Cálculos aproximados

Estimaciones

Prof. J Güémez
Dpto. Física Aplicada
Universidad de Cantabria

GUESSTIMATION

Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin

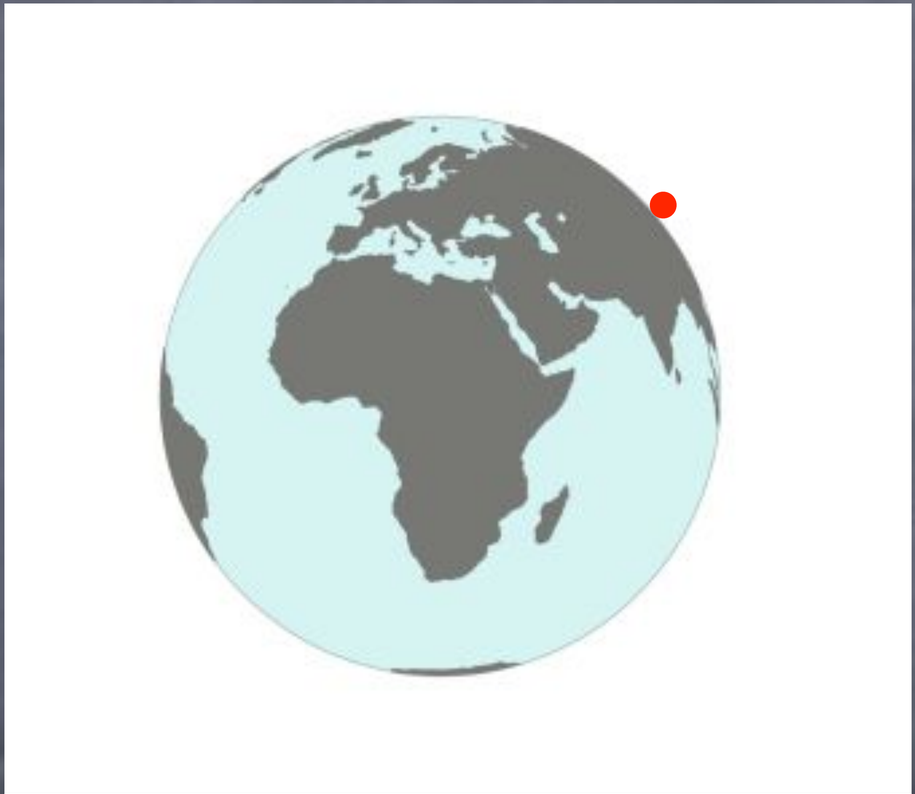
L Weinstein y J A Adam

Back-of-the-envelope Physics

Clifford Swartz

Constante de gravitación universal (Estimación de Newton)

La densidad de la Tierra es entre 5 y 6 veces la densidad del agua.



$$mg = G\frac{M_{\mathrm{T}}m}{R_{\mathrm{T}}^2}$$

Constante de gravitación universal (Estimación de Newton)

La densidad de la Tierra es entre 5 y 6 veces la densidad del agua.

Galileo. Caída de una manzana

$$g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$M_{\text{T}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{T}}^3 \rho_{\text{T}}$$

$$\rho_{\text{T}} \approx 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Eratóstenes. Radio de la Tierra

$$R_{\text{T}} \approx 6,5 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$g = \frac{4}{3}\pi G R_{\text{T}} \rho_{\text{T}}$$

Constante de gravitación universal (Estimación de Newton)

$$g = \frac{4}{3}\pi G R_{\mathrm{T}} \rho_{\mathrm{T}}$$

$$G = \frac{3g}{4\pi R_{\mathrm{T}} \rho_{\mathrm{T}}}$$

$$G \approx \frac{10}{4 \cdot 6,5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^3} \approx \frac{1}{1,3} 10^{-10} \approx$$

$$\approx 7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

Número de moléculas en la atmósfera terreste

Volumen de la atmósfera $V_\mathrm{a} \approx 4\pi R_\mathrm{T}^2 h_\mathrm{a}$

Volumen de 1 mol $V_1 \approx 20\ \mathrm{L}$

Átomos de 1 mol $N_\mathrm{A} = 6,02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{molc} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$

Radio de la Tierra

$$R_\mathrm{T} \approx 6,0 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

Espesor de la atmósfera

$$h_\mathrm{a} \approx 10 \cdot 10^3\ \mathrm{m}$$

$$V_\mathrm{a} \approx 4\pi R_\mathrm{T}^2 h_\mathrm{a} \approx 6,0^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^3$$

$$V_\mathrm{a} \approx 4 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m}^3$$

$$n_\mathrm{a} \approx \frac{V_\mathrm{a}}{20 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{20}\ \mathrm{mol}$$

Moléculas en la atmósfera terreste

$$n_{\mathrm{a}} \approx \frac{V_{\mathrm{a}}}{20 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{20} \text{ mol}$$

$$n_{\mathrm{A}} = n_{\mathrm{a}} N_{\mathrm{A}}$$

Moléculas por mol: Avogadro

$$N_{\mathrm{A}} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ molc} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$n_{\mathrm{A}} \approx 2 \cdot 10^{20} 6,02 \cdot 10^{23} \approx 1,0 \cdot 10^{44} \text{ molc}$$

Moléculas de oxígeno y de hidrógeno

$$n_{\mathrm{a}} \approx 2 \cdot n_{\mathrm{A}} \approx 2,0 \cdot 10^{44} \text{ atm}$$

Cómo resolver problemas

- Paso 1. Haga una estimación razonable.
- Paso 2. Si no puede estimar una respuesta, divida el problema en partes manejables y estime la respuesta de cada parte

Tomar la media geométrica de dos números, una estimación por debajo y una estimación por encima.

Logaritmos

0.3

$$1024 = 2^{10} \approx 1000 = 10^3$$

$$10\log_{10}2 \approx 3$$

$$\log_{10}2 \approx 0.3\,(0.301030)$$

$$3^2 \approx 2^3$$

$$\log_{10}3 \approx \frac{3}{2}0.3 \approx 0.5$$

3 es medio orden de magnitud

Logaritmos

$$5^2 \approx 2^3 3$$

$$\log_{10} 5 \approx \frac{0.3 \cdot 3 + 0.5}{2} = 0.7$$

$$7^2 \approx 5 \cdot 10$$

$$\log_{10} 7 \approx \frac{0.7 + 1}{2} = 0.85$$

Logaritmos

$$\log_{10} 2 \approx 0.3$$

$$\log_{10} 3 \approx 0.5$$

$$\log_{10} 5 \approx 0.7$$

$$\log_{10} 7 \approx 0.85$$

$$\log_{10} 8 \approx 0.9$$

$$\log_{10} 9 \approx 0.95$$

$$\log_{10} 10 \approx 1$$

Logaritmos

$$1.5 = \frac{3}{2}$$

$$\log_{10} 1.5 \approx 0.5 - 0.3 = 0.2$$

$$\log_{10} 1 = 0$$

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

$$\log_{10} 0.7 \approx 0.85 - 1 = -0.15$$

$$0.5 = \frac{1}{2}$$

$$\log_{10} 0.5 = -0.30$$

$$0.3 = \frac{3}{10}$$

$$\log_{10} 0.3 = -0.5$$

$$\log_{10} 0 = -\infty$$

Logaritmos neperianos

$$\ln 10 = 2.3$$

$$e^{2.3} = 10$$

$$a = \log_{10} A$$

$$\ln A = 2.3\, a$$

Raíces

$$(2000)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2}\log_{10}2000 = \frac{1}{2}\left(0.3+3\right) \approx 1.65$$

$$N = 10^{1.65} = 10^{0.65}10 \approx 45$$

$$2000^{1/2} = 44,7$$

Raíces

$$(2000)^{1/8}$$

$$\frac{1}{8}\log_{10}2000 = \frac{1}{8}\left(0.3+3\right) \approx 0.4$$

$$N = 10^{0.40} = 2.3$$

$$2000^{1/8} = 2,58$$

Temperatura de una bombilla

$$W = 220 \text{ W}$$
$$V = 250 \text{ V}$$
$$R = 289 \ \Omega$$

Resistencia en frío

$$\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$R(T) = R_0(T_0)\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]$$

$$T_{\text{F}}(\text{W}) = 3680 \text{ K}$$

$$289 = R_0(300)\left[1 + 4,5 \cdot 10^{-3}\left(3000 - 300\right)\right]$$

$$R_0(300) \approx 20 \ \Omega$$

Temperatura de una bombilla

$$T = T_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{\frac{1}{1,2}}$$

$$T = 293 \left(\frac{289}{21} \right)^{\frac{1}{1,2}}$$

$$T = 300 \left(\frac{300}{20} \right)^{\frac{1}{1,2}}$$

$$\log_{10} T \approx (0.5 + 2) + \frac{1}{1.2} (0,5 + 0,7) = 3.5$$

$$T = 10^{3.50} = 10^{0,5} \cdot 1000 = 3\,000 \text{ K}$$

$$T = 2600 \text{ K}$$

Presión de vapor

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\Delta h_V M}{R}\left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right]$$

$$\ln \frac{P}{10^5} = -\frac{689 \cdot 60}{8.314}\left[\frac{1}{298} - \frac{1}{355}\right]$$

$$\ln \frac{P}{10^5} = -\frac{700 \cdot 60}{10}\left[\frac{1}{300} - \frac{1}{360}\right]$$

Presión de vapor

$$\ln \frac{P}{10^5} = -4 \cdot 10^3 \left[\frac{60}{300 \cdot 360} \right]$$

$$\ln \frac{P}{10^5} = -4 \cdot 6 \cdot 10^{-1}$$

$$P = 10^5 e^{-2.4} \approx 10^4 \text{ Pa}$$

$$P = 0.70 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

¿Qué pesa más, el aire del aula o las personas que la ocupan?

¿Cuánta agua, en forma de vapor, hay en el aula?

Número de granos de trigo

El rey y el inventor del ajedrez

Número de granos de trigo

La suma es

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdot$$

En la última casilla hay 2 elevado a 63 granos

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdot + 2^{63}$$

Suma de una progresión aritmética

$$S = \frac{rS_n - S_0}{r - 1}$$

Número total de granos de trigo

$$S = 2 \cdot 2^{63} - 1 \approx 2^{64}\,\mathrm{grn}$$

Número de granos de trigo

$$S = 2 \cdot 2^{63} - 1 \approx 2^{64}$$

$$64 \cdot 0.3 = 19,2$$

$$2^{64} \approx 10^{0,2} \cdot 10^{19}$$

$$10^{0,2} \approx 1,5$$

El número total de granos de trigo es

$$S = 1,5 \cdot 10^{19}\,\mathrm{grn}$$

$$S = 1,5 \cdot 10.000.000.000.000.000.000$$

Número de granos de trigo

$$S = 1,5 \cdot 10.000.000.000.000.000.000$$

Volumen de un grano

$$V_1 \approx 1\,\mathrm{mm}^3$$

Volumen total

$$V \approx 1,5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^3$$

Lado de un cubo

$$L \approx 2,5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$$

Un cubo de unos 2,5 km de lado.

Número de granos de trigo

$$S = 1,5 \cdot 10.000.000.000.000.000.000$$

Granos por espiga

$$100$$

Espigas por metro cuadrado

$$20 \cdot 20 = 400$$

Metros (kilómetros) cuadrados

$$n = \frac{1,5 \cdot 10^{19}}{4 \cdot 10^{4}} \approx 4 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^2 = 4 \cdot 10^{8}\,\mathrm{km}^2$$

Superficie del planeta Tierra

$$A_{\mathrm{T}} \approx 4\pi(7 \cdot 10^{3})^2 \approx 500 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}^2$$

Ascender una montaña

Energía de una lata de refresco con azucar

$$6 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Energía potencial de ascender una montaña

$$E_p = 100 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^6 \text{ J}$$

3 latas de refresco con azucar

Energía en la gasolina

Cada reacción química produce una energía de 1.5 eV

La gasolina está formada por unidades de

$$CH_2$$

1 kg de gasolina contiene

$$N = \frac{1\ \text{kg}}{1.4 \times 10^{-2}\ \text{kg/mol}} = 70\ \text{mol}$$

$$E = 70\ \frac{\text{mol}}{\text{kg}} 6 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{reac.}}{\text{mol}} 3\ \frac{\text{eV}}{\text{reac.}} 1\ \frac{\text{J}}{6 \cdot 10^{18}\ \text{eV}} = 2 \cdot 10^{7}\ \text{J/kg}$$

Energía cinética de un avión

Un avión pesa 200.000 kg

Velocidad de 200 km/hora

$$K = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^5 \cdot 60^2 = 4 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Un avión lleva unos 90.000 L de gasolina

Cálculos aproximados

Estimaciones

FIN

Prof. J Güémez
Dpto. Física Aplicada
Universidad de Cantabria