NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen 30-Enero-2009

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Resolver el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' &=& y_1 - y_2 \\ y_2' &=& 5y_1 - y_2 + \frac{1}{cos(2x)} \end{array} \right.$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

EJERCICIO 2

2.1 Resolver la ecuación

$$y^{(4)} - y'' = sen(x)$$

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

RESOLUCION

2.2 Resolver la ecuación

$$y^{(4)} - y = sen(x)$$

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

RESOLUCION

EJERCICIO 3

Se considera la Ecuación Riccati

$$y' + 2e^x y - y^2 = e^{2x} + e^x$$

Encontar las regiones del plano donde las curvas integrales son crecientes; donde son concavas, y donde se tiene garantizado que existe una unica solución pasando por cada punto.

Sabiendo que tiene una solución particular $y = e^x$, resolver la ecuación y Calcular las soluciones que tengan gráfica pasando por el punto $(0,1)$ indicando el invervalo en que están definidas. Lo mismo para el punto $(0,1/2)$

SOLUCION GENERAL EC. RICCATI

SOLUCIONES pasando por $(0,1)$..INTERVALO

SOLUCION pasando por $(0,1/2)$..INTERVALO

REGION DE CRECIMIENTO

REGION DE CONCAVIDAD

REGION DE UNICIDAD DE SOLUCION

EJERCICIO 4

4.1 Resolver la ecuación

$$y'' - x^3 y = 0$$

mediante el desarrollo en serie de potencias de la solución. Encontrar los doce primeros términos de dicho desarrollo y el término general en función de lo anteriores.

4.2 Escribir la solución que verifica $y(0) = 0$, $y'(0) = \beta$, siendo β una constante dada (tomar por ejemplo $\beta = 7$), e indicar el intervalo de definición de la solución.

4.3 Demostrar que el Problema de Contorno

$$y'' - x^3 y = (3x + x^2)e^x\,, \quad x \in (0, 1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

tiene solución única.

4.1 SOLUCION GENERAL EC.

TERMINO GENERAL

4.2 SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

INTERVALO DE DEFINICION

4.3 DEMOSTRACION

EJERCICIO 5

Se considera la ecuación de un resorte blando no lineal

$$y'' + y - y^3 = 0$$

Escribir los puntos críticos o estados de equilibrio. Demostrar que la solución con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/2$ es periódica (es decir, el movimiento se repite pasado un tiempo T).

PUNTOS CRITICOS

DEMOSTRACION DE SOLUCION PERIODICA

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - Septiembre - 08/09

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + 1 \\ y_2' &= 5y_1 - y_2 + 1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

EJERCICIO 2

Resolver la ecuación $y''' - 3y'' + 3y' - y = sen(x) + x^2$. Escribir:

LA SOLUCION GENERAL

LA SOLUCION GENERAL DE LA EC. HOMOGENEA

UNA SOLUCION PARTICULAR de $y''' - 3y'' + 3y' - y = sen(x)$

UNA SOLUCION PARTICULAR de $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2$

REDUCIR de orden la ecuación homogénea $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Para ello, buscar $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ donde $y_1(x)$ es una de las soluciones de la ecuación encontrada. Escribir la ecuación diferencial de segundo orden verificada por $c'(x)$ y como consecuencia encontrar $c(x)$.

ECUACION para $c'(x)$ o $c(x)$

$c(x) =$

Ejercicio 3

Encontrar la familia de curvas ortogonales a

$$x + \frac{y^2}{3} = c\sqrt{y}$$

Ecuación dif. de la familia

Ecuación dif. de la familia ortogonal

Solución:

EJERCICIO 4

Se considera la ecuación diferencial definida en $\mathbf{R}^2$.

$$y' = cos(y - x)$$

1.- Considerando k cualquier número entero, escribir claramente cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $y = x + k\pi$ es una isoclina para la pendiente 0
2. $y = x + \frac{2k+1}{2}\pi$ es una isoclina para la pendiente 1
3. $y = x + \frac{4k+1}{2}\pi$ es una curva (recta) solución
4. $y = x + 2k\pi$ es una curva (recta) solución
5. Las curvas solución son crecientes en $y - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
6. Las curvas solución son crecientes en $y - x \in [0, \pi]$
7. Las curvas solución son convexas en $y - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $(y'' \leq 0)$
8. Las curvas solución son convexas en $x - y \in [0, \pi]$ $(y'' \leq 0)$

AFIRMACIONES CIERTAS:...

2.- Razonar el dominio en el que se tiene garantizado la existencia y unicidad de solución pasando por cada punto. Razonar
a) Cuántas curvas solución de la ecuación pueden ser tangentes a la recta $y = x + \frac{\pi}{2}$ en algún punto.
b). Cuántas curvas solución de la ecuación pueden ser tangentes a la recta $y = x + 2\pi$ en algún punto.

DOMINIO:

NÚMERO para a)...................................NÚMERO para b).........................

3). Aproximar la solución del problema de Cauchy

$$y' = cos(y - x)$$

$$y(0) = 0$$

en el intervalo en [-0.3,0.3], usando el método de Euler para el tamaño del paso h=0.1

ESCRIBIR todos los (x_i, y_i) explícitamente para $x_i > 0$

ESCRIBIR todos los (x_i, y_i) explícitamente para $x_i < 0$

4). Haciendo algún cambio de variable, resolver la ecuación si se sabe (dejar en términos de integrales o escribir la solución general)

EJERCICIOS

Resolver la ecuación

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = \frac{x^2}{sen(ln(x))}$$

Razonar cuántas soluciones verifican $y(1/2) = 0$, $y'(1/2) = 0$ y el intervalo de definición de éstas.

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL EC. NO HOMOGENEA

Nº SOLUCIONES e INTERVALO

RESOLUCIONES Y RAZONAMIENTOS

Ejercicio 6

Encontrar la aproximación mediante los 8 primeros términos del desarrollo en serie potencias $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ de la solución de la ecuación

$$y'' - \operatorname{sen}(x)\, y = 0$$

en función de las constantes a_0, a_1

APROXIMACION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$