4^0 I. Caminos

Cálculo Simbólico y Numérico en Ecuaciones Diferenciales

Hoja 6. Sobre Desarrollos en Serie de Fourier y Transformación de Fourier

Comandos útiles: $fourier(f)$, $ifourier(F)$, $fourier(sym('Heaviside(t)'))$, $fourier(sym('Dirac(t)'))$.
fft, $ifft$

Para f una función de la variable simbólica x, $F = fourier(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica w.

1. Aplicar el método de separación de variables para resolver el problema, que modela las vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} + u_{xxxx} & = & 0\,, x \in (0,\pi), t > 0\,, \\ u(x,0) & = & \sin 2x\,,\ x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) & = & 3\sin 2x\,,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) & = & 0\,, t \geq 0\,, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) & = & 0\,, t \geq 0\,. \end{array} \right.$$

   Escribir los problemas de contorno y de valores iniciales que aparecen a lo largo de la resolución.

2. Aplicar la Transformada de Fourier para resolver el problema que modela las vibraciones de una viga de longitud infinita

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} + \frac{1}{a^2}u_{xxxx} & = & 0\,, x \in (-\infty,\infty), t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,,\ x \in (-\infty,\infty)\,, \\ u_t(x,0) & = & ag''(x)\,,\ x \in (-\infty,\infty)\,. \end{array} \right.$$

   supuesto que a es una constante positiva y f y g dos funciones tales que existen las tranformadas de Fourier de f, g, g' y g''.

3. Resolver el problema de Cauchy para la propagación del calor en una barra conductora de longitud infinita, conociendo la temperatura $u(x,t)$ en el instante inicial ($u(x,0) = f(x)$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t - a^2 u_{xx} & = & 0\,,\ x \in (-\infty,\infty), t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x),\ x \in (-\infty,\infty)\,. \end{array} \right. \tag{0.1}$$

4. Utilizar la transformada de Fourier discreta, y en particular la función MATLAB fft, para encontrar la aproximación de los coeficientes de Fourier complejos $\{c_k\}_{k=-N}^{N}$ relativos a la función $f(x) = x(x-2\pi)$, en el intervalo $[0, 2\pi]$. Comparar dichos coeficientes con los exactos obtenidos con el comando *int* . Hacer la gráfica de la solución comparando con la gráfica de la aproximación de los $2N+1$ términos del desarrollo en serie complejo utilizando los coeficientes exactos y los aproximados (dibujar la parte real de la función en caso necesario).

5. Utilizando la función fft, programar una función MATLAB que lea una función definida en $[0, 2\pi]$, que lea N y calcule la aproximación de los $N+1$ coeficientes de Fourier complejos y dibuje la aproximación de $f(x)$ utilizando los $N+1$ términos del desarrollo en serie de Fourier complejo.

6. Utilizando la función fft y $fftshift$, programar una función MATLAB $ftrans$ que calcule dibuje la gráfica de las partes real e imaginaria de la transformada discreta de Fourier de una función f en el intervalo $[\frac{-N\pi}{a}, \frac{-N\pi}{a}]$. Pedir a la función $ftrans.m$ que lea en los argumentos una función f concentrada en un intervalo $[-a, a]$, a y el número de puntos de la muestra en el que se evalua f.

7. Aplicar la función anteriormente programada para calcular la transformada discreta de la función $f(x) = sin(x)exp(-|x-2|/4)$ para los valores de $a = 160$, $N = 8192$. Hacer una grfica de la parte real e imaginaria de dicha transformada en un intervalo [-2,2].

8. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para $f(x) = exp(13x\pi i/L)$ en $[0, 2L]$, tomando $L = 2$, $N = 64$. Hacer la gráfica del módulo de la transformada de Fourier

9. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para la función $f(x) = cos(13x\pi/L)$.

10. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para la función $f(x) = cos(x)$, $x \in [0, 2n\pi]$, tomando $N = 64$ y aumentando n de manera que se obtenga una aproximación de la transformada discreta en $[-2, 2]$. Comparar con la transformada de Fourier exacta que se calcula con el comando $fourier$.