NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - 3 Septiembre -2012

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Se considera el problema que modela la intensidad $I(t)$ de la corriente en un circuito eléctrico (modelo en Sección 1.6.3 del libro de apuntes), conociendo dicha intensidad en el instante $t = 0$

$$I'(t) + 2I(t) = 2sin(t), \quad I(0) = y_0$$

Resolver la ecuación diferencial. Razonar cuál de los campos de direcciones (y soluciones en el entorno MATLAB 'dfield5') proporcionados se corrensponde con la ecuación dada. Tomando $y_0 = 2$, estudiar la existencia y unicidad de solución del problema dado e intervalo de definición de ésta. Razonar si es posible que las gráfica de dos soluciones se corten como indican los dibujos proporcionados.

SOLUCION GENERAL de la ED

SOLUCION pasando por $(0, 2)$ / INTERVALO

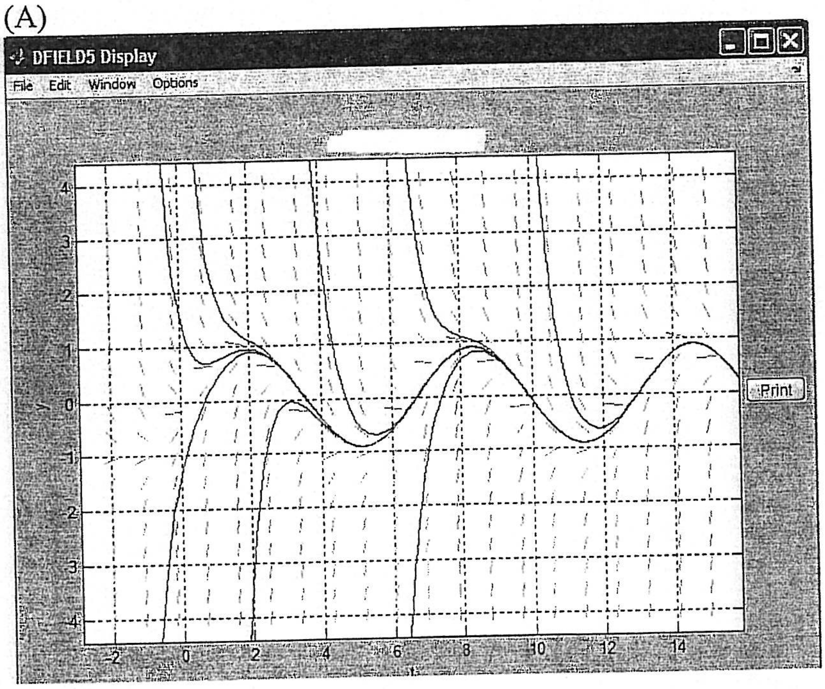
RAZONAMIENTO BREVE:
- existencia y unicidad de solución
- posibles cortes de gráficas

GRAFICA (A) o (B)

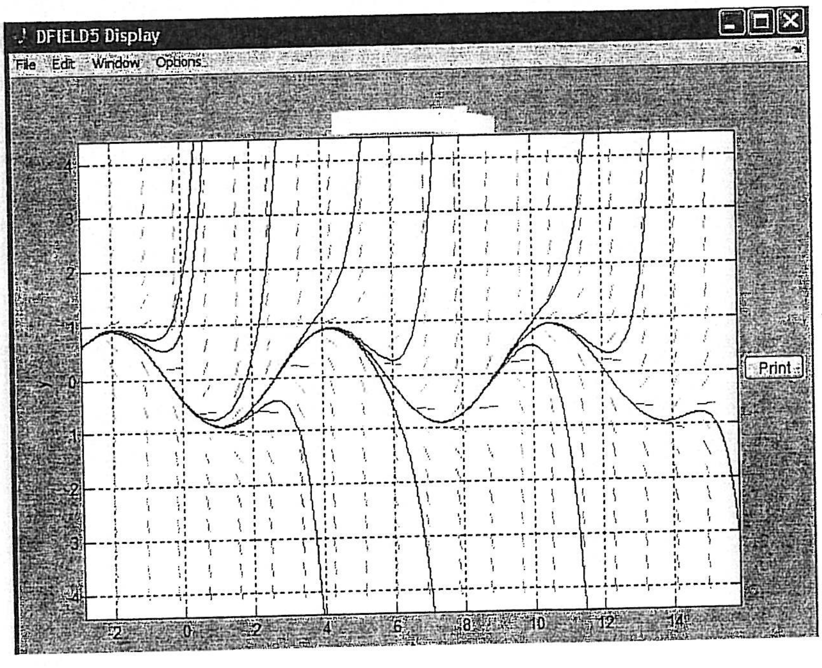
Tachar lo que no proceda

RAZONAMIENTO BREVE:

(A)



(B)



EJERCICIO 2

Resolver la ecuación diferencial

$$(*) \qquad y' = -\frac{2x^2y}{x^3 + 3xy^2}$$

Estudiar la existencia y unicidad de solución explícita del problema de Cauchy

$$y' = -\frac{2x^2y}{x^3 + 3xy^2}, \quad y(1) = 1$$

Escribir el valor aproximado de la solución explícita del Problema de Cauchy en [0.9,1.1], utilizando el método de Euler para el tamaño del paso h=0.1

Demostrar que (*) admite el factor integrante $\frac{1}{x}$

SOLUCION GENERAL..

APROXIMACION

$\varphi(0.9) \approx$ ....$\varphi(1.1) \approx$ ....

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION.

FACTOR INTEGRANTE:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - y = \cos(2t) + \mathrm{sen}(2t)$$

Escribir el sistema diferencial de primer orden asociado a la ecuación diferencial y la matriz fundamental del sistema. Escribir la solución del sistema no homogéneo asociado en términos de la matriz fundamental (no se pide resolver el sistema).

SOLUCION GENERAL ED HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL ED NO HOMOGENEA

SISTEMA

MATRIZ FUNDAMENTAL

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA ASOCIADO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Se considera el Problema de Cauchy

$$y'' + y' + x\,y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Encontrar la aproximación de la solución mediante los 8 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Para condiciones iniciales $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$. Encontrar la expresión del término general a_n en función de los anteriores indicando el valor de n. Razonar el intervalo de definición de la solución.

$y(x) \approx$

para $n \geq$ .... , $\quad a_n =$

INTERVALO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5

Resolver, utilizando el método de variación de parámetros, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2e^x \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0\,, y_2(0) = 0\,.$$

Encontrar un problema de Cauchy relativo a la ecuación diferencial de segundo orden que verifica la componente $y_1(x)$ del sistema.

SOLUCION DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION DEL PROBLEMA DE CAUCHY DADO

$y_1(x) =$

$y_2(x) =$

ESCRIBIR EL PROBLEMA DE CAUCHY para $y_1(x)$

RESOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta,b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1,\varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2º Curso I. Industrial
Examen - 3 Septiembre - 2012

2ª Parte : 2 puntos

Elegir uno de los tres

EJERCICIO

Se considera la ecuación de un resorte no lineal amortiguado

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

Linealizar la ecuación para valores $y(t)$ cercanos a $y = 0$. Resolver dicha ecuación.

Escribir la ecuación de las trayectorias de ambas ecuaciones, encontrando las trayectorias de la ecuación que se pueda. Para la otra ecuación, encontrar y dibujar las isoclinas para las pendientes 0, 1, -1 e ∞ y las respectivas direcciones del campo asociado a la ecuación diferencial.

ECUACION LINEALIZADA Y SOLUCION

EC. DIFER. DE LAS TRAYECTORIAS.

TRAYECTORIAS de ED LINEALIZADA o de ED DADA
(tachar lo que no proceda)

ISOCLINAS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

GRAFICA, RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO

Se considera un sistema resorte masa que empieza a vibrar por la acción de un impulso en el tiempo $t = \pi$ (modelos sección 2.7 del libro de apuntes)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Calcular la transformada de Laplace de la función $\delta(t - \pi)$ y la ecuación a la que se llega utilizando la transformada de Laplace(esto es, la transformada de Laplace la función $y(t)$) . Escribir el comando MATLAB que permite resolver dicha ecuación. Razonar (demostrando) cuál o cuáles de las siguientes funciones son soluciones de dicha ecuación. Hacer una gráfica aproximada de la solución

a). $y = -u(t - \pi)\sin(t)$
b). $y = u(t - \pi)e^{t-\pi}(t - \pi)$
c). $y = u(t)te^{t} + u(t - \pi)(t - \pi)e^{t-\pi}$
u es la función escalón (función MATLAB 'heaviside')

TRANSFORMADA de $\delta(t - \pi)$

TRANSFORMADA de $y(t)$ / COMANDO

Tachar lo que no proceda y dar una razón breve en cada caso

a). SOLUCION? SI o NO

b). SOLUCION? SI o NO

c). SOLUCION? SI o NO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO

Se considera la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{x^2 + y^2} u = 0$$

en coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. Esto es, la ecuación

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} u = 0$$

Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones no nulas que no dependan de θ y que se anulen para $r = 1$.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN

Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones no nulas que no dependan de r y que se anulen para $\theta = 0$.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS