NOMBRE: **Número**

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen 2-Febrero-2007

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

PRIMERA PARTE.

1). Se considera el problema de Cauchy

$$y' = e^{-x^2}\, y + 1, \quad y(0) = 1$$

a). Razonar en qué intervalo existe solución y es única.

b). Calcular la aproximación numérica, mediante el método de Euler, para el tamaño del paso $h = 0.1$, en el intervalo $[1, 1.2]$

c). Encontrar los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución.

INTERVALO...............................

Razonamiento breve:

APROXIMACION NUMERICA:

DESARROLLO:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

2). Resolver el problema de Cauchy

$$y' + \frac{y}{x} = x^2\, y^3, \quad y(1) = 1$$

Razonar en qué dominio Ω del plano se tiene garantizado que, por cada punto (x_0, y_0) exista una única solución explícita con gráfica pasando por (x_0, y_0). Razonar si se puede determinar el intervalo en el que está definida la solución del problema de Cauchy dado.

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION

SOLUCION DEL PROBLEMA DE CAUCHY

INTERVALO DE DEFINICION:

DOMINIO $\Omega =$

Razonamiento breve

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

3). Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 4y_2 + 2e^x cos(2x) \\ y_2' &= y_1 + y_2 - e^x sen(2x) \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

4). Se considera la ecuación

$$y''' - 3y' + 2y = e^{-2t}$$

Resolver la ecuación.

SOL. GENERAL ECUACION HOMOGENEA:

SOL. GENERAL ECUACION NO HOMOGENEA:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

5). Encontrar la aproximación mediante los seis primeros términos del desarrollo en serie potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x)$ de la solución de la ecuación

$$y'' - e^{-x^2} y = 0$$

en función de las constantes a_0, a_1

APROXIMACION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

6). Se considera el problema de contorno:

$$((x-1)^2\, y')' = 1\,, \quad x \in (2,3)$$

$$y(2) = 0, \quad y(3) = 0$$

Demostrar que admite solución única y encontrar esta solución.

SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

6)bis. Encontrar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$$

sabiendo que una solución particular es $y_1(x) = \frac{e^x}{x}$.

SOLUCION GENERAL

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta,b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales

2^0 Curso I. Industrial

Examen: SEPTIEMBRE-2007

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

1) Se considera el Problema de Cauchy

$$(PC) \qquad y' + \frac{y}{x} = ln(x)\, y^3, \qquad y(1) = 1$$

1). Resolver la ecuación diferencial (ver integrales p.2)

ECUACION LINEAL ASOCIADA ....

SOLUCION GENERAL ...

SOLUCION de (PC)

2). Escribir el dominio del plano Ω en que se tiene garantizado que, por cada punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe una única solución explícita con gráfica pasando por (x_0, y_0). Razonar si se puede determinar el intervalo en el que está definida la solución del problema de Cauchy (PC)

DOMINIO Ω =...

INTERVALO.............
(dar una razón breve)

3). Aproximar la solución del problema (PC) por el método de Euler en el intervalo en [1,1.2], para el tamaño del paso h=0.1

ESCRIBIR todos los (x_i, y_i) explicitamente

4). Aproximación de la solución del problema (PC) utilizando los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución

APROXIMACION DE LA SOLUCION....

```
>> %%%int(t*log(t))=1/2*t^2*log(t)-1/4*t^2
>> %%%int(t^2*log(t))=1/3*t^3*log(t)-1/9*t^3
>>
>> %%int(log(t)*t^3)=1/4*t^4*log(t)-1/16*t^4
>> %int(log(t)/t)=1/2*log(t)^2
>> %%int(log(t)/t^2)=-log(t)/t-1/t
>> %%int(log(t)/t^3)=-1/2*log(t)/t^2-1/4/t^2
```

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

2). Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 - e^x. \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

3) Se considera la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t + e^{-t}$$

Resolver la ecuación. Reducir la ecuación a un sistema diferencial con tres ecuaciones y escribir la solución general del sistema. Escribir la matriz fundamental de dicho sistema y la solución general de la ecuación en términos de la matriz fundamental (no es necesario hacer cálculos).

SOL. GENERAL ECUACION HOMOGENEA:

SOL. GENERAL ECUUACION NO HOMOGENEA:

SISTEMA EN FORMA MATRICIAL:

SOLUCION DEL SISTEMA EN FORMA VECTORIAL:

MATRIZ FUNDAMENTAL Y SOLUCION DE LA ECUACION DADA:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

4). Encontrar la aproximación mediante los siete primeros términos del desarrollo en serie potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ de la solución de la ecuación

$$y'' - 2\,\text{sen}(x)\,y = 0$$

en función de las constantes a_0, a_1

APROXIMACION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

5). Se considera el problema de contorno:

$$((x-1)^2 y')' = 1\,, \quad x \in (2,3)$$

$$y(2) = 0, \quad y(3) = 0$$

Demostrar que admite solución única y encontrar esta solución.

SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

6). Encontrar la solución del Problema de Cauchy

$$xy'' + 2y' - xy = e^x$$

$$y(1) = 3e/4; \quad y'(1) = e/2$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea es $y_1(x) = \frac{e^x}{x}$. Indicar el intervalo donde está definida.

SOLUCION GENERAL ECUACION

SOLUCION P. CAUCHY:

INTERVALO:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \, \exp(\int p(x)dx) \, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$