NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales

2^0 Curso I. Industrial

Examen - Enero - 2013

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia $xy = C$. Razonar qué campo de direcciones está asociado a la ecuación diferencial de la familia dada.

ECUACIÓN DIF. DE LA FAMILIA DADA ....

ECUACIÓN DIF. DE LA NUEVA FAMILIA ....

NUEVA FAMILIA ....

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2
Se consideran las ecuaciones de Riccati

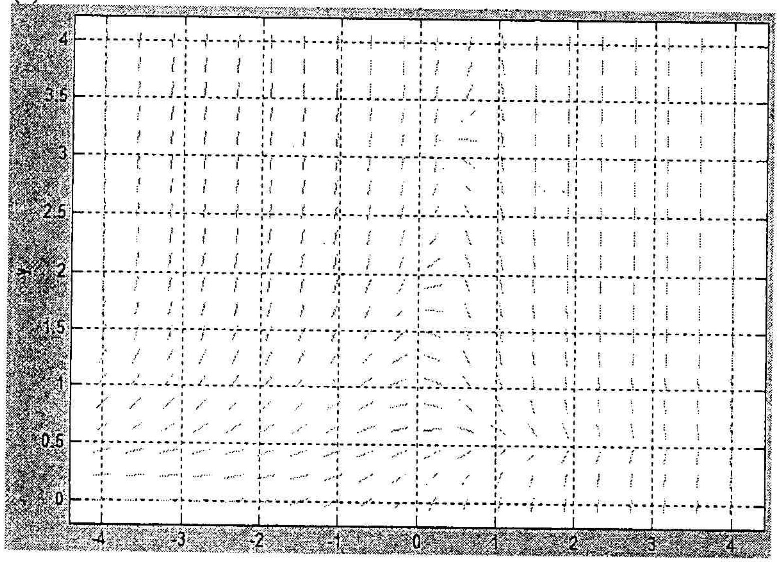
$$(a). \qquad y' + 2e^{x}y - y^{2} = e^{2x} + e^{x}$$

$$(b). \qquad y' + 2e^{-x}y - y^{2} = e^{-2x} - e^{-x}$$

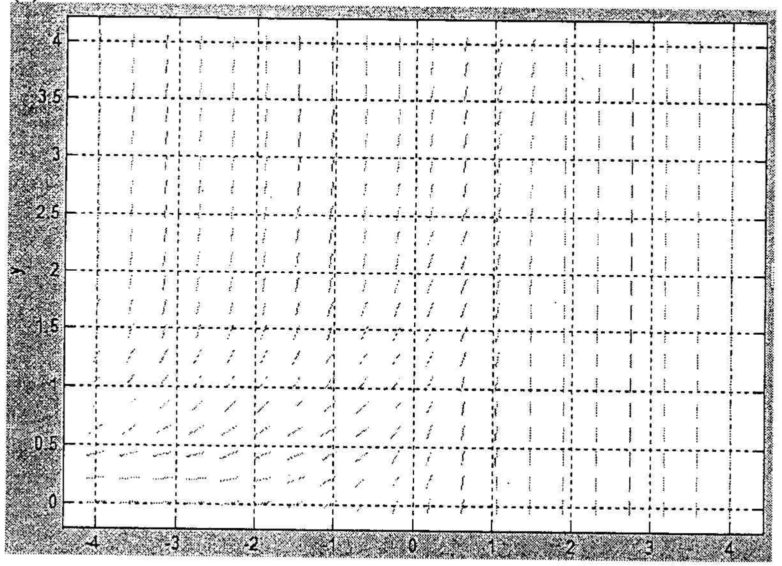
que tienen una solución particular del tipo $y = e^{\alpha x}$ para $\alpha = \pm 1$. Determinar el valor de α para cada ecuación, y encontrar las solución general.
Para (a), calcular la solución que pasa por $(0,1)$ y el intervalo de definición de ésta. Para (b) calcular la solución que pasa por $(0,2)$ y el intervalo de definición de ésta. En caso de no saber resolver estudiar la existencia y unicidad de solución pasando por estos puntos. Razonar qué campo de direcciones está asociado a cada ecuación.

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

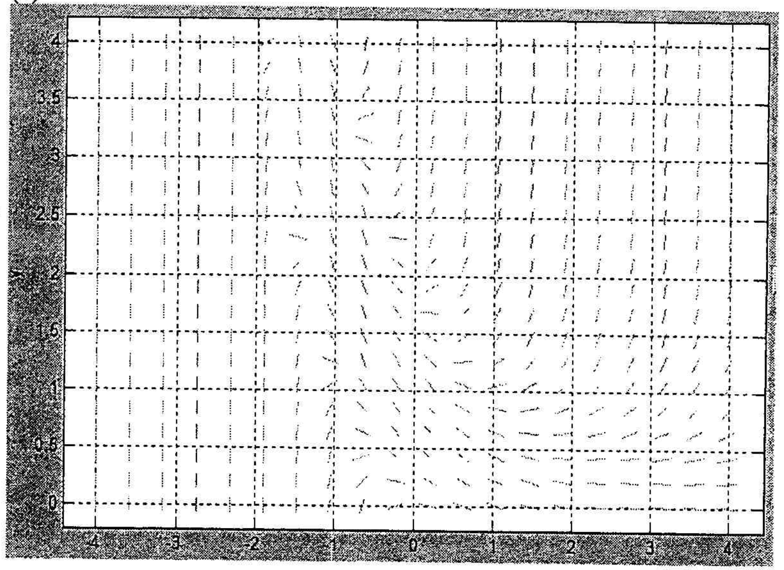
(1)


y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

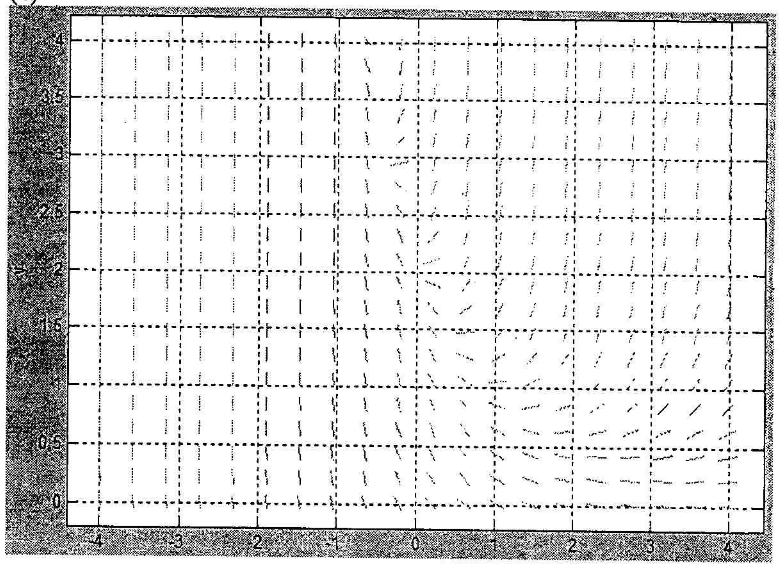
(2)


y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

(3)


y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

(4)


y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

(a).
SOLUCIÓN PARTICULAR: .... SOLUCIÓN GENERAL......................

SOLUCION / $y(0) = 1$ ....INTERVALO...............

CAMPO DE DIRECCIONES (1) / (2)/ (3)/ (4) (tachar lo que no proceda)
RAZÓN BREVE

(b).
SOLUCIÓN PARTICULAR: .... SOLUCIÓN GENERAL......................

SOLUCION / $y(0) = 2$ ....INTERVALO...............

CAMPO DE DIRECCIONES (1) / (2)/ (3)/ (4) (tachar lo que no proceda)
RAZÓN BREVE

EJERCICIO 3

Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 2e^{2x} \\ y_2' &= -4y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -4$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION DEL PROBLEMA DADO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Se considera la ecuación diferencial

$$y'' - ay' - (1+a)y = xe^{-x}.$$

Resolverla según los valores de a (parámetro real).

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5

Demostrar que el problema de contorno

$$x^2y'' + 3xy' + y = x, \quad x \in (1, 2)$$

$$y(1) = 1/4, \quad y'(2) = 0$$

tiene solución única y encontrarla

SOLUCION GENERAL EC HOMOGENEA..................

SOLUCION GENERAL EC NO HOMOGENEA..................

SOLUCION PROBLEMA CONTORNO..................

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION

EJERCICIO 6

Se considera la ecuación diferencial de Hermite: $y'' - 2xy' + \nu y = 0$, con $\nu = \frac{1}{77}$

Buscar la solución mediante un desarrollo en serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a).Escribir el término general de la serie a_n en función de los anteriores, indicando el valor de n para el que se obtiene dicho término.

b). Utilizar los 7 primeros términos del desarrollo en serie para aproximar la solución del problema de Cauchy asociado.

$$y'' - 2xy' + \nu y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Indicar el intervalo donde está definida la solución

.c). Reducir la ecuación diferencial un sistema diferencial con dos ecuaciones. Escribir la aproximación de la solución del problema de Cacuchy asociado a dicho sistema utilizando b).

$a_n =$ para $n \geq$...........

APROXIMACIÓN .b):
INTERVALO:

SISTEMA DIFERENCIAL | SOLUCIÓN APROXIMADA

RAZONAMIENTOS BREVE para b) y c)

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - Enero de 2013

2ª Parte : 2 puntos

Elegir uno de los tres

EJERCICIO

Se considera la ecuación de un resorte no lineal amortiguado

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

Linealizar la ecuación para valores $y(t)$ cercanos a $y = 0$. Resolver dicha ecuación.

Escribir la ecuación de las trayectorias de ambas ecuaciones, encontrando las trayectorias de la ecuación que se pueda. Para la otra ecuación, encontrar y dibujar las isoclinas para las pendientes 0, 1, -1 e ∞ y las respectivas direcciones del campo asociado a la ecuación diferencial.

ECUACION LINEALIZADA Y SOLUCION

EC. DIFER. DE LAS TRAYECTORIAS.

TRAYECTORIAS de ED LINEALIZADA o de ED DADA
(tachar lo que no proceda)

ISOCLINAS

GRAFICA, RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO

Se considera un sistema resorte masa que empieza a vibrar por la acción de un impulso en el tiempo $t = \pi$ (modelos sección 2.7 del libro de apuntes)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Calcular la transformada de Laplace de la función $\delta(t - \pi)$ y la ecuación a la que se llega utilizando la transformada de Laplace(esto es, la transformada de Laplace la función $y(t)$) . Escribir el comando MATLAB que permite resolver dicha ecuación. Razonar (demostrando) cuál o cuáles de las siguientes funciones son soluciones de dicha ecuación. Hacer una gráfica aproximada de la solución

a). $y = -u(t - \pi)\sin(t)$

b). $y = u(t - \pi)e^{t-\pi}(t - \pi)$

c). $y = u(t)te^t + u(t - \pi)(t - \pi)e^{t-\pi}$

u es la función escalón (función MATLAB 'heaviside')

TRANSFORMADA de $\delta(t - \pi)$

TRANSFORMADA de $y(t)$ / COMANDO

Tachar lo que no proceda y dar una razón breve en cada caso

a). SOLUCION? SI o NO

b). SOLUCION? SI o NO

c). SOLUCION? SI o NO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO

Se considera la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{x^2 + y^2} u = 0$$

en coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. Esto es, la ecuación

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} u = 0$$

Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones no nulas que no dependan de θ y que se anulen para $r = 1$.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN

Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones no nulas que no dependan de r y que se anulen para $\theta = 0$.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad ; \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k, $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x, \zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a, \zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad ; \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$