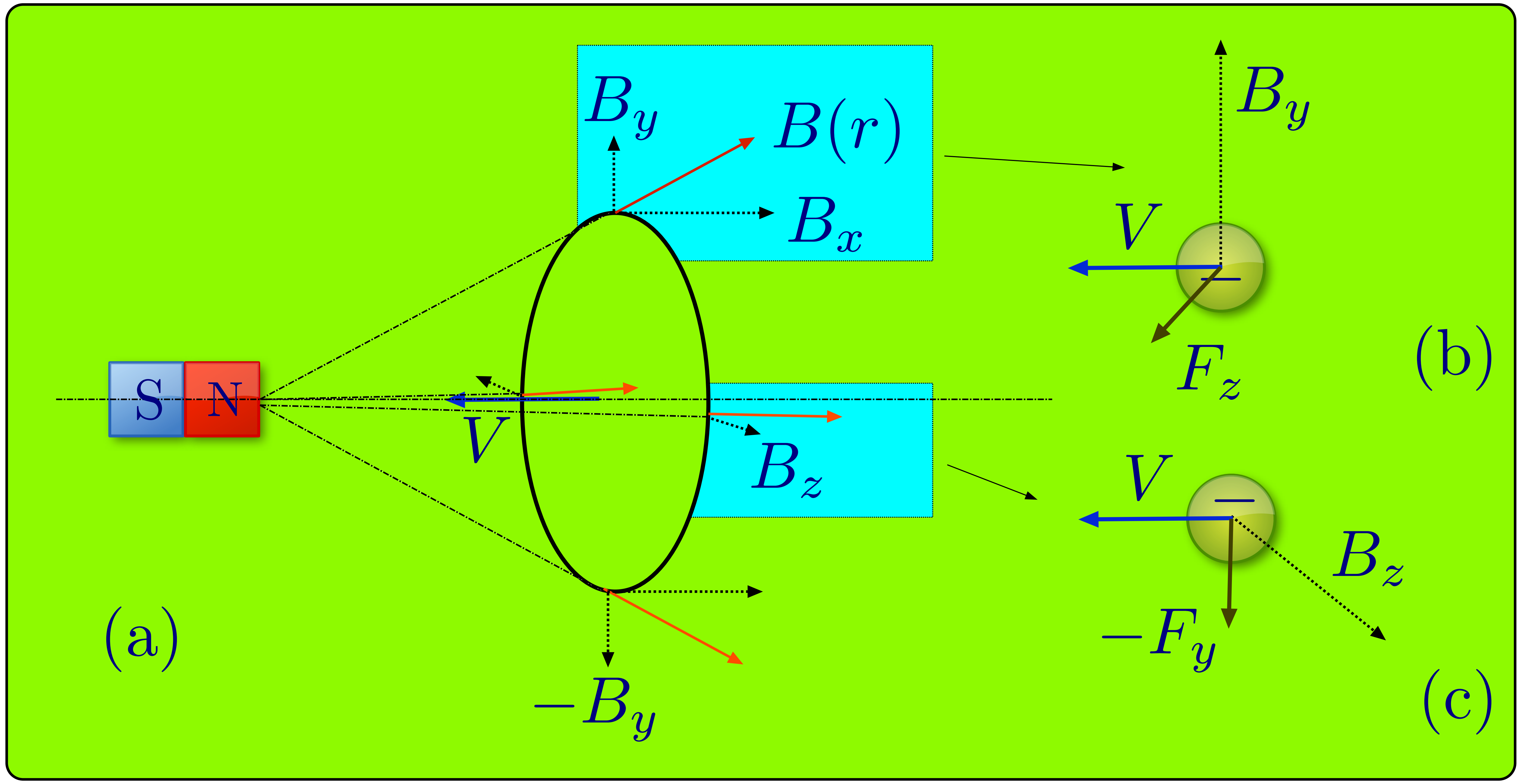
Los campos eléctricos y magnéticos están relacionados, pero, todavía, no unificados.

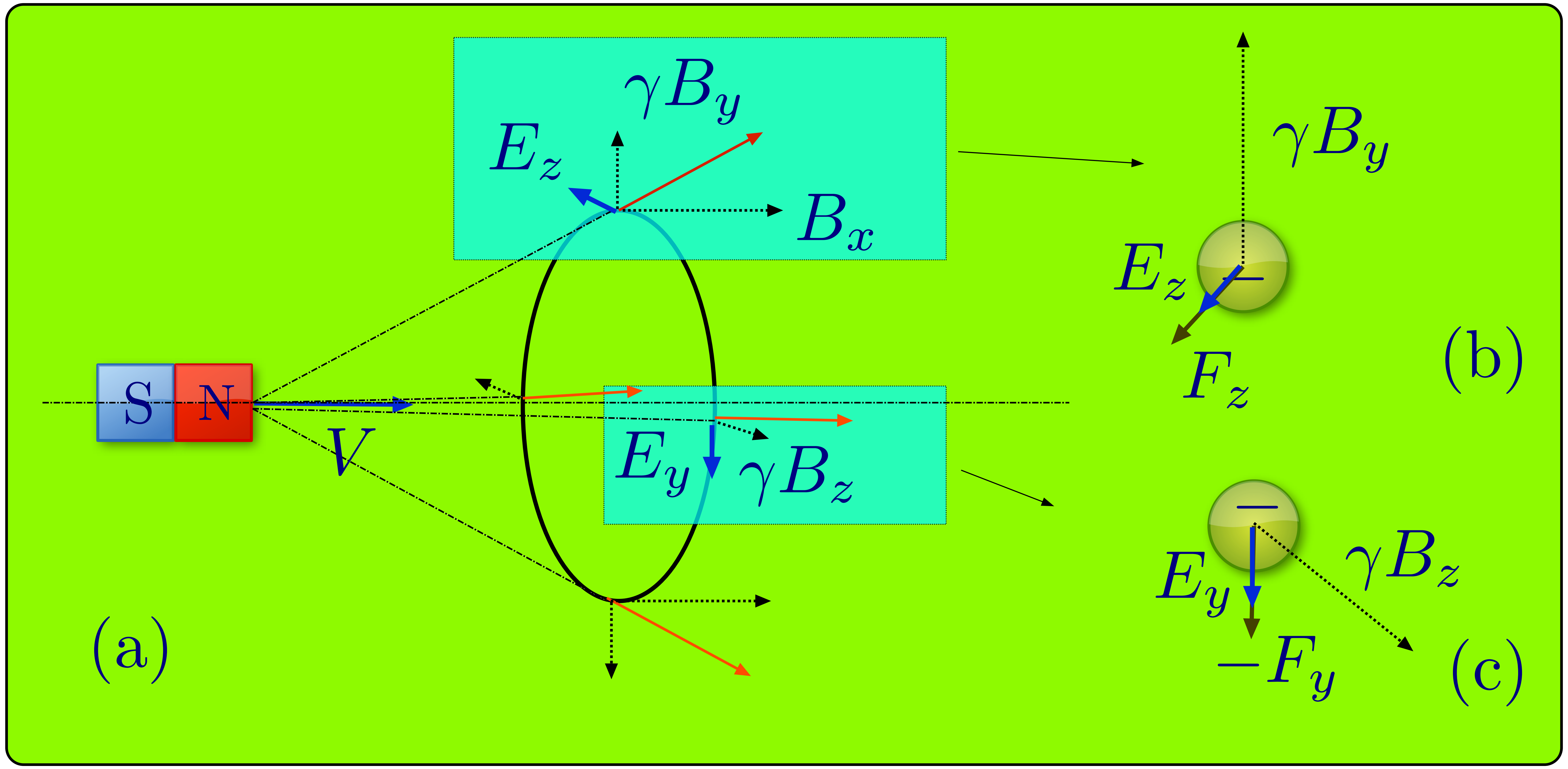
Problema de Einstein. Imán en reposo, espira en movimiento



Si un imán se mueve hacia una bobina de varias vueltas de hilo de cobre, que se encuentra en reposo, la aparición de una fuerza electromotriz que mueve cargas en el cobre y produce corriente y energía eléctricas se explica mediante el principio de inducción de Faraday.

El flujo magnético a través de la bobina varía en el tiempo, dando lugar a la aparición de la fuerza electromotriz, que generará un campo magnético que se opondrá al movimiento del imán.

Problema de Einstein. Imán en movimiento, espira en reposo



Para un observador que se mueve con la misma velocidad que el imán, el imán se encuentra en reposo y la bobina se encuentra en movimiento. Este observador explicará la existencia de una fuerza electromotriz recurriendo a cargas eléctricas en movimiento en un campo magnético en reposo.

Si es la bobina en movimiento la que se aproxima al imán en reposo, la misma corriente y energía eléctricas producidas se explican ahora mediante la fuerza de Lorentz.

Artículo Einstein 1905

Transformaciones de campos eléctricos y magnéticos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\,.$$

Forma de Hertz de las ecuaciones de Maxwell

Artículo Einstein 1905

Principio de relatividad

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{z}} &= 0\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{y}}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}}\,,
\end{aligned}
$$

Artículo Einstein 1905

Para que se cumplan simultáneamente estas dos ecuaciones

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2\bar{t}^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

con la velocidad de la luz igual para ambos observadores, se deben cumplir las transformaciones

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \\
\bar{y} &= y; \\
\bar{z} &= z; \\
\bar{t} &= \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}
\end{aligned}$$

Son las transformaciones de Lorentz obtenidas por Einstein en un contexto diferente

Artículo Einstein 1905

Transformaciones de campos eléctricos y magnéticos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial \bar{t}}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}\,,$$

$$\bar{t} = \gamma(V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\,,$$

$$\bar{x} = \gamma(V)\,(x - Vt)\,, \qquad \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\bar{y} = y\,,$$

$$\bar{z} = z\,,$$

Artículo Einstein 1905

Transformaciones de campos eléctricos y magnéticos

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,,$$

$$\gamma(V)\left(\frac{\partial E_x}{\partial \bar{x}} - \frac{V}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}}\right) + \frac{\partial E_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial \bar{z}} = 0\,,$$

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial \bar{x}} = \frac{-1}{\gamma(V)}\left(\frac{\partial E_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{V}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}}\,,}$$

Artículo Einstein 1905

Transformaciones de campos eléctricos y magnéticos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,,\\
\frac{\gamma(V)}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}} - V\frac{\partial E_x}{\partial \bar{x}}\right) &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,,\\
\frac{\gamma(V)}{c}\left[\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\partial E_x}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{\gamma(V)}\left(\frac{\partial E_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial E_z}{\partial \bar{z}}\right)\right] &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,,
\end{aligned}
$$

Artículo Einstein 1905

Transformaciones de campos eléctricos y magnéticos

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}} = \gamma(V)\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right) - \gamma(V)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right) .$$

$$\frac{\gamma(V)}{c}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(E_z - \frac{V}{c}B_z\right) \quad = \quad \frac{\partial B_x}{\partial \bar{y}} - \gamma(V)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(B_z + \frac{V}{c}E_y\right) ,$$

$$\boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[\gamma(V)\left(E_z - \frac{V}{c}B_z\right)\right] \quad = \quad \frac{\partial B_x}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\gamma(V)\left(B_z + \frac{V}{c}E_y\right)\right]}$$

Mileva Maric confirma los cálculos de Einstein

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\gamma(V)\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\gamma(V)\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)\right].$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\gamma(V)\left(E_y - \frac{V}{c}B_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\gamma(V)\left(E_z + \frac{V}{c}B_y\right)\right]$$

Artículo Einstein 1905

Principio de relatividad

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0\,, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\,, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{z}} &= 0\,, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{y}}\,, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}}\,,
\end{aligned}$$

Artículo Einstein 1905

Principio de relatividad

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\gamma(V)\left(B_z - \frac{V}{c}E_y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\gamma(V)\left(B_y + \frac{V}{c}E_z\right)\right].$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{y}},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\gamma(V)\left(E_y - \frac{V}{c}B_z\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\gamma(V)\left(E_z + \frac{V}{c}B_y\right)\right]$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}},$$

Artículo Einstein 1905

Transformaciones de campos eléctricos y magnéticos

$$
\begin{aligned}
\bar{E}_x &= E_x \, , \\
\bar{E}_y &= \gamma(V)\,[E_y - V B_z] \, , \\
\bar{E}_z &= \gamma(V)\,[E_z + V B_y] \, , \\
\bar{B}_x &= B_x \, , \\
\bar{B}_y &= \gamma(V)\,\left[B_y + (V/c^2)E_z\right] \, , \\
\bar{B}_z &= \gamma(V)\,\left[B_z - (V/c^2)E_y\right] \, .
\end{aligned}
$$

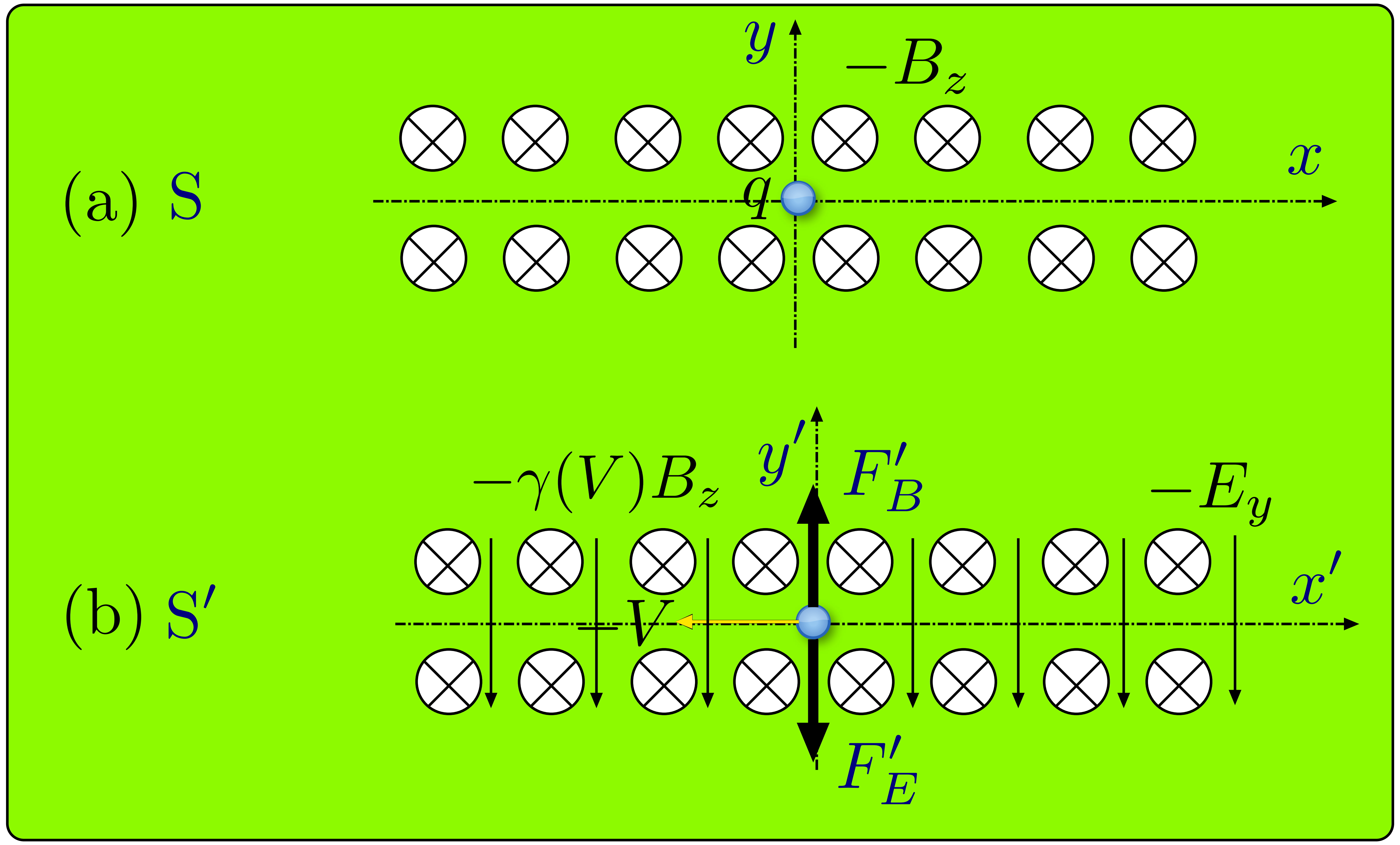
Un campo eléctrico, o magnético, deja de ser una entidad absoluta. Lo que para un observador es un campo magnético puro, para otro puede ser una mezcla de campo eléctrico y magnético. Y viceversa.

Artículo Einstein 1905

$$
\begin{aligned}
E_x &= \bar{E}_x\,, \\
E_y &= \gamma(V)\left[\bar{E}_y + V\bar{B}_z\right]\,, \\
E_z &= \gamma(V)\left[\bar{E}_z - V\bar{B}_y\right]\,, \\
B_x &= \bar{B}_x\,, \\
B_y &= \gamma(V)\left[\bar{B}_y - (V/c^2)\bar{E}_z\right]\,, \\
B_z &= \gamma(V)\left[\bar{B}_z + (V/c^2)\bar{E}_y\right]\,.
\end{aligned}
$$

Invertibilidad de las transformaciones relativistas de campos eléctricos y magnéticos. La coherencia del formalismo exige que las ecuaciones sean invertibles, cambiando el signo de la velocidad y las barras.

Fuerza magnética sobre una carga en reposo

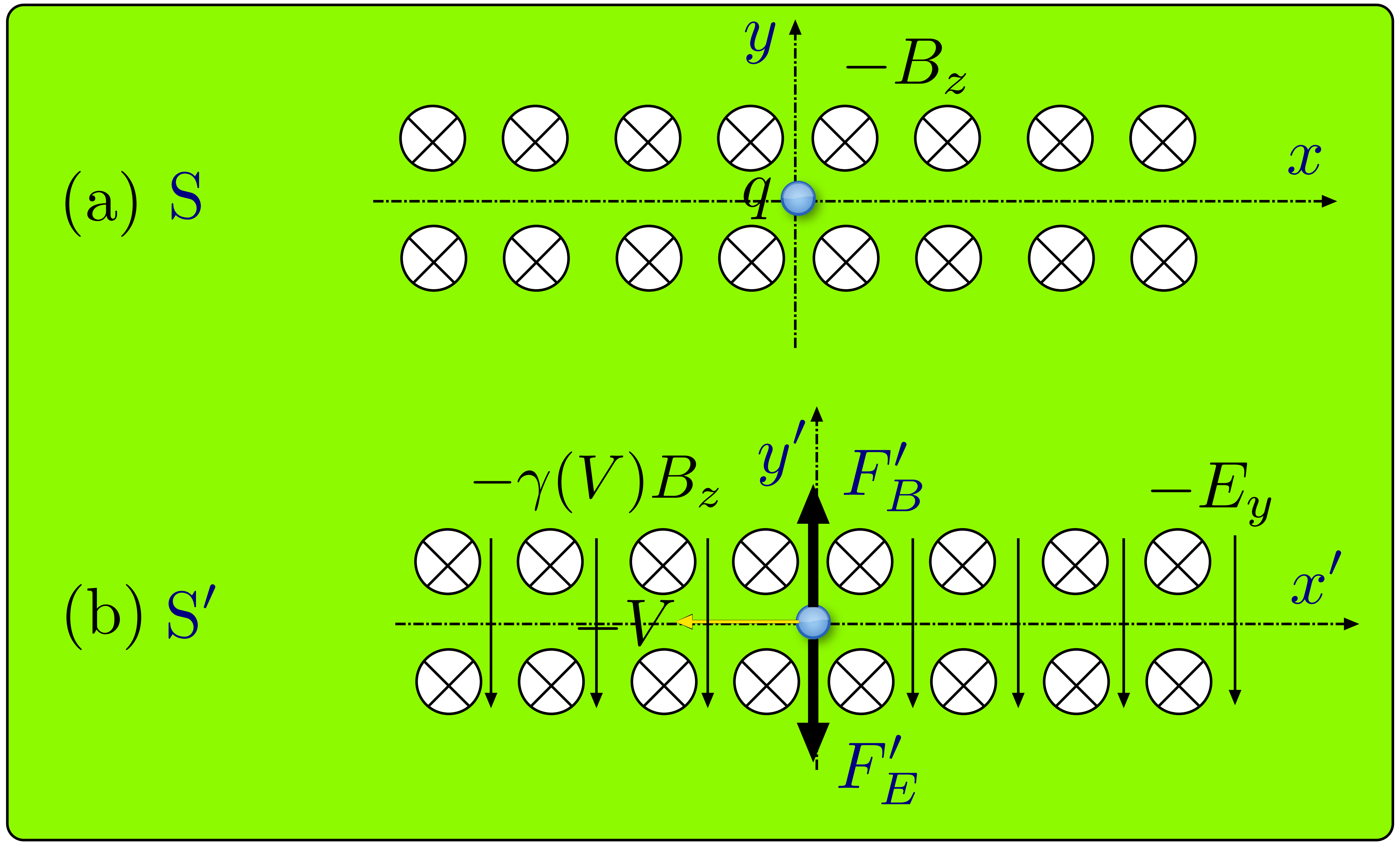


$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = 0$$

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}')$$

Fuerza magnética sobre una carga



$$\vec{B}' = \gamma(V)B_z$$

$$\vec{E}' = -\gamma(V)VB_z$$

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}')$$

$$\vec{F}' = q(-\gamma(V)VB_z + V \times \gamma(V)\vec{B}) = 0$$

Fuerza magnética sobre una carga

El observador en S’ ve un campo magnético transformado

$$\vec{B}' = \gamma(V)B_z$$

El observador en S’ ve un campo eléctrico (que no ve el observador en S)

$$\vec{E}' = -\gamma(V)VB_z$$

Aplicando la ecuación de la fuerza de Lorentz (principio de relatividad)

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}')$$

La fuerza resultante sobre la partícula en S’ es también nula (aunque ahora hay dos fuerzas en vez de ninguna)

$$\vec{F}' = q(-\gamma(V)VB_z + V \times \gamma(V)\vec{B}) = 0$$

Forma de Minkowski de la Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \, .$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{A}}{}^{\mu}_{\nu} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & cB_{z\mathrm{A}} & -cB_{y\mathrm{A}} & E_{x\mathrm{A}} \\ -cB_{z\mathrm{A}} & 0 & cB_{x\mathrm{A}} & E_{y\mathrm{A}} \\ cB_{y\mathrm{A}} & -cB_{x\mathrm{A}} & 0 & E_{z\mathrm{A}} \\ E_{x\mathrm{A}} & E_{y\mathrm{A}} & E_{z\mathrm{A}} & 0 \end{array} \right\} .$$

$$F^{\mu}_{\nu} = q\mathcal{E}^{\mu}_{\nu} = q \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & cB_z & -cB_y & E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & E_y \\ -cB_y & -cB_x & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{array} \right\} ,$$

Forma de Minkowski de la Fuerza de Lorentz

$$
\begin{aligned}
F^{\mu} &= c^{-1} F^{\mu}_{\nu} v^{\nu} = c^{-1} \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & cqB_z & -cqB_y & F_x \\ -cqB_z & 0 & cqB_x & F_y \\ cqB_y & -cqB_x & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v) v_x \\ \gamma(v) v_y \\ \gamma(v) v_z \\ \gamma(v) c \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v) F_x \\ \gamma(v) F_y \\ \gamma(v) F_z \\ c^{-1} \gamma(v) \vec{F} \cdot \vec{v} \end{array} \right\},
\end{aligned}
$$

Ecuación segunda ley de Newton

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu$$

$$\boxed{\mathrm{d}p^\mu = F^\mu \mathrm{d}\tau}$$

Esta ecuación guarda cierta semejanza formal con la segunda ley de Newton clásica no relativista.

Se procede definiendo así la ecuación fundamental, utilizando el escalar tiempo propio (un invariante relativista) por necesidades matemáticas, pues no se puede considerar en la ecuación un tercer cuadrivector con unidades de tiempo sin que ésta resulte incoherente (o, no se sabe definir la derivada respecto de un cuadrivector o el producto de dos cuadrivectores que de otro cuadrivector).

Forma de Minkowski de la segunda ley de Newton

$$M\mathrm{d}\left[\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right] = q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}t\,.$$

$$\mathrm{d}p^\mu = F^\nu \mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{d}p^\mu = c^{-1} q \mathcal{E}^\mu_\nu v^\nu \mathrm{d}\tau$$

Forma de Minkowski de la Fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton

$$\mathrm{d}p^\mu = F^\mu \mathrm{d}\tau$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)v_x\right] \\ \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)v_y\right] \\ \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)v_z\right] \\ \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)c\right] \end{array} \right\} = c^{-1}q \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & -cB_z & cB_y & E_x \\ cB_z & 0 & -cB_x & E_y \\ -cB_y & cB_x & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v)v_x \\ \gamma(v)v_y \\ \gamma(v)v_z \\ \gamma(v)c \end{array} \right\} \mathrm{d}\tau \,,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)v_x\right] &= qE_x\mathrm{d}t + q\left(B_y v_z - B_z v_y\right)\mathrm{d}t \,, \\ \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)v_y\right] &= qE_y\mathrm{d}t + q\left(B_z v_x - B_x v_z\right)\mathrm{d}t \,, \\ \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)v_z\right] &= qE_z\mathrm{d}t + q\left(B_x v_y - B_y v_x\right)\mathrm{d}t \,, \\ \mathcal{M}\mathrm{d}\left[\gamma(v)c\right] &= c^{-1}\left[E_x v_x\mathrm{d}t + E_y v_y\mathrm{d}t + E_z v_z\mathrm{d}t\right] \,. \end{aligned}$$

La teoría especial de la relatividad unifica el campo eléctrico y el campo magnético en uno, el campo electromagnético

$$\left\{\begin{array}{cccc} 0 & -cB_z & cB_y & E_x \\ cB_z & 0 & -cB_x & E_y \\ -cB_y & cB_x & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{array}\right\}$$

FIN

Ideas que dan forma a la física

Relacionar y unificar.

El campo eléctromagnético.

Prof. J Güémez
Departamento de Física Aplicada
Universidad de Cantabria

Santander, enero 2019