
REALIZACIÓN DE LA MEDIDA Y ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRES

1 Introducción

Medir es determinar el valor de una magnitud física comparándola con un patrón que se denomina *unidad de medida*. Por tanto, es imprescindible que todo valor numérico resultante de una medida venga acompañado de sus unidades. Por ejemplo, si alguien dice que la velocidad de un avión es de 800 no nos da ninguna información; ¿800 qué?, ¿metros por segundo?, ¿kilómetros por hora?, ¿nudos?...

Sólo al indicar la cantidad medida junto con sus unidades, p.ej. 800 km/h, se nos está dando alguna información. Existen diferentes sistemas de unidades, siendo posible pasar de un sistema a otro mediante operaciones aritméticas simples. Hoy en día el sistema de unidades más empleado es el llamado **Sistema Internacional** (SI). Las siete magnitudes básicas, junto con las unidades correspondientes SI son:

1. Longitud (metro, m).
2. Masa (kilogramo, kg).
3. Tiempo (segundo, s).
4. Corriente eléctrica (amperio, A).
5. Temperatura termodinámica (kelvin, K).
6. Cantidad de sustancia (mol, mol).
7. Intensidad luminosa (candela, cd).

Desafortunadamente, no es posible realizar una medida que esté libre de errores. Estos errores pueden deberse a múltiples causas. Aunque algunos errores tienen su origen en fallos humanos, siempre existen errores inherentes al proceso de medida, y que son imposibles de evitar. El orden de magnitud del error total de la medida es su *precisión*. Cuando damos el valor de una magnitud física, es muy conveniente saber cuan fiable es ese valor; esta *fiabilidad* nos la mide la precisión y para conocerla hay que estimar el error. En este guión aprenderemos a estimar el error cometido al realizar una medida en el laboratorio.

2 Tipos de errores

Los errores se suelen clasificar en tres grandes grupos: de precisión, sistemáticos y accidentales.

- **Error de precisión:** Todo equipo de medida tiene al menos una escala. La división más pequeña de la escala determina la mínima diferencia de magnitud que puede apreciar el equipo, es decir: su *resolución*.

Por ejemplo, una regla convencional está dividida en centímetros y milímetros. Por tanto, cualquier medida que realicemos con dicha regla sólo nos permite conocer la longitud de un objeto con un error aproximado de 1 mm. Solo podemos disminuir este error si utilizamos un aparato de medida con mayor resolución.

A este tipo de error se le denomina *error de precisión*. Es pues el debido a la resolución del aparato de medida. En este guión lo designaremos como ε_p .

- **Errores sistemáticos:** Su origen suele deberse a un mal funcionamiento o calibración del equipo de medida. Normalmente su efecto es incrementar o disminuir el valor de la medida siempre en la misma cantidad. Una vez determinado su origen es posible eliminarlo totalmente de la medida.

Un caso sencillo de este tipo de error es un reloj que atrasa. El reloj marcará siempre la hora atrasada respecto de la correcta. Podemos establecer la hora correcta a partir de la errónea si sabemos cuanto atrasa el reloj. Otra solución es reparar el reloj.

La única manera segura de tratar estos errores es asegurarse del correcto funcionamiento de los equipos de medida.

- **Errores accidentales:** Son los resultantes de la contribución de numerosas fuentes incontrolables que desplazan de forma aleatoria el valor medido por encima y por debajo de su valor real. También suelen denominarse errores *aleatorios* o *estadísticos*. Los errores accidentales, al contrario que los errores sistemáticos, son inevitables y están presentes en todo experimento.

Por ejemplo, si deseamos cronometrar un segundo con un reloj digital con una precisión de una centésima de segundo, se comprueba que debido al tiempo necesario para pulsar el botón de parada del cronómetro, no conseguimos detenerlo justamente cuando marca 1.00 s, sino que siempre cometemos un error de unas pocas centésimas de segundo. Unas veces este error sera en exceso y otras veces por defecto. Estas centésimas de segundo son el error accidental que comete el experimentador al usar el cronómetro, y solo se deben en este caso a la pericia del experimentador; no al funcionamiento o calibración del reloj.

El error accidental se designa en este guión como ε_{acc} . En las siguientes secciones aprenderemos a realizar correctamente el tratamiento matemático de estos errores.

El error total de una medida es una combinación de los tres tipos de errores. Naturalmente no se conoce su valor exacto (¡si lo conociésemos dejaría de ser un error!) pero puede y debe ser estimado. Si la magnitud medida es x , llamaremos al error Δx .

3 Modo de expresar los resultados

Una vez que hemos medido una cierta magnitud x y que sabemos que su error es Δx , debemos expresar el resultado como:

$$x = (x_0 \pm \Delta x) \text{ [unidades]}, \quad (1)$$

donde tanto la medida x_0 como la incertidumbre (Δx) se expresarán en las **mismas** unidades.

EJEMPLO

Con una regla se ha medido la altura de una persona. El resultado obtenido es de 1.90 m y el error cometido es 2 cm. La forma correcta de expresar el resultado de la medida es:

$$\text{altura} = (1.90 \pm 0.02) \text{ m.}$$

4 Medidas directas

Una medida directa es la que se obtiene de un aparato de medida. A continuación estudiaremos el tratamiento de los errores de este tipo de medidas suponiendo que están libres de errores sistemáticos.

4.1 Error cometido al realizar una sola medida de una magnitud

Cuando realizamos una única medida de una magnitud x , el error cometido viene dado únicamente por el **error de precisión**, $\Delta x = \varepsilon_p$, del aparato utilizado. Para determinar ε_p se distinguen dos casos según el aparato sea analógico o digital.

- Analógico: el error de precisión es la mitad de la división más pequeña que puede medir el aparato:

$$\varepsilon_p = \text{división más pequeña} \times \frac{1}{2}$$

Por ejemplo, el error de precisión de una regla dividida en milímetros es de $\varepsilon_p = 0.5 \text{ mm}$.

- Digital: El error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el aparato.

$$\varepsilon_p = \text{mínima magnitud medible}$$

Por ejemplo, el error de precisión de un cronómetro digital que permite medir segundos es de $\varepsilon_p = 1$ s.

4.2 Error cometido al realizar n medidas de una magnitud

En general, efectuar una única medida de una magnitud es poco fiable. Muchos factores pueden influir en que sea incorrecta, como por ejemplo haber leído mal la escala del aparato, un despiste a la hora de apuntar la medida, etc.

Para evitarlo se debe repetir la medición de la misma magnitud x varias veces. Como resultado obtendremos una serie de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, cada uno afectado por el error de precisión ε_p . ¿Pero cuál de estos valores es el más fiable? ¿Con cuál de todos nos quedamos? La mejor aproximación al verdadero valor de x vendrá dada por la media aritmética ($\bar{x}$) de las n medidas:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

El error cometido al aproximar el valor verdadero de x por $\bar{x}$ es el llamado error accidental ε_{acc} , que se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{acc} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (3)$$

Para estimar el error final de nuestras medidas, Δx , usaremos el máximo entre el error de precisión y el error accidental calculado:

$$\Delta x = \max(\varepsilon_p, \varepsilon_{acc}). \quad (4)$$

Por tanto el valor más fiable será x con un error Δx dado por la ecuación anterior.

EJEMPLO

Se han realizado 10 medidas de la longitud L de una barra. Los resultados pueden verse en la Tabla 1. Hacer la mejor aproximación posible al valor verdadero de L y estimar el error cometido.

Como la regla es un aparato analógico, el error de cada medida es $\Delta L_i = \varepsilon_p = 0.5$ mm = 0.05 cm.

La mejor aproximación al valor verdadero de L es la media aritmética de las medidas:

$$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_i}{10} = 14.91 \text{ cm.}$$

Para calcular el error accidental de $\bar{L}$ utilizaremos los cálculos de la Tabla 2.

El error accidental se obtiene mediante la ecuación (3):

$$\varepsilon_{acc}(\bar{L}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (L_i - \bar{L})^2}{10 \cdot 9}} = 0.21 \text{ cm.}$$

i	$L_i \pm 0.1 \text{ (cm)}$
1	15.2
2	14.6
3	13.8
4	14.5
5	15.3
6	15.0
7	14.2
8	15.5
9	16.1
10	14.9

Tabla 1: Resultados obtenidos para las 10 medidas de la longitud de una barra.

i	$L_i \pm 0.1 \text{ cm}$	$L_i - \bar{L}$	$(L_i - \bar{L})^2$
1	15.2	0.29	0.0841
2	14.6	-0.31	0.0961
3	13.8	-1.11	1.2321
4	14.5	-0.41	0.1681
5	15.3	0.39	0.1521
6	15.0	0.09	0.0081
7	14.2	-0.71	0.5041
8	15.5	0.59	0.3481
9	16.1	1.19	1.4161
10	14.9	-0.01	0.0001
Σ	149.1	0	4.009

Tabla 2: Listado con las diferentes medidas realizadas y las correspondientes desviaciones.

La incertidumbre en la medida será por tanto:

$$\Delta L = \max(\varepsilon_p, \varepsilon_{acc}) = \max(0.1, 0.21) = 0.21 \text{ cm.}$$

5 Cifras significativas: Redondeo

Cuando estimamos el error de una medida, el valor obtenido presenta con frecuencia un número arbitrario de cifras. Es evidente que no tiene mucho sentido emplear muchas cifras en el error ya que el valor que obtenemos es solo una estimación y es la primera cifra distinta de cero la que determina su magnitud.

En el ejemplo anterior, el error obtenido era $\Delta L = 0.21 \text{ cm}$. La cifra más significativa nos dice que tenemos un error del orden de las décimas de centímetro. Frente a un error de este orden, es indiferente un error de 1 milésima de cm o de 2 centésimas de cm.

El valor del error ΔL indica que la medida $\bar{L}$ no es fiable por debajo de las décimas de cm, por lo que no tiene ningún sentido expresarla con mayor precisión.

Así se establece que el valor de una medida no puede tener más precisión que la que tiene su error. El procedimiento consiste en redondear en primer lugar el valor del error para que solo tenga una cifra distinta de cero y por tanto determinar el orden de magnitud¹ de la cifra más significativa², y en segundo lugar redondear el valor de la medida de acuerdo con el anterior.

Emplearemos los siguientes criterios para redondear el valor de una medida con su error:

1. **El valor de la medida y del error deben expresarse en las mismas unidades.**
2. **En el error sólo debe emplearse una cifra distinta de cero.** Por ejemplo, un error de 0.214 s debe escribirse como 0.2 s y un error de 97 kg como 100 kg. Haremos una excepción cuando la cifra más significativa distinta de cero es el 1 y la segunda cifra es menor o igual que 5, en cuyo caso debe mantenerse la cifra que sigue al 1 para expresar el error. Por ejemplo, un error de 0.124 kg se redondea a 0.12 kg.

Para llegar a estos resultados hemos redondeado los valores de acuerdo a las siguientes reglas:

- a) Si la primera cifra que se suprime es mayor que 5, la última cifra conservada debe aumentarse en 1 unidad. Por ejemplo, si redondeamos 0.482371 s debemos escribir 0.5 s ya que la primera cifra que se suprime es $8 > 5$ con lo que hay que sumar una unidad al 4.
- b) Si la primera cifra que se suprime es menor que 5, la última cifra conservada no varía. Así 325.76 m redondeado en la cifra más significativa será 300 m.
- c) Si la primera cifra que se suprime es igual a 5, pueden darse dos casos:
 - Entre las siguientes cifras suprimidas, hay otras distintas de cero: en este caso, la última cifra conservada se aumenta en 1. Por ejemplo, 25.153 s se redondea a 30 s.
 - Todas las cifras suprimidas, salvo el 5, son cero: en este caso, la última cifra conservada no varía. Por ejemplo, 35.0000 N se redondea a 30 N.

Estas reglas de redondeo se aplican tanto al valor del error como al de la medida.

¹Orden de magnitud de una cifra: Dado un número, el orden de magnitud de una de sus cifras es la potencia de 10 por la que se multiplica esa cifra para obtener el número. Por ejemplo, dado el número $2307 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$, el orden de magnitud del 2 es tres (o equivalentemente millares), el orden de magnitud del 3 es dos (o centenas), el del 0 es uno (decenas) y el del 7 es cero (unidades).

²Cifra más significativa: Es la primera cifra distinta de cero empezando por la izquierda. Así, en el número 5281 la cifra más significativa es el 5.

3. **El valor de la medida debe tener la misma precisión que el error.** Esto significa que al redondear hay que convertir en cero todas las cifras cuyo orden de magnitud sea inferior al del error. Sin embargo, al contrario que el error, el resultado sí puede tener más de una cifra distinta de cero. Para redondear la medida es necesario haber redondeado antes el error. Así, por ejemplo, si el error es 0.67 kg y el valor de la medida es 35.8324 kg, el resultado final se expresa como: (35.8 ± 0.7) kg. Si el error fuera de 6.7 kg, el resultado sería (36 ± 7) kg.

Como aplicación de todo lo que acabamos de explicar, vamos a estudiar unos ejemplos.

EJEMPLO

Redondear y expresar correctamente las medidas e incertidumbres presentadas en la Tabla 3 de acuerdo con los criterios anteriormente expuestos:

x (m)	Δx (m)	Δx_{red} (m)	x_{red} (m)	$(x_{red} \pm \Delta x_{red})$ (m)
1.978	0.017	0.02	1.98	1.98 ± 0.02
35.723	0.088	0.09	35.72	35.72 ± 0.09
2.764	0.0973	0.10	2.76	2.76 ± 0.10
0.38	0.28	0.3	0.4	0.4 ± 0.3
11	0.72	0.7	11.0	11.0 ± 0.7
46.68	0.826	0.8	46.7	46.7 ± 0.8
158.978	10.87	11	159	159 ± 11
864.3	46.3	50	860	860 ± 50
789.91	440.43	400	800	800 ± 400
35.389	540.23	500	0	0 ± 500

Tabla 3: Medidas e incertidumbres asociadas sin redondear, redondeadas y resultados finales.

6 Error absoluto y error relativo: Análisis del error

Hasta ahora hemos estudiado únicamente el denominado error absoluto Δx . Para determinar si el error de la medida es grande o no en comparación con ésta, recurrimos al denominado **error relativo**, definido como:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\Delta x}{x}, \quad (5)$$

o como

$$\varepsilon_{rel}(\%) = \frac{\Delta x}{x} \times 100, \quad (6)$$

si lo expresamos en %.

EJEMPLO

Supongamos que hemos medido la distancia de la Tierra al Sol (R_{TS}) y de Marte al Sol (R_{MS}), y que los resultados obtenidos son:

$$\begin{cases} R_{TS} = (1.5 \pm 0.4) \times 10^8 \text{ km}, \\ R_{MS} = (22.8 \pm 0.4) \times 10^8 \text{ km}. \end{cases}$$

Estimar el error relativo en ambos casos.

En ambos casos, el error absoluto es el mismo: 0.4×10^8 km. Sin embargo, el error cometido es mucho más importante en el primer caso (R_{TS}) que en el segundo (R_{MS}), como se pone de manifiesto al calcular el error relativo:

$$\begin{cases} \varepsilon_r(R_{TS}) = \frac{0.4 \times 10^8}{1.5 \times 10^8} \times 100 = 27\% \\ \varepsilon_r(R_{MS}) = \frac{0.4 \times 10^8}{22.8 \times 10^8} \times 100 = 2\% \end{cases}$$

7 Medidas indirectas

Es frecuente que nos encontremos en el laboratorio con magnitudes que no podemos medir directamente con el aparato de medida, sino que deben determinarse de forma indirecta a partir de otras magnitudes que se han medido directamente en el laboratorio. En este caso se dice que **la medida es indirecta**. Por ejemplo, una medida indirecta es la superficie de un rectángulo a partir de la medida en el laboratorio de las longitudes de sus lados.

El error de la medida indirecta es función de los errores de las medidas directas que utilizamos para su cálculo. El método para calcular este error se conoce como propagación de errores.

7.1 Propagación de errores

Supongamos que queremos calcular el valor de una magnitud y que es función de una serie de magnitudes $x_1, x_2, \dots, x_n$, cuyos valores se pueden obtener de una manera directa en el laboratorio, es decir que:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7)$$

En primer lugar calcularemos los correspondientes $\bar{x}_i \pm \Delta x_i$ tal y como ya se ha descrito en anteriores apartados. La mejor estimación de y se obtiene sustituyendo en la expresión (7) los valores obtenidos de $\bar{x}_i$:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (8)$$

Para estimar el error de y podemos usar la **regla de las derivadas parciales** o la **regla del neperiano**, que describiremos a continuación.

7.1.1 Regla de las derivadas parciales

Si suponemos que el error Δx_i de las variables x_i es suficientemente pequeño, se puede demostrar que el error $\Delta \bar{y}$ viene dado aproximadamente por:

$$\Delta \bar{y} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_i} \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_i} \Delta x_2 + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}_i} \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_i} \Delta x_i. \quad (9)$$

Hay que darse cuenta de que todos los términos de (9) deben tomarse en valor absoluto, ya que, siendo las incertidumbres Δx_i siempre positivas, todas las contribuciones a la incertidumbre global deberán sumar (y no restar).

NOTA: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la **derivada parcial** de f respecto a la variable x_i ; esto significa derivar la función f respecto a la variable x_i tratando las demás variables como si fueran constantes (ver ejemplos). El subíndice $\bar{x}_i$ que aparece junto a las derivadas parciales indica que una vez realizada la derivada parcial deben sustituirse en el resultado los correspondientes valores de $\bar{x}_i$ (cuando sólo se haya realizado una medida de la variable x_i , $\bar{x}_i$ será simplemente el valor medido de x_i).

EJEMPLO

Si una magnitud física y está determinada por la ecuación $y = a_1 x_1 \pm a_2 x_2$, donde a_1 y a_2 son constantes sin error, y los errores de x_1 y x_2 son Δx_1 y Δx_2 respectivamente, calcular la expresión del error de y .

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \pm a_2,$$

por tanto,

$$\Delta y = |a_1| \Delta x_1 + |a_2| \Delta x_2.$$

EJEMPLO

Si una magnitud física y está determinada por la ecuación $y = x_1^n \cdot x_2^m$, donde n y m son constantes sin error, y x_1 y x_2 tienen errores Δx_1 y Δx_2 respectivamente, calcular la expresión del error de y .

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = n x_1^{n-1} x_2^m, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = m x_2^{m-1} x_1^n,$$

por tanto,

$$\Delta y = |n x_1^{n-1} x_2^m| \Delta x_1 + |m x_2^{m-1} x_1^n| \Delta x_2.$$

EJEMPLO

Supongamos que se ha medido el radio de una esfera con una precisión de 1 mm: $R = 25 \pm 1$ mm. Calcular el área (A) y el volumen (V) de la esfera con sus respectivos errores.

Las fórmulas para la superficie y el volumen de una esfera son:

$$A = 4\pi R^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Introduciendo los datos en dichas expresiones tenemos lo siguiente:

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi \times 25^2 = 7853.98 \text{ mm}^2,$$

$$\Delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial R} \right| \Delta R = 8\pi R \Delta R = 8\pi \times 25 \times 1 = 628.32 \text{ mm}^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi 25^3 = 65449.85 \text{ mm}^3,$$

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial R} \right| \Delta R = 4\pi R^2 \Delta R = 4\pi \times 25^2 \times 1 = 7853.98 \text{ mm}^3.$$

Los resultados finales serán:

$$A = 7900 \pm 600 \text{ mm}^2 = (7.9 \pm 0.6) \times 10^3 \text{ mm}^2,$$

$$V = 65000 \pm 8000 \text{ mm}^3 = (6.5 \pm 0.8) \times 10^4 \text{ mm}^3.$$

EJEMPLO

Se han realizado 5 medidas de cada una de las resistencias R_1 y R_2 de un circuito. Los valores obtenidos fueron: $R_1 = 4.5, 4.8, 5.2, 4.9, 5.1 \Omega$ y $R_2 = 20.5, 20.2, 19.8, 20.2, 20.0 \Omega$. La precisión de cada medida individual es de 0.1Ω . Hallar el mejor valor de R_1 y R_2 , y estimar el error correspondiente. Si se conectan en serie, ¿cuál será la resistencia equivalente del circuito?. ¿Y si se conectan en paralelo?

Podemos construir la siguiente tabla para las medidas de R_1 y R_2 .

i	$R_{1i} \pm 0.1 \Omega$	$R_{1i} - \overline{R_1}$	$(R_{1i} - \overline{R_1})^2$	$R_{2i} \pm 0.1 \Omega$	$R_{2i} - \overline{R_2}$	$(R_{2i} - \overline{R_2})^2$
1	4.5	-0.4	0.16	20.5	0.36	0.1296
2	4.8	-0.1	0.01	20.2	0.06	0.0036
3	5.2	0.3	0.09	19.8	-0.34	0.1156
4	4.9	0	0	20.2	0.06	0.0036
5	5.1	0.2	0.04	20.0	-0.14	0.0196
Σ	24.5	0	0.3	100.7	0	0.272

Tabla 4: Listado con las diferentes medidas de R_1 y R_2 y las correspondientes desviaciones.

Los valores medios de R_1 y R_2 son:

$$\begin{aligned}\overline{R_1} &= \frac{\sum R_{1i}}{5} = 4.9 \, \Omega, \\ \overline{R_2} &= \frac{\sum R_{2i}}{5} = 20.14 \, \Omega.\end{aligned}$$

El error accidental:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{acc}(\overline{R_1}) &= \sqrt{\frac{\sum (R_{1i} - \overline{R_1})^2}{5 \cdot 4}} = 0.1225 \, \Omega, \\ \varepsilon_{acc}(\overline{R_2}) &= \sqrt{\frac{\sum (R_{2i} - \overline{R_2})^2}{5 \cdot 4}} = 0.1166 \, \Omega.\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos para los errores totales y resultados:

$$\begin{aligned}\Delta \overline{R_1} &= \max(\varepsilon_p(R_1), \varepsilon_{acc}(\overline{R_1})) = \max(0.1, 0.1225) = 0.1225 \, \Omega \implies R_1 = 4.90 \pm 0.12, \\ \Delta \overline{R_2} &= \max(\varepsilon_p(R_2), \varepsilon_{acc}(\overline{R_2})) = \max(0.1, 0.1166) = 0.1166 \, \Omega \implies R_2 = 20.14 \pm 0.12.\end{aligned}$$

Si las resistencias están en serie, la resistencia equivalente será:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 25.04 \, \Omega,$$

donde los valores de R_1 y R_2 utilizados son los promedios obtenidos anteriormente, **sin redondear**. El redondeo se realiza siempre al final, a la hora de expresar el resultado final.

A continuación calculamos el error:

$$\Delta \overline{R_{eq}} = \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 0.1225 + 0.1166 = 0.2391 \, \Omega.$$

El resultado final será:

$$R_{eq} = 25.0 \pm 0.2 \, \Omega.$$

Si las resistencias están en paralelo, la resistencia equivalente será:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3.94 \, \Omega,$$

donde nuevamente los valores de R_1 y R_2 utilizados han sido los promedios obtenidos anteriormente, **sin redondear**.

A continuación calculamos el error:

$$\Delta \overline{R_{eq}} = \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 = \frac{R_2^2 \Delta R_1}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{R_1^2 \Delta R_2}{(R_1 + R_2)^2} = 0.0837 \, \Omega.$$

El resultado final será:

$$R_{eq} = 3.94 \pm 0.08 \, \Omega.$$

7.1.2 Regla del neperiano

La regla de las derivadas parciales es válida siempre. Sin embargo, cuando la función f solo tiene productos, divisiones o potencias (o es una combinación de estas operaciones), una forma alternativa de calcular el error de y es proceder de la siguiente forma:

1. Se toma el logaritmo neperiano de los dos miembros de la ecuación $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10)$$

2. Se toman diferenciales de los dos miembros de la ecuación anterior.
3. Se identifican los elementos diferenciales con los errores de las variables ($dy \rightarrow \Delta y$), ($dx_i \rightarrow \Delta x_i$) y se sustituyen los valores correspondientes de $\bar{y}$ y $\bar{x}_i$ en la expresión final.

EJEMPLO

Si una magnitud física y se determina mediante la siguiente ecuación:

$$y = \frac{x_1^n x_2}{x_3},$$

a partir de las medidas directas $x_1 \pm \Delta x_1$, $x_2 \pm \Delta x_2$ y $x_3 \pm \Delta x_3$, determinar el error propagado de y .

Para ello, seguiremos los tres pasos anteriormente citados:

1. Tomamos logaritmos neperianos en ambos lados de la ecuación:

$$\ln y = \ln \left(\frac{x_1^n x_2}{x_3} \right) = n \ln x_1 + \ln x_2 - \ln x_3,$$

2. Derivamos:

$$\frac{dy}{y} = n \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} - \frac{dx_3}{x_3}.$$

3. Identificamos los elementos diferenciales con errores, cambiando el signo de aquellos que lo presenten negativo:

$$\frac{\Delta y}{y} = n \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3}.$$

Finalmente, el error queda,

$$\Delta y = \left(n \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \frac{\Delta x_3}{|x_3|} \right) y.$$

NOTA

No se debe aplicar la regla del neperiano cuando en y aparezcan funciones distintas de productos, divisiones o potencias (como por ejemplo funciones seno, coseno, logaritmos, etc).

8 Leyes físicas: Análisis de la dependencia entre variables

Muchas leyes físicas establecen la dependencia de una variable en función de otra. Por ejemplo, la relación entre la posición x y la velocidad v de un móvil con movimiento rectilíneo uniforme es,

$$x = x_0 + vt. \quad (11)$$

Existe una relación lineal entre x y t donde x_0 y v son los coeficientes de dicha relación.

Una ley física es válida si al realizar las medidas experimentales de una de las variables en función de la otra se comprueba que siguen la relación matemática predicha por la ley física. En nuestro ejemplo, deberíamos medir la posición $x(t_i)$ del móvil en distintos instantes temporales t_i , para luego comprobar si es cierta la relación lineal de la ley enunciada en la ecuación (11). Si se cumple esta relación lineal podemos determinar tanto el valor de x_0 como el de v a partir de los datos experimentales.

A continuación se explican dos métodos que permiten comprobar las relaciones de proporcionalidad entre dos variables y obtener el valor de los coeficientes de proporcionalidad.

8.1 Método gráfico

Cuando una cantidad y es linealmente proporcional a otra x , al representar gráficamente una frente a la otra se obtiene una línea recta. La ecuación general de una recta de variables x e y es:

$$y = mx + b, \quad (12)$$

donde m es la pendiente de la recta y b su ordenada en el origen. Por tanto, si la ley física que describe matemáticamente la relación entre los datos experimentales que

se han tomado en el laboratorio sigue una relación lineal, la nube de puntos que se forma al representarlos gráficamente debería estar dispuesta aproximadamente según una recta, tal y como puede verse en la figura 1.

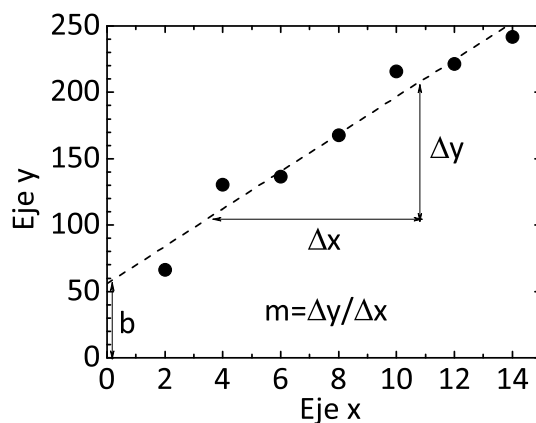


Figura 1: Ajuste lineal de la nube de puntos utilizando el método gráfico: $m = \Delta y / \Delta x$ es la pendiente de la recta y b es la ordenada en el origen. La recta a trazos se ha realizado “a ojo”.

En la figura 1, la recta discontinua ha sido trazada “a ojo”, y es la recta que parece ajustar mejor a los puntos experimentales representados (hay que darse cuenta en este punto de que el presente método es poco riguroso). De esta forma, se puede obtener el valor numérico de m y b tal y como se indica en dicha figura.

Si al representar los puntos experimentales se ve que no se ajustan a una recta se puede afirmar que la relación entre x e y no es lineal, con lo que no tiene sentido calcular m y b .

En el ejemplo propuesto, como resultado de las medidas del laboratorio obtendríamos una serie de parejas de valores de $x(t_i)$ y t_i . Supongamos que las medidas obtenidas son las mostradas en la tabla 5, cuya representación gráfica es la figura 1.

tiempo t (s)	posición $x(t)$ (m)
2.0	66.3
4.0	130.3
6.0	136.5
8.0	167.6
10.0	215.6
12.0	221.2
14.0	241.6

Tabla 5: Medidas experimentales de la posición x de un cuerpo en función del tiempo t .

Se observa que los puntos experimentales se distribuyen siguiendo una línea recta como predice la ley física descrita por la ecuación 11. Es importante fijarse que dicha

ecuación es la de una recta donde $x \rightarrow t$, $y \rightarrow x(t)$, con lo que se pueden identificar $m \rightarrow v$ y $b \rightarrow x_0$. Aplicando el método gráfico descrito anteriormente se obtiene: $m = v \approx 14$ m/s y $b = x_0 \approx 55$ m.

Merece la pena repasar las unidades, tanto de la pendiente m como de la ordenada en el origen b :

$$[m] = \frac{[y]}{[x]}, \quad [b] = [y]. \quad (13)$$

8.2 Método de Mínimos Cuadrados

El método gráfico es sencillo pero poco riguroso. Un método de fácil utilización es el llamado **método de mínimos cuadrados**.

Sea la ecuación de una recta:

$$y = mx + b. \quad (14)$$

El método de mínimos cuadrados da como mejor estimación de los parámetros m (**pendiente de la recta**) y b (**ordenada en el origen**) aquéllos que minimizan la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos experimentales a la recta. Es decir, si los puntos experimentales son $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, el mejor ajuste será para los valores de m y b que cumplan:

$$\sum (mx_i + b - y_i)^2 = \text{mínimo}. \quad (15)$$

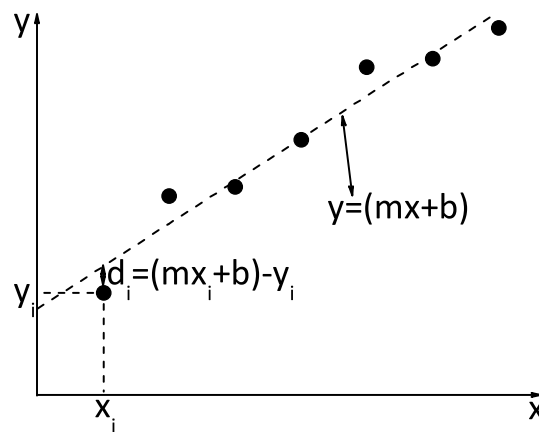


Figura 2: Ajuste lineal de la nube de puntos utilizando el método de mínimos cuadrados.

Se demuestra que el par de valores m y b que cumplen esta condición son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum y_i = m \sum x_i + bn, \\ \sum x_i y_i = m \sum x_i^2 + b \sum x_i. \end{cases} \quad (16)$$

Las soluciones quedan:

$$\begin{cases} m = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & n \\ \sum x_i y_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & n \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_i \sum x_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}, \\ b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & n \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}. \end{cases} \quad (17)$$

Como magnitudes dependientes de cantidades medidas, m y b poseen sus propios errores $(\Delta m, \Delta b)$, que pueden ser estimados mediante las siguientes relaciones en las que se ha supuesto que sólo las y_i tienen error, y todas el mismo: $\Delta y_i = \sigma$, $\forall y_i$, mientras que no se considera el error de las x_i : $\Delta x_i = 0$, $\forall x_i$. Si los errores σ_{y_i} no son iguales $\forall y_i$ utilizaremos la aproximación de sustituir dichos errores por la media $\sigma = \bar{\sigma}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i}$.

Las expresiones para los errores son:

$$\begin{cases} \Delta m = \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}, \\ \Delta b = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}. \end{cases} \quad (18)$$

Antes de aplicar el método de mínimos cuadrados conviene haber hecho la representación gráfica de los datos y observar que la relación entre variables es aproximadamente lineal. Si no lo es el método no será aplicable, tal y como ya se dijo anteriormente. Por último, al realizar los cálculos necesarios para obtener un ajuste por mínimos cuadrados es necesario usar todos los decimales que se obtengan de la calculadora. Solo al final se procederá a redondear los números.

EJEMPLO

Aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener la recta que mejor ajusta a la nube de puntos experimentales del ejemplo anterior.

Comparando la ecuación de una recta, $y = b + mx$, con la ley física, $x = x_0 + vt$, se tiene que $y = x(t)$, $b = x_0$, $m = v$ y $x = t$.

En la tabla 6 aparecen los cálculos necesarios para obtener los parámetros del ajuste. Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$m = v = 14.049 \text{ m/s}, \quad b = x_0 = 56.051 \text{ m}. \quad (19)$$

Si los errores experimentales de $x(t)$ y t eran $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ y $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, aplicando las ecuaciones para estimar Δm y Δb (tomando $\sigma = 0.1 \text{ s}$) se tiene:

$$\Delta m = \Delta v = 0.0094 \text{ m/s}, \quad \Delta b = \Delta x_0 = 0.0845 \text{ m}. \quad (20)$$

$x = t$ (s)	$y = x$ (m)	xy	x^2
2.0	66.3	132.6	4
4.0	130.3	521.2	16
6.0	136.5	819	36
8.0	167.6	1340.8	64
10.0	215.6	2156	100
12.0	221.2	2654.4	144
14.0	241.6	3382.4	196
$\sum x = 56$	$\sum y = 1179.1$	$\sum x_i y_i = 11006.4$	$\sum x_i^2 = 560$

Tabla 6: Tabla con los cálculos necesarios para obtener la pendiente m y la ordenada en el origen b utilizando el método de mínimos cuadrados.

Por tanto, los resultados finales tras redondear quedan:

$$v = (14.049 \pm 0.009) \text{ m/s}, \quad x_0 = (56.05 \pm 0.08) \text{ m.} \quad (21)$$

EJEMPLO

Se desea medir la resistencia en la rama de un circuito, para lo cual se miden distintos pares de valores de la intensidad de corriente y de la diferencia de potencial, obteniéndose los valores mostrados en la Tabla 7.

I (mA)	V (V)
102 ± 1	5.0 ± 0.5
196 ± 1	10.0 ± 0.5
297 ± 1	15.0 ± 0.5
402 ± 1	20.0 ± 0.5
496 ± 1	25.0 ± 0.5
612 ± 1	30.0 ± 0.5

Tabla 7: Valores experimentales de la corriente y diferencia de potencial en una rama del circuito.

Sabemos que, de acuerdo a la ley de Ohm, $V = IR$, por lo que ajustaremos los puntos de la tabla anterior por el método de mínimos cuadrados suponiendo la relación $V = IR + b$ y por comparación de los parámetros del ajuste, obtendremos el valor de la R de la rama del circuito. Para ello seguimos el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, tal como puede verse en la Tabla 8.

Los resultados son los siguientes:

$$m = R = 0.0492 \text{ k}\Omega = 49.2 \text{ }\Omega, \quad b = 0.2436 \text{ V.} \quad (22)$$

Para calcular los errores Δm y Δb tenemos que darnos cuenta de que $\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{y_i} = 0.5 \text{ V}$. Así, según la ecuación (20) se obtiene que:

$x = I \text{ (mA)}$	$y = V \text{ (V)}$	xy	x^2
102 ± 1	5.0 ± 0.5	510	10404
196 ± 1	10.0 ± 0.5	1960	38416
297 ± 1	15.0 ± 0.5	4455	88209
402 ± 1	20.0 ± 0.5	8040	161604
496 ± 1	25.0 ± 0.5	12400	246016
612 ± 1	30.0 ± 0.5	18360	374544
$\sum x = 2105$	$\sum y = 105$	$\sum x_i y_i = 45725$	$\sum x_i^2 = 919193$

Tabla 8: Procedimiento para obtener la pendiente y ordenada en el origen de la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales dados por la Tabla 7.

$$\Delta m = \Delta R = 0.001176 \text{ k}\Omega = 1.176 \Omega, \quad \Delta b = 0.4604 \text{ V.} \quad (23)$$

Finalmente, los resultados son:

$$m = R = (49.2 \pm 1.2) \Omega, \quad b = (0.2 \pm 0.5) \text{ V.} \quad (24)$$

Hay que darse cuenta de que la ordenada en el origen (b) es cero dentro de los errores experimentales, como cabría esperar, ya que $V = RI$, y por tanto b debe ser cero ($V = RI + b$).

8.3 Linealización de ecuaciones

Tanto el método gráfico como el de mínimos cuadrados solo se pueden aplicar cuando la relación entre las dos variables es lineal. Existen múltiples casos en los que la ley física está descrita por una relación no lineal. Por ejemplo la relación entre el espacio recorrido (x) por un móvil y el tiempo (t) en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, con velocidad inicial nula:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2, \quad (25)$$

siendo a la aceleración. En estos casos es posible linealizar dicha ecuación para que tenga la forma de una recta $y = mx + b$. Existen dos métodos:

1. Cambio de variable: consiste en realizar un cambio de variable de forma que obtengamos la ecuación de una recta. En el ejemplo anterior, si realizamos el cambio:

$$t^2 \rightarrow x, \quad x \rightarrow y,$$

nos queda la ecuación, $y = ax/2$, y comparando con la ecuación de una recta nos queda que: $m \rightarrow a/2$, $b \rightarrow 0$. Finalmente, despejando se obtiene el valor de a ($a = 2m$).

2. Uso de logaritmos:³ consiste en tomar logaritmos en la expresión matemática y utilizar las propiedades de éstos para linealizar la expresión. Por ejemplo, en el caso anterior, tomando logaritmos nos queda:

$$\log(x) = \log(at^2/2).$$

Al aplicar las propiedades de los logaritmos⁴ tenemos:

$$\log(x) = \log(a/2) + 2\log(t).$$

Finalmente, realizando el cambio de variable:

$$x \rightarrow \log(t), \quad y \rightarrow \log(x),$$

nos queda la ecuación lineal:

$$y = \log(a/2) + 2x,$$

y por tanto:

$$m \rightarrow 2, \quad b \rightarrow \log(a/2).$$

De aquí podemos despejar el valor de a , que en caso de haber usado logaritmos decimales queda:

$$a = 2 \cdot 10^b.$$

Si se utilizan logaritmos neperianos, el resultado será:

$$a = 2 \cdot e^b.$$

Una vez linealizada la ecuación se debe construir una nueva tabla de datos con las nuevas variables linealizadas y utilizar éstas para el cálculo de m y b . La representación gráfica de x frente a y debe aproximarse por una recta. Por ejemplo, en el caso de haber usado logaritmos construiríamos la siguiente tabla:

x	y
$\log(t_1)$	$\log(x_1)$
$\log(t_2)$	$\log(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
$\log(t_{n-1})$	$\log(x_{n-1})$
$\log(t_n)$	$\log(x_n)$

³Este método se podrá aplicar cuando la ecuación solo presente productos, divisiones y/o potencias.

⁴Algunas propiedades de los logaritmos: $\log(A \cdot B) = \log(A) + \log(B)$, $\log(A/B) = \log(A) - \log(B)$ y $\log(A^B) = B \log(A)$.

9 Gráficas

9.1 Normas generales

Una de las formas más útiles de presentar resultados experimentales es en forma de gráficas. Conviene tener presentes algunos puntos para aprovechar al máximo sus ventajas:

- Los puntos experimentales deben ser claramente visibles.
- Las escalas deben elegirse de forma que los puntos queden lo más espaciados posible. Para ello las escalas vertical y horizontal pueden ser diferentes si es necesario, y el origen de la gráfica no tiene por qué ser el punto $(0, 0)$.
- Los ejes deben marcarse a intervalos regulares, no para cada punto. Debe elegirse una escala cómoda, usando factores que faciliten el cálculo $(1, 2, 5, 10, \dots)$.
- Cuando se representan los puntos experimentales se deben representar también sus errores. Esto se realiza por medio de las barras de error. El método consiste en trazar una cruz con centro en el dato experimental en la que la longitud de los brazos a lo largo del eje x sea igual a Δx , y la longitud de los brazos a lo largo del eje y sea igual a Δy .
- Deben figurar las magnitudes representadas en cada eje, así como las unidades (éstas últimas entre paréntesis).
- Si los puntos experimentales se ajustan con una cierta curva, se debe trazar de forma continua, no poligonal.
- En el caso de que los puntos experimentales hayan sido ajustados a una recta por mínimos cuadrados, se debe dibujar dicha recta junto con los puntos experimentales.

9.2 Papeles milimetrado, logarítmico y semilogarítmico

El uso de papel milimetrado (ver figura 3a) facilita la realización de las gráficas. Cuando se marcan los intervalos en un eje milimetrado, la distancia entre puntos es proporcional a la diferencia entre valores. Por ejemplo, si se representan 3 valores $x_1 = 1$, $x_2 = 10$ y $x_3 = 100$ mediante los puntos P_1 , P_2 y P_3 , la distancia entre P_1 y P_2 será proporcional a $x_2 - x_1 = 9$, y la distancia entre P_2 y P_3 será proporcional a $x_3 - x_2 = 90$. Así, la distancia entre los puntos P_1 y P_2 será 10 veces menor que la distancia entre los puntos P_2 y P_3 .

Existe otro tipo de papel, llamado logarítmico (ver figura 3b), en el que la distancia entre puntos es proporcional a la diferencia entre los logaritmos de los valores. En un eje logarítmico, la distancia entre P_1 y P_2 será proporcional a $\log(x_2) - \log(x_1) = 1 - 0 = 1$, y la distancia entre P_2 y P_3 será proporcional a $\log(x_3) - \log(x_2) = 2 - 1 = 1$. De

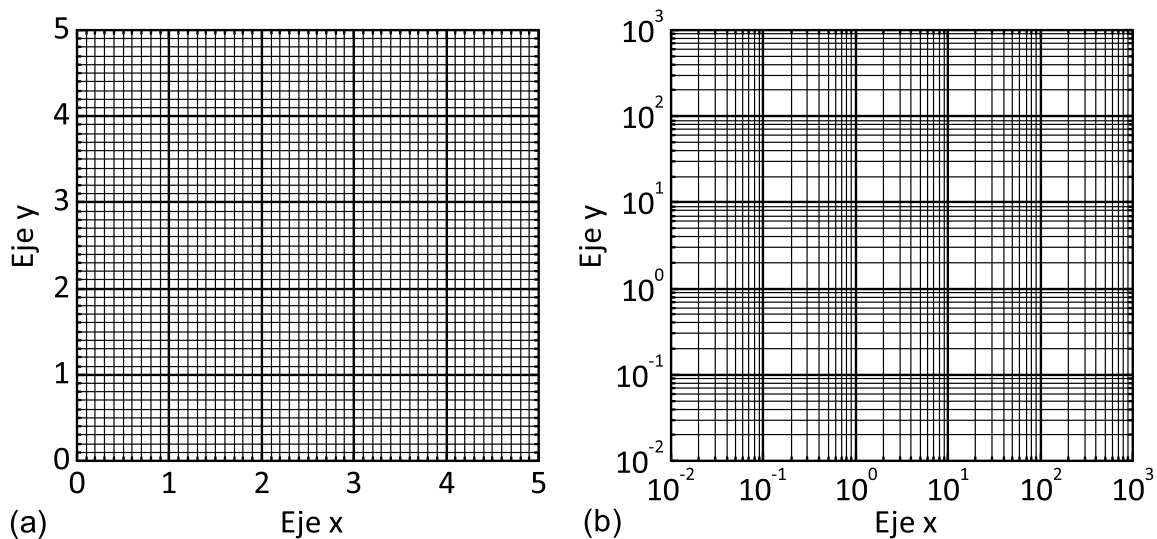


Figura 3: (a): Papel milimetrado. (b): Papel logarítmico.

este modo el propio papel efectúa la transformación a logaritmos, lo que representa una ventaja en muchos casos.

Esta transformación puede ser en los dos ejes (papel logarítmico) o en uno solo (papel semilogarítmico). Representar $\log(y)$ en función de $\log(x)$ en papel milimetrado normal, equivale a representar y en función de x en papel logarítmico. Análogamente, una representación del $\log(y)$ frente a x equivale a representar y frente a x en papel semilogarítmico (correspondiendo a la y la escala logarítmica).

10 Bibliografía

- “Análisis de errores”. C. Sánchez del Río. EUDEMA, 1989.
- “Statistics”. R. J. Barlow. John Wiley & Sons, 1989.
- “An Introduction to Error Analysis. The Study of Uncertainties in Physical Measurements”. J. R. Taylor. University Science Books (1982).
- www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/unidades/medidas/medidas.htm