NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen Parcial: Diciembre 2007- Curso 07/08

No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.30m.

Normas para corrección de examen: Escribir exactamente la solución, de manera precisa, donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas proporcionadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución.

EJERCICIO 1

Resolver el problema de Cauchy:

$$u_t + 5u_x = e^t, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = x^2, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

(indicación: comprobar que $u_p(x,t) = e^t$ es una solución particular de la ecuación). Escribir el problema de Cauchy para la ecuación de ondas de segundo orden que verifica la solución hallada.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN:

ESCRIBIR EL PROBLEMA DE CAUCHY:

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{xx}+u_{yy} & = & 0\,, \quad x,y\in(0,\pi), \\ u(x,0)=0 & , & u_y(x,\pi)=0\,, \quad x\in(0,\pi)\,, \\ u_x(0,y)=sin(\frac{y}{2}) & , & u_x(\pi,y)=0\,, \quad y\in(0,\pi)\,. \end{array}\right.$$

ECUACIÓN en la variable x:

ECUACIÓN en la variable y:

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3-1

Se consideran los problemas de contorno

$$(a)\quad \begin{cases} (\frac{1}{\cos(x)}y')' = \cos(x) & , \quad x \in (0,1) \\ y'(0) = 0 & , \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} (\frac{1}{\cos(x)}y')' = \cos(x) & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Encontrar la solución única del problema que se pueda; decir si no existe. Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN ÚNICA de (a)......

SOLUCIÓN ÚNICA de (b)....

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3-2

Considerando la formulación variacional del problema del problema (a) o (b) que admita solución única. Introducir las modificaciones necesarias en el programa proporcionado para la aproximación de la solución. Tomando N=4, se tienen los *coeficientes-solución*:

-0.0888

-0.0098

-0.0023

-0.0010

Escribir el término $a_{3,4}$ de la matriz del sistema y el valor preciso de la aproximación de la solución en el punto x=1/2.

FORMULACION VARIACIONAL

TERMINO $a_{3,4}$

APROXIMACION SOLUCION en x=1/2:

INDICAR BREVEMENTE LINEAS A MODIFICAR EN PROGRAMA

```
function y= galerkin(n)
%%PRIMERA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-2/curso     07/08
%V.MATLAB 6.5
%function c = galerkin(n)
%calcula la aproximacion del problema de contorno
%y''- y=x^2, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%por el metodo de Galerkin,
%utilizando como funciones de base las funciones propias del sistema
%%y''+\lambda y=0, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%
%Estas explicitamente son   sin(k*pi*x), k=1,2,..
%(asociadas a los valores propios lambda=k^2pi^2)
%
%La funcion lee n el numero de
%elementos de la base y nos devuelva el vector c que nos permite
%calcular la aproximacion numerica de la solucion;
%
%calcula la solucion aproximada y  la compara con la exacta.
%
%Hay que resolver el sistema: Ac=f,
%donde A es la matriz de coeficientes; f el dato del segundo miembro
%la aproximacion de la solucion  se obtiene: u=y_n(t)=sum_(j=1)^n (c_j*sin(j*pi*t))
%
%%definiendo la matriz A y el vector columna f
%
syms t %variable simbolica
A=ones(n,n); %incicializando vectores y matrices
f=ones(n,1);
for i=1:n
   f(i)=-double(int(sin(i*pi*t)*t^2,0,1));
   for j=1:n
      if i==j
         A(i,j)=double(int((i*pi*cos(i*pi*t))^2,0,1)+int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
             else
         A(i,j)=double(int(i*pi*cos(i*pi*t)*j*pi*cos(j*pi*t),0,1)+ int(sin(i*pi*t)*sin(↙
j*pi*t),0,1));
       end
      end
   end
 %
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
coeficientes_solucion=c
%
% definiendo la solucion aproximada
%
u=0;
for i=1:n
   u=u+c(i)*sin(pi*i*t);
end
%
solu_aproximada=vpa(u,4) %u solucion aproximada (4 digitos solo)
%
%definiendo la solucion exacta
%
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
%
solu_exacta=v %solucion exacta v
%
%dibujando las dos soluciones
%
dt=0:0.05:1;
du=subs(u,t,dt);
ddu=double(du);
plot(dt,ddu,'--')%%plot(dt,du,'--') directamente no funciona en la version 5.0
%
hold on
%ezplot(u,[0,1])%tambien dibuja la solucion u
ezplot(v,[0,1])
%
hold off
%
%%comparando los coeficientes c(i) con los de Fourier alpha(i) de la solucion exacta v
%
alpha=ones(n,1);
for i=1:n
   alpha(i)=double(int(sin(i*pi*t)*(-2-t^2-(-3+2*cosh(1))/sinh(1)*sinh(t)+2*cosh(t)),0,↙
1)/int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
end
coeficientes_fourier=alpha
%
% error cometido al tomar los coeficientes c(i) por alpha(i)
%
errorfourier_galerkin=alpha-c
%
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; por ser los coeficientes constantes y tener una
%   base ortogonal en (0,1), en este caso, la matriz del sistema es diagonal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos comparara con la solucion exacta
%
%3-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema más general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0.
%
```

EJERCICIO 3-3

Considerando las funciones propias del problema de valores propios utilizadas en la función *galerkin* (ver programa), escribir el desarrollo en serie de Fourier de la solución del problema (a) o (b) (es decir, del que tenga solución única) en términos de dichas funciones propias. Calcular explícitamente el tercer coeficiente de Fourier, y si se puede, escribir el valor aproximado de dicho coeficiente

TERCER COEFICIENTE:

VALOR APROXIMADO:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\,\exp(\int p(x)dx)\,dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE..Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen Final: Febrero de 2007- Curso 07/08

No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.30m.

Normas para corrección de examen: Escribir exactamente la solución, de manera precisa, donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas proporcionadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución.

EJERCICIO 1

Resolver el problema de Cauchy para la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - 5^2 u_{xx} = e^t, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = x^2, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

(indicación: comprobar que $u_p(x,t) = e^t$ es una solución particular de la ecuación).

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN:

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.1

Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} \;=\; 0\,, \quad x \in (0,1), \quad y \in (0,\pi), \\ u_y(x,0) = 0 \quad , \quad u_y(x,\pi) = 0\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ u(0,y) = cos(2y) \quad , \quad u_x(1,y) = 2\,cos(2y)\,, \quad y \in (0,\pi)\,. \end{cases}$$

ECUACIÓN en la variable x:

ECUACIÓN en la variable y:

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.2

Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{xx}+u_{yy} & = & 0\,, \quad x\in(0,1), \quad y\in(0,\pi), \\ u_y(x,0)=0 & , & u_y(x,\pi)=0\,, \quad x\in(0,1)\,, \\ u(0,y)=1 & , & u_x(1,y)=2\,, \quad y\in(0,\pi)\,. \end{array}\right.$$

ECUACIÓN en la variable x:

ECUACIÓN en la variable y:

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3.1

a). Resolver el problema de contorno

$$(PC) \quad \begin{cases} (\frac{1}{\cos(x)} y')' = \cos(x) & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

b). Considerando la formulación variacional del problema (PC) problema (P), introducir las modificaciones necesarias en el programa proporcionado para la aproximación de la solución.

c). Tomando N=4, en el programa modificado, se tienen los *coeficientes-solución*:

-0.0888

-0.0098

-0.0023

-0.0010

Escribir el término $a_{3,4}$ de la matriz del sistema y el valor preciso de la aproximación de la solución en el punto x=1/2.

SOLUCIÓN de (PC)

TERMINO $a_{3,4}$

APROXIMACION SOLUCION en x=1/2:

```
function y= galerkin(n)
%%PRIMERA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-2/curso 07-08
%V.MATLAB 6.5
%function c = galerkin(n)
%calcula la aproximacion del problema de contorno
%y''- y=x^2, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%por el metodo de Galerkin,
%utilizando como funciones de base las funciones propias del sistema
%%y''+\lambda y=0, x\in(0,1), y(0)=0,y(1)=0.
%
%Estas explicitamente son   sin(k*pi*x), k=1,2,..
%(asociadas a los valores propios lambda=k^2pi^2)
%
%La funcion lee n el numero de
%elementos de la base y nos devuelva el vector c que nos permite
%calcular la aproximacion numerica de la solucion;
%
%calcula la solucion aproximada y  la compara con la exacta.
%
%Hay que resolver el sistema: Ac=f,
%donde A es la matriz de coeficientes; f el dato del segundo miembro
%la aproximacion de la solucion  se obtiene: u=y_n(t)=sum_{j=1}^n
(c_j*sin(j*pi*t))
%
%%definiendo la matriz A y el vector columna f
%
syms t %variable simbolica
A=ones(n,n); %incicializando vectores y matrices
f=ones(n,1);
for i=1:n
   f(i)=-double(int(sin(i*pi*t)*t^2,0,1));
   for j=1:n
      if i==j
         A(i,j)=double(int((i*pi*cos(i*pi*t))^2,0,1)+int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
           else
         A(i,j)=double(int(i*pi*cos(i*pi*t)*j*pi*cos(j*pi*t),0,1)+
int(sin(i*pi*t)*sin(j*pi*t),0,1));
        end
       end
   end
 %
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
coeficientes_solucion=c
%
% definiendo la solucion aproximada
%
u=0;
for i=1:n
   u=u+c(i)*sin(pi*i*t);
end
%
solu_aproximada=vpa(u,4) %u solucion aproximada (4 digitos solo)
%
%definiendo la solucion exacta
%
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
%
solu_exacta=v %solucion exacta v
%
%dibujando las dos soluciones
%
dt=0:0.05:1;
```



```
du=subs(u,t,dt);
ddu=double(du);
plot(dt,ddu,'--')%%plot(dt,du,'--') directamente no funciona en la version 5.0
%
hold on
%ezplot(u,[0,1])%tambien dibuja la solucion u
ezplot(v,[0,1])
%
hold off
%
%%comparando los coeficientes c(i) con los de Fourier alpha(i) de la solucion
exacta v
%
alpha=ones(n,1);
for i=1:n

alpha(i)=double(int(sin(i*pi*t)*(-2-t^2-(-3+2*cosh(1))/sinh(1)*sinh(t)+2*cosh(t)
),0,1)/int((sin(pi*i*t))^2,0,1));
end
coeficientes_fourier=alpha
%
% error cometido al tomar los coeficientes c(i) por alpha(i)
%
errorfourier_galerkin=alpha-c
%
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; por ser los coeficientes constantes y tener una
%   base ortogonal en (0,1), en este caso, la matriz del sistema es diagonal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos comparara con la solucion exacta
%
%3-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema más general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0.
%
```

EJERCICIO 3-2

Considerando las funciones propias del problema de valores propios utilizadas en la función *galerkin* (ver programa), escribir el desarrollo en serie de Fourier de la solución del problema (PC) en términos de dichas funciones propias. Calcular explícitamente el primer coeficiente de Fourier, y si se puede, escribir el valor aproximado de dicho coeficiente

DESARROLLO

PRIMER COEFICIENTE:

VALOR APROXIMADO:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE...Número........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales
Examen de Septiembre- Curso 07/08

No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h.15m.

Normas para corrección de examen: Escribir exactamente la solución, de manera precisa, donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas proporcionadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución.

EJERCICIO 1

Se considera la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{x^2+y^2}u = 0$$

en coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$. Esto es, la ecuación

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}u = 0$$

Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones no nulas que no dependan de θ y que se anulen para $r = 1$.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN

Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones no nulas que no dependan de r y que se anulen para $\theta = 0$.

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCIÓN

EJERCICIO 2

Encontrar los valores propios y funciones propias de

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

y escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)$ en $(0, \pi)$ en términos de las funciones propias obtenidas para $f(x) = 1$, $f(x) = cos(3x)$, $f(x) = cos(x/2)$.

ESCRIBIR VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

ESCRIBIR LOS DESARROLLOS para

$f = 1$.......

$f = \cos(3x)$..........

$f = cos(x/2)$.........

EJERCICIO 3

Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema mixto para la ecuación tipo ondas

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} + u & = & 0\,, \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0 \\ u_x(t,0) = 0 & , & u_x(t,\pi) = 0\,, \quad t > 0\,, \\ u(0,x) = f(x) & , & u_t(0,x) = 1\,, \quad x \in (0,\pi)\,. \end{array}\right.$$

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCION para

$f = 1$

$f = \cos(3x)$

$f = cos(x/2)$

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-**Método de variación de parámetros:** cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \, \exp(\int p(x)dx) \, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-**Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:**

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- **Método de coeficientes indeterminados** cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-**Método de Euler para el problema** $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h \,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-**Método de Elementos Finitos:**

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-**Coeficientes de Fourier:**

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a \, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a \, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a \, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$