NOMBRE...Número

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen - Febrero 2013

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes. Tiempo 1h15m.

1. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0\,, \quad x \in (0,2), t > 0. \\ u(x,0) = 1\,, \quad x \in (0,2)\,, \\ u_t(x,0) = sen(\frac{\pi}{2}x)\,, \quad x \in (0,2)\,, \\ u_x(0,t) = 0 \quad , \quad u_x(2,t) = 0\,, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

ESCRIBIR EXACTAMENTE
EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS AL QUE SE LLEGA,
LOS VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

ESCRIBIR EXACTAMENTE LA SOLUCION

ESCRIBIR el desarrollo en serie de Fourier de las funciones dadas en las condiciones inciales en términos de las funciones propias obtenidas. Escribir exactamente los coeficientes de Fourier que no sean cero:

DESARROLLO Y COEFICIENTES:

RESOLUCION

RESOLUCION

2. Se considera los problemas de contorno

a).

$$((x+1)y')' = 1\,, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

b).

$$((x+1)y')' = 1\,, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0 \quad y'(1) = 0$$

2.1).Demostrar que admiten solución única y escribir la formulación débil (o variacional) de cada uno de ellos..

2.2). Se aproxima la solución mediante el método de elementos finitos, para el tamaño de paso $h = 0.1$, h la distancia entre dos nodos consecutivos. Se llega así a la resolución de un sistema de ecuaciones, $A\bar{c} = \bar{f}$. Para cada uno de los problemas a) y b), escribir exactamente el elemento $a_{2,2}$ y $a_{2,3}$ de la matriz A y todas las componentes del vector término independiente $\bar{f}$. Indicar cuáles son las principales diferencias en la aproximación de los problemas a) y b) respectivamente.

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

FORMULACION DEBIL DE a).

FORMULACION DEBIL DE b).

PARA PROBLEMA a).

$a_{2,2}$ =...

$\bar{f}$=...

RESOLUCIÓN

PARA PROBLEMA 4.

$a_{2,3}=$..

$\bar{f}=$..

RESOLUCIÓN

```
function y = elementosfinitos(n)
%SEGUNDA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-4/Curso 11-12
%%V.MATLAB 6.5
%y = felementosfinitos(n)
%
%calculo de la aproximacion de la solucion del problema de contorno
%%y''-y=x^2, x\in(0,1); y(0)=0,y(1)=0
%utilizando el método de los elementos finitos: se toman las funciones
%de base phi_i(x) que son continuas en [0,1], se anulan en x=0 y x=1
%son polinomios de grado 1 en los subintervalos [x_i,x_{i+1}], con x_i los nodos

%y toman el valor 1 en el nodo x_i y 0 en el resto ''hat functions''
%
%lee n el número de nodos del intervalo (0,1)
%
%calcula la matriz del sistema A y el termino independiente f y
%nos devuelve un vector c que es la solucion aproximada de y(x) en los nodos
x_i=i*h
%
%definiendo los nodos
h=1/(n+1);
x=ones(n+2,1);
for i=1:n+2
   x(i)=(i-1)*h;
end
%
%Calculando la matriz de coeficientes A y el término independiente:
%
syms t; %variable simbolica
q=-1;%termino que aparece multiplicando a y(x): y''+q(x)y=r(x)
r=t^2;%termino independiente: y''+q(x)y=r(x)
R=ones(n,1);%inicializando vectores
S=ones(n,1);
Q=ones(n,1);
f=ones(n,1);
a1=ones(n,1);
amenos1=ones((n-1),1);
mas1=ones((n-1),1);
%definiendo las integrales sobre cada segmento [x_i,x_{i+1}]
for i=1:n
   R(i)=double(int(q*(t-x(i+2))^2,x(i+1),x(i+2)));
   Q(i)= double(int(q*(t-x(i))^2,x(i),x(i+1)));
   S(i)=double(int(q*(t-x(i))*(t-x(i+1)),x(i),x(i+1)));

f(i)=double((1/h)*int(r*(t-x(i)),x(i),x(i+1))+(1/h)*int(r*(-t+x(i+2)),x(i+1),x(i
+2)));
end
%S1mas=S(1:n-1);
S1menos=S(2:n);
%
%definiendo la matriz tridiagonal A:  vectores que definen  las diagonales
%diagonal principal
a1= (1/h^2)*(-2*h*ones(n,1)+Q+R); %A(i,i)
%subdiagonal inferior
amenos1=(1/h^2)*(h*ones((n-1),1)-S1menos); %A(i,i-1)
%subdiagonal superior
amas1=amenos1;  %A(i,i+1)
%
%
A=diag(a1)+diag(amas1,1)+diag(amenos1,-1); %matriz tridiagonal A
%
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
```



```
coeficientes_solucion=c
%
Nodo_y_Aproximacionsolucion=[x,[0;c;0]]
%
%definiendo la solucion exacta
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
solu_exacta=v  %solucion exacta v
%dibujando las dos soluciones
%
ezplot(v,[0,1])
%
hold on
%
plot(x,[0;c;0],'--')
hold off
%Comparando soluciones
%
nodos=x
solucionaproximadaennodos=[0;c;0];
solucionexactaennodos=subs(v,t,x);
%
%error cometido
%
error=solucionaproximadaennodos-solucionexactaennodos
%double(error)
%cambio de formato en la salida de datos
%%format long
%%nodo_error=[nodos,error]
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; A es tridiagonal. El calculo de las integrales en
[0,1]
%   se lleva al calculo de integrales sobre cada segmento [x_i,x_{i+1}].
%   Vale con calcular la diagonal por encima de la diagonal principal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos calcular explicitamente las integrales.
%  Tambien, en este ejemplo concreto, mediante resolucion, se pueden comparar
%  la solucion exacta y(x) con la aproximada u=sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)
%
%3- El vector solucion c nos da la solucion aproximada de y(x) en los nodos
x_i=i*h
%%%%mas concretamente, c(i) nos da la solucion aproximada en x(i+1); i=1,2,..,n
%%%%c(1)=y(0)=0; c(n+2)=y(1)=0

%
%4-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema mas general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0;
%%Asi como otras condiciones de contorno: y'(a)=0, o y(b)-y'(b)=0,....
```

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$