NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3er Curso, I. Caminos. Ecuaciones Diferenciales
Examen final: Febrero de 2011 / Curso 2010-11

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes.

....

EJERCICIO 1

Para cada función$f(x)$ que se da a continuación, resolver el problema mixto:

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 1 + \cos(4x) + f(x), \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$u(-\frac{\pi}{2}, t) = u(\frac{\pi}{2}, t), \quad u_x(-\frac{\pi}{2}, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t), \quad t > 0$$

Escribir el problema de valores propios asociado así como los valores propios y funciones propias y la ecuación o ecuaciones en la variable t a las que se llega.

a). Tomando $f(x) = \sin(8x)$ escribir la solución.

b). Tomando $f(x) = \sin(x)$ escribir la solución.

Indicar qué funciones de la condición inicial son funciones propias para las distintas $f(x)$, y los desarrollos en serie de Fourier utilizados en la resolución.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS– VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

ECUACIONES EN t

a). SOLUCIÓN para $f(x) = \sin(8x)$

b). SOLUCIÓN para $f(x) = \sin(x)$

FUNCIONES PROPIAS en condición inicial / DESARROLLOS EN SERIE UTILIZADOS

RESOLUCION y RAZONAMIENTOS

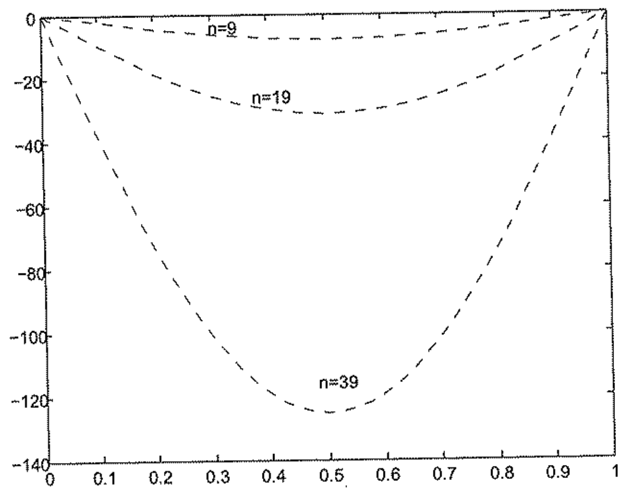
EJERCICIO 2 , 1

Se considera el problema de contorno

$$y'' + \pi^2 y = x, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

La función matlab *elementosfinitos*, convenientemente modificada, nos proporciona las gráficas de la figura para los distintos valores de n indicados, como aproximación de solución. Resolver si se puede y dar alguna explicación sobre los resultados.

RAZÓN BREVE
y SOLUCIÓN



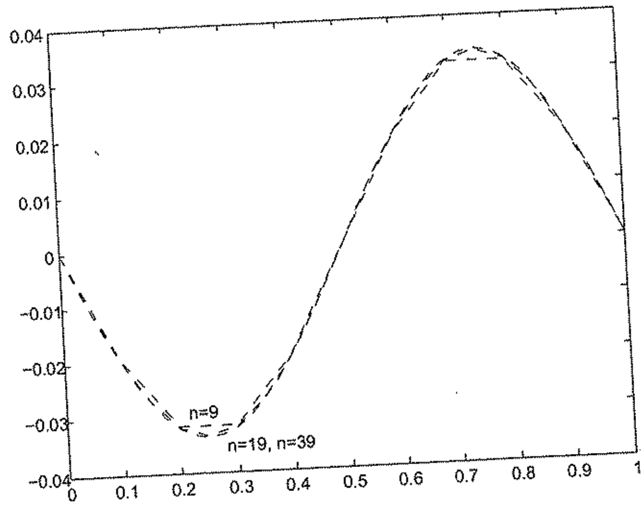
RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.2
Se considera el problema de contorno

$$y'' + \pi^2 y = sin(2\pi x), \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

La función matlab *elementosfinitos*, convenientemente modificada, nos proporciona las gráficas de la figura para los distintos valores de n indicados, como aproximación de solución. Resolver si se puede y dar alguna explicación sobre los resultados.

RAZÓN BREVE
y SOLUCIÓN



RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

```
function y = elementosfinitos(n)
%SEGUNDA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-4/Curso 07-08
%%V.MATLAB 6.5
%y = felementosfinitos(n)
%
%calculo de la aproximacion de la solucion del problema de contorno
%%y''-y=x^2, x\in(0,1); y(0)=0,y(1)=0
%utilizando el método de los elementos finitos: se toman las funciones
%de base phi_i(x) que son continuas en [0,1], se anulan en x=0 y x=1
%son polinomios de grado 1 en los subintervalos [x_i,x_{i+1}], con x_i los nodos

%y toman el valor 1 en el nodo x_i y 0 en el resto ''hat functions''
%
%lee n el número de nodos del intervalo (0,1)
%
%calcula la matriz del sistema A y el termino independiente f y
%nos devuelve un vector c que es la solucion aproximada de y(x) en los nodos
x_i=i*h
%
%definiendo los nodos
h=1/(n+1);
x=ones(n+2,1);
for i=1:n+2
   x(i)=(i-1)*h;
end
%
%Calculando la matriz de coeficientes A y el término independiente:
%
syms t; %variable simbolica
q=-1;%termino que aparece multiplicando a y(x): y''+q(x)y=r(x)
r=t^2;%termino independiente: y''+q(x)y=r(x)
R=ones(n,1);%inicializando vectores
S=ones(n,1);
Q=ones(n,1);
f=ones(n,1);
a1=ones(n,1);
amenos1=ones((n-1),1);
mas1=ones((n-1),1);
%definiendo las integrales sobre cada segmento [x_i,x_{i+1}]
for i=1:n
   R(i)=double(int(q*(t-x(i+2))^2,x(i+1),x(i+2)));
   Q(i)= double(int(q*(t-x(i))^2,x(i),x(i+1)));
   S(i)=double(int(q*(t-x(i))*(t-x(i+1)),x(i),x(i+1)));

f(i)=double((1/h)*int(r*(t-x(i)),x(i),x(i+1))+(1/h)*int(r*(-t+x(i+2)),x(i+1),x(i
+2)));
end
%S1mas=S(1:n-1);
S1menos=S(2:n);
%
%definiendo la matriz tridiagonal A:  vectores que definen  las diagonales
%diagonal principal
a1= (1/h^2)*(-2*h*ones(n,1)+Q+R); %A(i,i)
%subdiagonal inferior
amenos1=(1/h^2)*(h*ones((n-1),1)-S1menos); %A(i,i-1)
%subdiagonal superior
amas1=amenos1;  %A(i,i+1)
%
%
A=diag(a1)+diag(amas1,1)+diag(amenos1,-1); %matriz tridiagonal A
%
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
```



```
coeficientes_solucion=c
%
Nodo_y_Aproximacionsolucion=[x,[0;c;0]]
%
%definiendo la solucion exacta
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
solu_exacta=v  %solucion exacta v
%dibujando las dos soluciones
%
ezplot(v,[0,1])
%
hold on
%
plot(x,[0;c;0],'--')
hold off
%Comparando soluciones
%
nodos=x
solucionaproximadaennodos=[0;c;0];
solucionexactaennodos=subs(v,t,x);
%
%error cometido
%
error=solucionaproximadaennodos-solucionexactaennodos
%double(error)
%cambio de formato en la salida de datos
%%format long
%%nodo_error=[nodos,error]
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; A es tridiagonal. El calculo de las integrales en
[0,1]
%   se lleva al calculo de integrales sobre cada segmento [x_i,x_{i+1}].
%   Vale con calcular la diagonal por encima de la diagonal principal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos calcular explicitamente las integrales.
%  Tambien, en este ejemplo concreto, mediante resolucion, se pueden comparar
%  la solucion exacta y(x) con la aproximada u=sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)
%
%3- El vector solucion c nos da la solucion aproximada de y(x) en los nodos
x_i=i*h
%%%%mas concretamente, c(i) nos da la solucion aproximada en x(i+1); i=1,2,..,n
%%%%c(1)=y(0)=0; c(n+2)=y(1)=0

%
%4-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema mas general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0;
%%Asi como otras condiciones de contorno: y'(a)=0, o y(b)-y'(b)=0,....
```

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3^{er} Curso, I. Caminos. Ecuaciones Diferenciales
Examen de Septiembre. Curso 2010-11

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes.

EJERCICIO 1

Resolver los problemas de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un sector circular ((r,θ) coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad r \in (0,1), \quad \theta \in (0, \frac{5\pi}{4})$$

$$u(1,\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{5\pi}{4}]$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r, \frac{5\pi}{4}) = 0\,, \quad r \in [0,1]$$

donde $f(\theta)$ está definida como

$$f(\theta) = sin(4\theta) \text{ para } \theta \in [0, \frac{3\pi}{4}] \quad , \quad f(\theta) = 0 \text{ para } \theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

Considerar sólo soluciones acotadas cuando $r \to 0$. Escribir claramente los coeficientes quinto y décimo del desarrollo en serie de Fourier utilizado de $f(x)$, así como .

→ PROBLEMA DE VALORES PROPIOS, VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

→ DESARROLLO EN SERIE .

COEFICIENTE $c_5 =$ ....

COEFICIENTE $c_{10} =$ ....

→ LA SOLUCION

EJERCICIO 2

Se consideran los problemas de contorno

a)

$$y'' - x^3 y = e^{x^2}, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

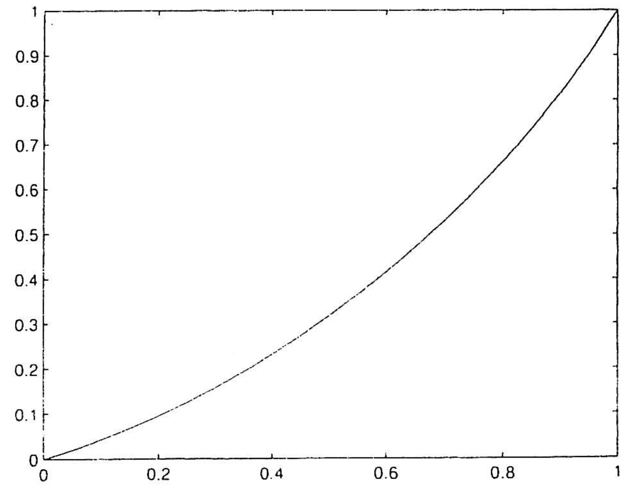
b)

$$y'' - x^3 y = e^{x^2}, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Demostrar que ambos tienen solución única. Indicar sobre el programa (ver hoja adjunta) las modificaciones de la función *elementosfinitos*, para obtener la gráfica que se da (para $n = 19$) como aproximación de la gráfica de la solución de uno de los problemas a) o b). Indicar claramente qué problema es.

RESUMIR LAS MODIFICACIONES:
PROBLEMA a) o PROBLEMA b) (tachar lo que no proceda)

RAZONAMIENTOS:
UNICIDAD



```
function y = elementosfinitos(n)
%SEGUNDA PRACTICA- ECUACIONES DIFERENCIALES Y METODOS NUMERICOS
%%ECUACIONES DIFERENCIALES SOBRE EJERCICIOS HOJA 2, N.1-4/Curso 07-08
%%V.MATLAB 6.5
%y = felementosfinitos(n)
%
%calculo de la aproximacion de la solucion del problema de contorno
%%y''-y=x^2, x\in(0,1); y(0)=0,y(1)=0
%utilizando el método de los elementos finitos: se toman las funciones
%de base phi_i(x) que son continuas en [0,1], se anulan en x=0 y x=1
%son polinomios de grado 1 en los subintervalos [x_i,x_{i+1}], con x_i los nodos

%y toman el valor 1 en el nodo x_i y 0 en el resto ''hat functions''
%
%lee n el número de nodos del intervalo (0,1)
%
%calcula la matriz del sistema A y el termino independiente f y
%nos devuelve un vector c que es la solucion aproximada de y(x) en los nodos
x_i=i*h
%
%definiendo los nodos
h=1/(n+1);
x=ones(n+2,1);
for i=1:n+2
   x(i)=(i-1)*h;
end
%
%Calculando la matriz de coeficientes A y el término independiente:
%
syms t; %variable simbolica
q=-1;%termino que aparece multiplicando a y(x): y''+q(x)y=r(x)
r=t^2;%termino independiente: y''+q(x)y=r(x)
R=ones(n,1);%inicializando vectores
S=ones(n,1);
Q=ones(n,1);
f=ones(n,1);
a1=ones(n,1);
amenos1=ones((n-1),1);
mas1=ones((n-1),1);
%definiendo las integrales sobre cada segmento [x_i,x_{i+1}]
for i=1:n
   R(i)=double(int(q*(t-x(i+2))^2,x(i+1),x(i+2)));
   Q(i)= double(int(q*(t-x(i))^2,x(i),x(i+1)));
   S(i)=double(int(q*(t-x(i))*(t-x(i+1)),x(i),x(i+1)));

f(i)=double((1/h)*int(r*(t-x(i)),x(i),x(i+1))+(1/h)*int(r*(-t+x(i+2)),x(i+1),x(i
+2)));
end
%S1mas=S(1:n-1);
S1menos=S(2:n);
%
%definiendo la matriz tridiagonal A:  vectores que definen  las diagonales
%diagonal principal
a1= (1/h^2)*(-2*h*ones(n,1)+Q+R); %A(i,i)
%subdiagonal inferior
amenos1=(1/h^2)*(h*ones((n-1),1)-S1menos); %A(i,i-1)
%subdiagonal superior
amas1=amenos1;  %A(i,i+1)
%
%
A=diag(a1)+diag(amas1,1)+diag(amenos1,-1); %matriz tridiagonal A
%
matriz_sistema=A
termino_independiente=f
%
%resolviendo el sistema
%
c=A\f;
```



```
coeficientes_solucion=c
%
Nodo_y_Aproximacionsolucion=[x,[0;c;0]]
%
%definiendo la solucion exacta
v=dsolve('D2y-y=t^2','y(0)=0','y(1)=0');
solu_exacta=v  %solucion exacta v
%dibujando las dos soluciones
%
ezplot(v,[0,1])
%
hold on
%
plot(x,[0;c;0],'--')
hold off
%Comparando soluciones
%
nodos=x
solucionaproximadaennodos=[0;c;0];
solucionexactaennodos=subs(v,t,x);
%
%error cometido
%
error=solucionaproximadaennodos-solucionexactaennodos
%double(error)
%cambio de formato en la salida de datos
%%format long
%%nodo_error=[nodos,error]
%%OBSERVACIONES:
%1- La matriz A es simetrica; A es tridiagonal. El calculo de las integrales en
[0,1]
%   se lleva al calculo de integrales sobre cada segmento [x_i,x_{i+1}].
%   Vale con calcular la diagonal por encima de la diagonal principal
%
%2- En este ejemplo concreto podemos calcular explicitamente las integrales.
%  Tambien, en este ejemplo concreto, mediante resolucion, se pueden comparar
%  la solucion exacta y(x) con la aproximada u=sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)
%
%3- El vector solucion c nos da la solucion aproximada de y(x) en los nodos
x_i=i*h
%%%%mas concretamente, c(i) nos da la solucion aproximada en x(i+1); i=1,2,..,n
%%%%c(1)=y(0)=0; c(n+2)=y(1)=0

%
%4-Con muy pocas modificaciones se podria resolver el problema mas general
%%(p(x)y')'+q(x)y=f(x), x\in(a,b), y(a)=0,y(b)=0;
%%Asi como otras condiciones de contorno: y'(a)=0, o y(b)-y'(b)=0,....
```

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE..Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3er Curso, I. Caminos. Ecuaciones Diferenciales

Examen de Parcial. Curso 2010-11

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes.

....

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1.1

Encontrar los valores propios y funciones propias del problema:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \frac{3\pi}{4})$$

$$y(0) = 0, \quad y(\frac{3\pi}{4}) = 0$$

y escribir el desarrollo en serie de Fourier, relativo a las funciones propias encontradas, de la función $f(x)$ definida:

$$f(x) = sin(4x) \text{ para } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad , \quad f(x) = 0 \text{ para } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

Precisar, por ejemplo, los coeficientes de Fourier tercero y quinto.

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

DESARROLLO EN SERIE:

C_3=...

C_5= - - - - - - - - - - -

EJERCICIO 1.2

Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un sector circular ((r, θ) coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$):

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \qquad r \in (0, 2), \quad \theta \in (0, \frac{3\pi}{4})$$

$$u(2, \theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \frac{3\pi}{4}) = 0, \quad r \in [0, 2]$$

donde $f(\theta)$ está definida como

$$f(\theta) = sin(4\theta) \text{ para } \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad , \quad f(\theta) = 0 \text{ para } \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

Considerar sólo soluciones acotadas cuando $r \to 0$. Escribir claramente las ecuaciones diferenciales ordinarias en las variables r y θ y el problema de valores propios obtenidos por separación de variables. Escribir la solución del problema de contorno encontrada.

ECUACIONES en r y en θ

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

SOLUCIONES de las Ecuaciones en r y θ

SOLUCIÓN del Problema:

EJERCICIO 2

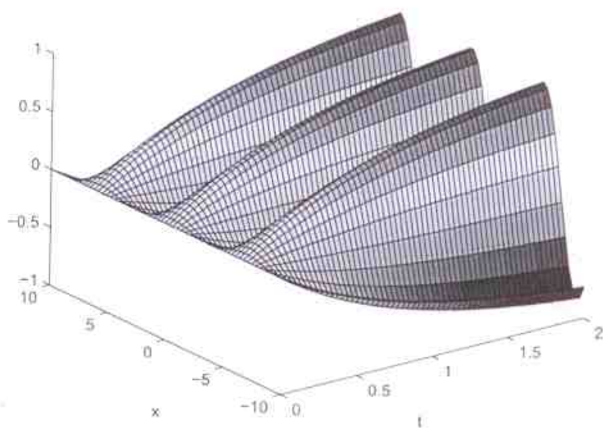
Se considera el problema de Cauchy para la ecuación del calor:

$$u_t - u_{xx} = \cos(x), \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0$$

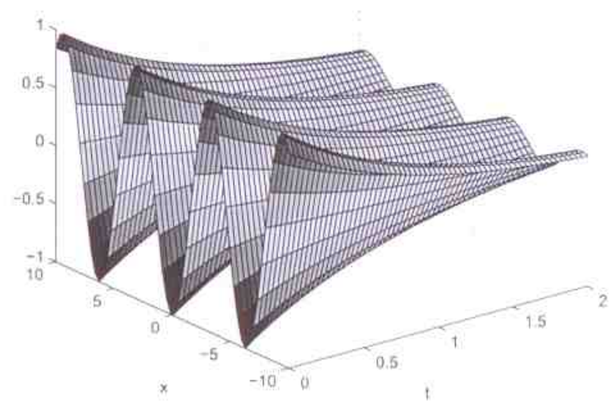
$$u(x, 0) = 0 \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Indicar claramente la gráfica de la solución, entre las dos proporcionadas, razonando la respuesta. Resolver si se puede e indicar si hay alguna relación de la otra gráfica con el problema.

(A)



(B)



a). GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN: Gráfica A   Gráfica B (táchese lo que no proceda)

b). SOLUCIÓN DEL PROBLEMA..............................

c).POSIBLE RELACIÓN de la otra gráfica

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$