NOMBRE..**Número**.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen Parcial: 7-XII-2006

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1

Razonar para qué valor o valores de λ, $\lambda = 0$ ó $\lambda = \frac{1}{4} + (\frac{\pi}{\ln 2})^2$, podría obtenerse la aproximación dada por la gráfica mediante la función MATLAB *elementosfinitos* del problema de contorno

$$(1+x)^2 y'' + 2(x+1)y' + \lambda y = (x+1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Resolver si se puede.

Escribir claramente λ, el término a_{33} de la matriz de Rigídez y el término independiente f_3 para la distancia entre nodos $h = 0.1$ (especificar intervalos o límites de integración). Razonar todas las respuestas.

$\lambda =$.................................

$a_{33} =$.................................

$f_3 =$.................................

SOLUCION de (PC)......................

Escribir las soluciones de la ecuación homogénea para los λ dados.

PARA $\lambda = 0$..................

PARA $\lambda = \frac{1}{4} + (\frac{\pi}{\ln 2})^2$..................

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS: sobre λ y solución

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS: sobre aproximación

EJERCICIO 2.

Resolver los siguientes problemas, escribiendo el método de resolución y la solución exacta donde se pide y razonamientos en hojas adjuntas.

$$a) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_t - 16u_x &=& 0\,, \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) &=& \cos(\pi x), \quad x \in (-\infty, \infty), \end{array} \right.$$

METODO..................................

SOLUCION ....

$$b) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_t - 16u_{xx} &=& 0\,, \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) &=& \cos(\pi x), \quad x \in (-\infty, \infty), \end{array} \right.$$

METODO..................................

SOLUCION ....

$$c) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - 16u_{xx} &=& 0\,, \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) &=& \cos(\pi x), \quad x \in (-\infty, \infty), \\ u_t(x,0) &=& 0, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{array} \right.$$

METODO..................................

SOLUCION ....

$$d) \quad \begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0\,, & x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x), & x \in [0,1], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,1], \\ u_x(0,t) = 0 \quad , & u_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

METODO...................................

SOLUCION ....

$$e) \quad \begin{cases} u_t - 16u_{xx} = 0\,, & x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x), & x \in [0,1], \\ u_x(0,t) = 0 \quad , & u_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

METODO...................................

SOLUCION ....

Escribir el problema de valores propios al que se llega en la resolución de alguno de los ejercicios a)-e).

PROBLEMA:

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS (indicar el problema que se resuelve de a)-6))

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS (indicar el problema que se resuelve de a)-6))

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS (indicar el problema que se resuelve de a)-6))

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE...**Número**.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen Final: 7 de Febrero de 2007

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1

Dada la ecuación en derivadas parciales:

$$5u_{\zeta\zeta} - 4u_{\zeta\eta} + 4u_{\eta\eta} = 0,$$

considérese el cambio $y = \eta$, $x = \zeta + \frac{\eta}{2}$ para reducir la ecuación a una del tipo ondas, calor o Laplace.

ESCRIBIR LA NUEVA ECUACION

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Resolver el problema mixto para la ecuación del calor en una barra conductora:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (-\pi,\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in [-\pi,\pi]\,, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) & , & u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)\,, \quad t \geq 0\,. \end{array}\right.$$

donde $f(x)$ es la función definida:

$$f(x) = sin(x) \text{ si } x \in [0,\pi], \qquad f(x) = 0 \text{ si } x \in [-\pi,0]$$

Calcular la temperatura del punto $x = 0$ de la barra en el instante de tiempo $t = 4$ segundos.

ESCRIBIR EXACTAMENTE
EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS,
LOS VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

LA SOLUCION

LA TEMPERATURA del punto 0 en el tiempo $t = 4$:

ESCRIBIR el desarrollo en serie de Fourier del dato inicial (*temperatura inicial*) en términos de las funciones propias obtenidas. Especificar todos los coeficientes del desarrollo que se anulan.

DESARROLLO:

COEFICIENTES QUE SE ANULAN:

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

Resolver si se puede el problema de contorno y aproximar mediante el Método de Galerkin tomando como funciones de base las proporcionadas por el programa *galerkin*:

$$\begin{cases} ((x+1)y')' - \frac{y}{x+1} = 1 \quad , \quad x \in (0,1) \\ \qquad\qquad\qquad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Demostrar que el problema dado admite solución única. Escribir la formulación variacional del problema. Introducir las modificaciones necesarias en el programa proporcionado para la aproximación y escribir la aproximación de la solución si se tiene la aproximación de los cuatro primeros *coeficientes-solución*:

-0.0843
-0.0070
-0.0040
-0.0008

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION (explicación breve):

SOLUCION EXACTA:

FORMULACION VARIACIONAL:

APROXIMACION DE LA SOLUCION:

INDICAR BREVEMENTE LINEAS A MODIFICAR EN PROGRAMA

RESOLUCION RAZONAMIENTOS:

RESOLUCION RAZONAMIENTOS, MODIFICACIONES DEL PROGRAMA:

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\ \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE..**Número**.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen, 11 de Septiembre de 2007

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1

Dada la ecuación en derivadas parciales:

$$2u_{\zeta\zeta} - 4u_{\zeta\eta} = 0,$$

considérese el cambio $y = \eta$, $x = \zeta + \frac{\eta}{2}$ para reducir a otra ecuación en derivadas parciales. Razonar de qué tipo es esta nueva ecuación a (calor, ondas o Laplace). Resolver dicha ecuación si se puede y deshacer el cambio de variable para escribir la solución de la ecuación dada.

ESCRIBIR LA NUEVA ECUACION

TIPO:

SOLUCIONES:

EJERCICIO 2

Se considera el Problema de Contorno:

$$(x+2)^2 y'' + 2(x+2)y' + \lambda y = (x+2), \quad x \in (-1,0)$$

(PC)

$$y(-1) = 0, \quad y(0) = 0$$

Para $\lambda = 0$, resolver si se puede. Indicar para qué otros valores de λ podría resolverse o aproximarse la solución por el método de los elementos finitos. Encontrar los valores propios λ y funciones propias asociadas del problema homogéneo asociado con (PC). Razonar todas las respuestas.

SOLUCION de (PC) para $\lambda = 0$

OTROS VALORES DE λ:

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS:

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 3A Se considera el problema de valores propios

$$a). \quad y'' + \lambda y = 0, x \in (-\pi, \pi)$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

Encontrar los valores propios y funciones propias y escribir el desarrollo en serie de Fourier de las funciones f(x) y g(x) definidas en $[-\pi, \pi]$ como:

$$f(x) = 0, \quad \text{si } x \in [0, \pi], \qquad f(x) = \sin(3x), \quad \text{si } x \in [-\pi, 0],$$

$$g(x) = \cos(x) - \sin(3x)$$

Escribir en el desarrollo sólo los términos que no se anulen. Así mismo, especificar exactamente qué coeficientes de Fourier se anulan

VALORES PROPIOS Y FUNCIONE PROPIAS

DESARROLLO de f:

COEFICIENTES de Fourier que se anulan:

DESARROLLO de g:

COEFICIENTES de Fourier que se anulan:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3B

Resolver el problema mixto para la ecuación del calor en una barra conductora:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad t > 0\,, \\ u(x, 0) = g(x)\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) \quad , \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t)\,, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

donde $g(x)$ es la función definida en el apartado anterior (EJERCICIO 3A) Calcular la temperatura del punto $x = 0$ de la barra en el instante de tiempo $t = 4$ segundos.

LA SOLUCION

LA TEMPERATURA del punto 0 en el tiempo $t = 4$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$