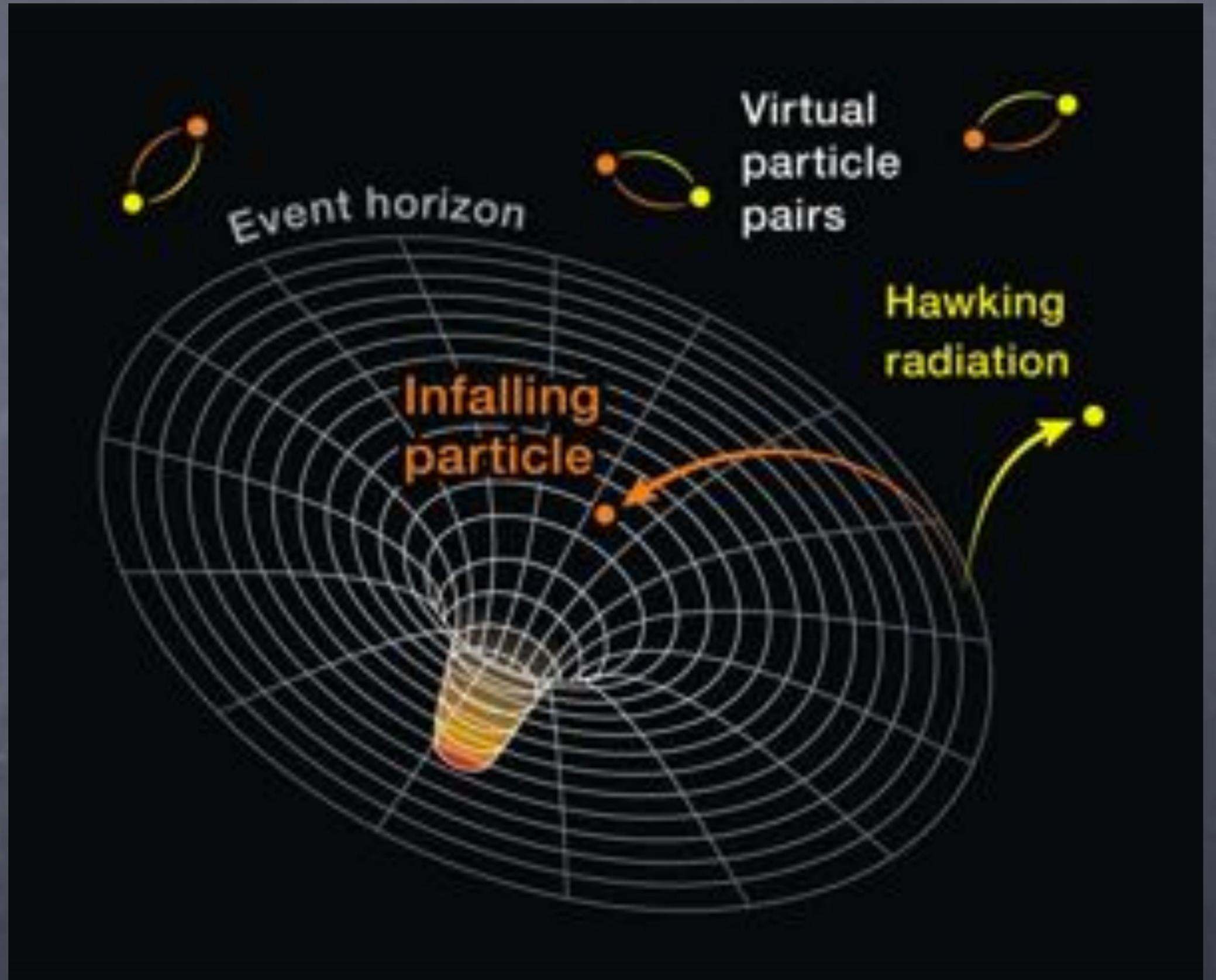
Creación virtual de pares partícula-antipartícula. Cerca del horizonte de sucesos, la antipartícula cae con más probabilidad dentro del agujero negro.



# Radiación de Hawking

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

Creación virtual de pares partícula-antipartícula. Cerca del horizonte de sucesos, la antipartícula cae con más probabilidad dentro del agujero negro.



$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

# Radiación de Hawking



Radiación Hawking de agujeros negros.  
El extraño mundo de la mecánica cuántica  
(Heisenberg), la relatividad (Einstein) y la  
termodinámica (Bekenstein).



# FIN

Ideas que dan forma a la física  
Nada se divide indefinidamente.  
La naturaleza es cuántica.

Prof. J Güémez

Departamento de Física Aplicada  
Universidad de Cantabria  
Santander, enero 2019