NOMBRE: **Número**

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - 1 de Febrero de 2012

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Se considera el problema que modela la intensidad $I(t)$ de la corriente en un circuito eléctrico (modelo en Sección 1.6.3 del libro de apuntes), conociendo dicha intensidad en el instante $t = 0$

$$I'(t) + 2I(t) = 2sin(t), \quad I(0) = y_0$$

Resolver la ecuación diferencial. Razonar cuál de los campos de direcciones (y soluciones en el entorno MATLAB 'dfield5') proporcionados se corrensponde con la ecuación dada. Tomando $y_0 = 2$, estudiar la existencia y unicidad de solución del problema dado e intervalo de definición de ésta. Razonar si es posible que las gráfica de dos soluciones se corten como indican los dibujos proporcionados.

SOLUCION GENERAL de la ED

SOLUCION pasando por $(0, 2)$ / INTERVALO

RAZONAMIENTO BREVE:

- existencia y unicidad de solución
- posibles cortes de gráficas

GRAFICA (A)   o   (B)

Tachar lo que no proceda

RAZONAMIENTO BREVE:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Resolver el Problema de Cauchy

$$y' - 2y = -2\sin(t)y^2, \quad y(0) = 2$$

Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema dado e intervalo de definición de ésta.

SOLUCION GENERAL ED

SOLUCION EXPLICITA del problema

INTERVALO de definición

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3 Resolver

$$y''' - 2y'' + 2y' = \cos(t) + t$$

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION particular de $y''' - 2y'' + 2y' = t$

SOLUCION particular de $y''' - 2y'' + 2y' = \cos(t)$

SOLUCION GENERAL de la Ec. dada

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Resolver el problema de contorno para la ecuación de Euler (si no se sabe resolver demuestrar que tiene solución única)

$$(x+2)^2y'' + (x+2)y' - y = 1, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL EC NO HOMOGENEA

SOLUCION PROBLEMA
o RAZON breve de sobre unicidad

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5

a). Resolver el problema de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_1 + 9y_2 \\ y_2' & = & -y_1 - 5y_2 \end{array}\right.$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0,$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA

SOLUCION DEL PROBLEMA

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

b). Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + 9y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 5y_2 \\ y_3' &= y_3 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, y_3(0) = 1,$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA

SOLUCION DEL PROBLEMA

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6

Se considera un sistema resorte masa que empieza a vibrar por la acción de un impulso en el tiempo $t = \pi$ (modelos sección 2.7 del libro de apuntes)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Calcular la transformada de Laplace de la función $\delta(t - \pi)$ y la ecuación a la que se llega utilizando la transformada de Laplace(esto es, la transformada de Laplace la función $y(t)$) . Escribir el comando MATLAB que permite resolver dicha ecuación. Razonar (demostrando) cuál o cuáles de las siguientes funciones son soluciones de dicha ecuación. Hacer una gráfica aproximada de la solución

a). $y = -u(t - \pi)\sin(t)$

b). $y = u(t - \pi)e^{t-\pi}(t - \pi)$

c). $y = u(t)te^t + u(t - \pi)(t - \pi)e^{t-\pi}$

u es la función escalón (función MATLAB 'heaviside')

TRANSFORMADA de $\delta(t - \pi)$

TRANSFORMADA de $y(t)$ / COMANDO

Tachar lo que no proceda y dar una razón breve en cada caso

a). SOLUCION? SI o NO

b). SOLUCION? SI o NO

c). SOLUCION? SI o NO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x, \zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a, \zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2 \sin a\, \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$

$$2 \sin a\, \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)\,, \quad 2 \cos a\, \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$