NOMBRE...**Número**...........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen Parcial: 10-XII-2011

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes.

EJERCICIO 1

Los siguientes problemas de contorno tienen solución única:

$$(1.a)\left\{\begin{array}{rcl} y'' - xy = x & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 0 \end{array}\right. \qquad (1.b)\left\{\begin{array}{rcl} y'' - 4y = x & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 0 \end{array}\right.$$

Resolver el que se pueda y escribir la solución (tachar lo que no proceda)

SOLUCION DE (1.a) o SOLUCION DE (1.b):

Para el problema que no sepas resolver, indica, haciendo un círculo donde corresponda, cuál o cuáles de los siguientes comandos MATLAB nos permitirían asegurar que la solución se puede aproximar mediante el método de Galerkin. Razonar la respuesta y dar una explicación breve de qué debe dar el comando seleccionado:

1.A).
$$u = dsolve('D2y - t * y = t', 'y(0) = 0', 'y(1) = 0');$$

1.B).
$$u = dsolve('D2y - t * y = 0', 'y(0) = 0', 'y(1) = 0');$$

1.C).
$$u = dsolve('D2y - 4 * y = t', 'y(0) = 0', 'y(1) = 0');$$

1.D).
$$u = dsolve('D2y - 4 * y = 0', 'y(0) = 0', 'y(1) = 0');$$

EXPLICACION BREVE:

Utilizando la función *galerkin* (ver hoja adjunta) convenientemente modificada, y para el valor de $n = 4$, se obtienen los coeficientes solución del sistema asociado $(A\bar{c} = \bar{f})$ que se dan a continuación:

$coeficientes\_solucion =$
-0.0613
0.0077
-0.0024
0.0010

Escribir la aproximación de la solución del problema de contorno dado y el valor de dicha aproximación en $x = 1/2$

APROXIMACION de (1.a) o (1.b):

VALOR DE LA APROXIMACION en $x = 1/2$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Se considera la ecuación de (Ec. de Tricomi utilizada por ejemplo en aerodinámica):

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Indicar el valor o valores de las constantes A, B, C, D, E, F para que las funciones

$$v(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

sean soluciones de dicha ecuación. Aplicar el método de separación de variables para encontrar estas soluciones.

SOLUCIONES $v(x, y) =$

EC. DIF. ORDINARIAS que se obtienen:

SOLUCIONES de las EDO que nos dan $v(x, y)$

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3.1

Utilizando las funciones propias del problema de valores propios

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

encontradas en clase $\{\sin(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$. Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)$ definida como $f(x) = sin(3\pi x/2)$ en el intervalo $[0,1]$. Precisar el valor del tercer coeficiente de Fourier.

3^{er} COEFICIENTE DE FOURIER:

DESARROLLO EN SERIE de f:

Escribir los valores propios asociados a cada función propia, e indicar si son valores propios y funciones propias de los problemas:

$$(3.A)\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad x \in (0,2) \\ y(0) = 0 & , \quad y(2) = 0 \end{cases}$$

$$(3.B)\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = y(1) & , \quad y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

$$(3.C)\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad x \in (0,2) \\ y(0) = 0 & , \quad y'(2) = 0 \end{cases}$$

Hacer un círculo donde proceda y dar una razón breve.

RAZON BREVE:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3.2

Resolver por separación de variables el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u &=& 0\,, \quad x \in (0,1), t > 0\,, \\ u(x,0) &=& 0\,, \quad x \in [0,1]\,, \\ u_t(x,0) &=& \sin(3\pi x/2), \quad x \in [0,1]\,, \\ u(0,t) = u(1,t) &=& 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{array}\right.$$

Escribir claramente:

ECUACIONES en la variable x y VALORES PROPIOS

ECUACIONES EN la variable t y SOLUCIONES en t:

SOLUCION DEL PROBLEMA:

RESOLUCIONES Y RAZONAMIENTOS

NOMBRE...**Número**...........

RESULTADOS PEDIDOS PARA CORRECCION: la mitad de los 8^*

1* SOLUCION:

2* APROXIMACION en $x = 1/2$

3* SOLUCIONES $v(x, y) =$

4* SOLUCIONES que dan $v(x, y) =$

5* valor del 3^{er} **coef. de Fourier**: Hacer un círculo donde proceda

0, 1, $(2\pi)/3$, $-8/(9\pi)$, $otro \neq$

6* PROBLEMA: Hacer un círculo donde proceda

$(3.A)$ $(3.B)$ $(3.C)$ *ninguno*

7* SOLUCIONES en t

8* SOLUCION

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

```
function y= galerkin(n)
%%PRIMERA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-2/curso 11/12
%V.MATLAB 6.5
%function c = galerkin(n)
%calcula la aproximacion del problema de contorno
%y''- y=x^2, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%por el metodo de Galerkin,
%utilizando como funciones de base las funciones propias del sistema
%%y''+\lambda y=0, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%
%Estas explicitamente son   sin(k*pi*x), k=1,2,..
%(asociadas a los valores propios lambda=k^2pi^2)
%
%La funcion lee n el numero de
%elementos de la base y nos devuelva el vector c que nos permite
%calcular la aproximacion numerica de la solucion;
%
%calcula la solucion aproximada y  la compara con la exacta.
%
%Hay que resolver el sistema: Ac=f,
%donde A es la matriz de coeficientes; f el dato del segundo miembro
%la aproximacion de la solucion  se obtiene: u=y_n(t)=sum_{j=1}^n
(c_j*sin(j*pi*t))
%
%%definiendo la matriz A y el vector columna f
%
syms t %variable simbolica
A=ones(n,n); %incicializando vectores y matrices
f=ones(n,1);
for i=1:n
   f(i)=-double(int(sin(i*pi*t)*t^2,0,1));
   for j=1:n
      if i==j
         A(i,j)=double(int((i*pi*cos(i*pi*t))^2,0,1)+int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
               else
         A(i,j)=double(int(i*pi*cos(i*pi*t)*j*pi*cos(j*pi*t),0,1)+
int(sin(i*pi*t)*sin(j*pi*t),0,1));
       end
      end
   end
 %
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
coeficientes_solucion=c
%
% definiendo la solucion aproximada
%
u=0;
for i=1:n
   u=u+c(i)*sin(pi*i*t);
end
%
solu_aproximada=vpa(u,4) %u solucion aproximada (4 digitos solo)
%
%definiendo la solucion exacta
%
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
%
solu_exacta=v %solucion exacta v
%
%dibujando las dos soluciones
%
dt=0:0.05:1;
```

```
du=subs(u,t,dt);
ddu=double(du);
plot(dt,ddu,'--')%%plot(dt,du,'--') directamente no funciona en la version 5.0
%
hold on
%ezplot(u,[0,1])%tambien dibuja la solucion u
ezplot(v,[0,1])
%
hold off
%
%%comparando los coeficientes c(i) con los de Fourier alpha(i) de la solucion
exacta v
%
alpha=ones(n,1);
for i=1:n

alpha(i)=double(int(sin(i*pi*t)*(-2-t^2-(-3+2*cosh(1))/sinh(1)*sinh(t)+2*cosh(t)
),0,1)/int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
end
coeficientes_fourier=alpha
%
% error cometido al tomar los coeficientes c(i) por alpha(i)
%
errorfourier_galerkin=alpha-c
%
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; por ser los coeficientes constantes y tener una
%   base ortogonal en (0,1), en este caso, la matriz del sistema es diagonal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos compararara con la solucion exacta
%
%3-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema más general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0.
%
```