NOMBRE..**Número**..........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

Curso 2013-14

Examen bloque ED, 29 de Enero de 2014

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución.

EJERCICIO 1.1

Sea $D = (0,1) \times (0,1)$. Calcular el valor de λ (*valor propio*) para que la función $u(x,y) = \sin(5\pi x)\sin(3\pi y)$ verifique

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \text{en } D$$

$$u = 0, \quad \text{sobre } \partial D$$

Calcular el valor de la derivada normal de la solución (*función propia*) $u(x,y)$ en $y = 0$ e $y = 1$.

VALOR PROPIO

DERIVADA NORMAL en $y = 0$

DERIVADA NORMAL en $y = 1$

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver el problema mixto para la ecuación de tipo ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0\,, & x \in (0,5), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, & x \in (0,5)\,, \\ u_t(x,0) = f(x), & x \in (0,5)\,, \\ u(0,t) = u_x(5,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

donde $f(x) = sin(\pi x)$ para $x \in [0, 5/2]$, $f(x) = 1$ para $x \in [5/2, 5]$.

Escribir claramente, el primer coeficiente de Fourier que no se anule.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS y
valores propios y funciones propias

ECUACIONES EN la variable
t y SOLUCIONES en t:

COEFICIENTE DE FOURIER:

SOLUCION DEL PROBLEMA:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2 \sin a\, \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$

$$2 \sin a\, \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)\,, \quad 2 \cos a\, \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$