NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Septiembre- 2012

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1

Demostrar que el siguiente problema de contorno tiene solución única:

$$\begin{cases} y'' - cos(x)y = 1 \quad , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Utilizando la función *galerkin* (ver hoja adjunta) convenientemente modificada, y para el valor de $n = 4$, se obtienen la matriz A del sistema asociado, $A\bar{c} = \bar{f}$, así como el término independiente $\bar{f}$, y los coeficientes $\bar{c}$. Escribir la matriz A y el término independiente $\bar{f}$ que nos proporcionan los coeficientes solución del sistema

$coeficientes\_solucion =$

-0.141366

-0.000323

-0.004797

-0.000008

Calcular explícitametne $a_{1,1}$ y f_3 y escribir la aproximación de la solución en $x = 1/4$. Indicar las modificaciones en el programa.

DEMOSTRACION DE EXITENCIA DE SOLUCION UNICA

MATRIZ A

$a_{1,1} =$

TERMINO $\bar{f}$

$f_3 =$

APROXIMACION de la solución en $x = 1/4$

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

La ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy}$ en coordenadas polares es $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$, con $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Se considera un modelo para la ecuación del calor estacionario, planteada en un círculo de radio 1:

$$u_{xx} + u_{yy} = 1 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 < 1,$$

$$u = 1 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

Teniendo en cuenta que las soluciones están acotadas para $r \longrightarrow 0$, encontrar una solución independiente de θ. Aplicar el método de separación de variables y escribir exactamente las ecuaciones diferenciales en cada variable que hay que resolver. Escribir también las respectivas soluciones. Encontrar el flujo del calor (la derivada normal de la solución) a lo largo de la línea $y = 0$.

SOLUCION

ECUACIONES

SOLUCIONES

CALCULO DEL FLUJO en $y = 0$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = 0, & x, y \in (0,\pi), \\ u(0,y) = 0 \quad , & u(\pi,y) = 0, \quad \in [0,\pi], \\ u(x,0) = 0 \quad , & u(x,\pi) = 1 - \cos(2x), \; x \in [0,\pi], \end{cases}$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier utilizado. Calcular explícitamente los dos primeros coeficientes (c_1 y c_2). de dicho desarrollo en serie.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS
VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

DESARROLLO EN SERIE

$c_1 =$

$c_2 =$

SOLUCION DEL PROBLEMA dado:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

```
function y= galerkin(n)
%%PRIMERA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-2/curso 11/12
%V.MATLAB 6.5
%function c = galerkin(n)
%calcula la aproximacion del problema de contorno
%y''- y=x^2, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%por el metodo de Galerkin,
%utilizando como funciones de base las funciones propias del sistema
%%y''+\lambda y=0, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%
%Estas explicitamente son   sin(k*pi*x), k=1,2,..
%(asociadas a los valores propios lambda=k^2pi^2)
%
%La funcion lee n el numero de
%elementos de la base y nos devuelva el vector c que nos permite
%calcular la aproximacion numerica de la solucion;
%
%calcula la solucion aproximada y  la compara con la exacta.
%
%Hay que resolver el sistema: Ac=f,
%donde A es la matriz de coeficientes; f el dato del segundo miembro
%la aproximacion de la solucion  se obtiene: u=y_n(t)=sum_{j=1}^n
(c_j*sin(j*pi*t))
%
%%definiendo la matriz A y el vector columna f
%
syms t %variable simbolica
A=ones(n,n); %incicializando vectores y matrices
f=ones(n,1);
for i=1:n
   f(i)=-double(int(sin(i*pi*t)*t^2,0,1));
   for j=1:n
      if i==j
         A(i,j)=double(int((i*pi*cos(i*pi*t))^2,0,1)+int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
           else
         A(i,j)=double(int(i*pi*cos(i*pi*t)*j*pi*cos(j*pi*t),0,1)+
int(sin(i*pi*t)*sin(j*pi*t),0,1));
        end
      end
   end
 %
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
coeficientes_solucion=c
%
% definiendo la solucion aproximada
%
u=0;
for i=1:n
   u=u+c(i)*sin(pi*i*t);
end
%
solu_aproximada=vpa(u,4) %u solucion aproximada (4 digitos solo)
%
%definiendo la solucion exacta
%
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
%
solu_exacta=v %solucion exacta v
%
%dibujando las dos soluciones
%
dt=0:0.05:1;
```



```
du=subs(u,t,dt);
ddu=double(du);
plot(dt,ddu,'--')%%plot(dt,du,'--') directamente no funciona en la version 5.0
%
hold on
%ezplot(u,[0,1])%tambien dibuja la solucion u
ezplot(v,[0,1])
%
hold off
%
%%comparando los coeficientes c(i) con los de Fourier alpha(i) de la solucion
exacta v
%
alpha=ones(n,1);
for i=1:n

alpha(i)=double(int(sin(i*pi*t)*(-2-t^2-(-3+2*cosh(1))/sinh(1)*sinh(t)+2*cosh(t)
),0,1)/int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
end
coeficientes_fourier=alpha
%
% error cometido al tomar los coeficientes c(i) por alpha(i)
%
errorfourier_galerkin=alpha-c
%
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; por ser los coeficientes constantes y tener una
%   base ortogonal en (0,1), en este caso, la matriz del sistema es diagonal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos comparara con la solucion exacta
%
%3-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema más general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0.
%
```

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$