NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen 1-Febrero-2008

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

1.) Se considera la ecuación

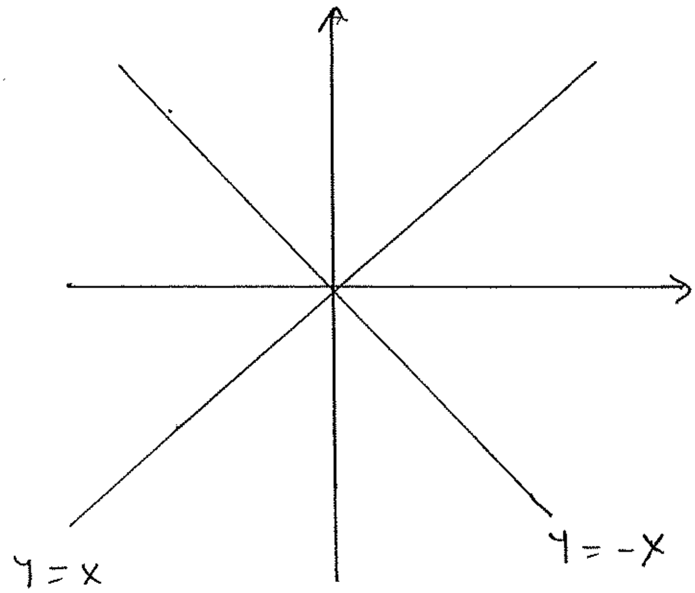
$$xy' = y + (x+y)\log(\frac{x+y}{x})$$

a). Encontrar la solución general

SOLUCION GENERAL en forma explicita:

RESOLUCION

b). Rayar la región del plano en que la ecuación diferencial no está definida. Indicar el crecimiento de las curvas integrales en el dominio de definición. Razonar las respuestas.



c). Demostrar que existe una única solución pasando por el punto $(-2, 0)$. Lo mismo para $(1, 1)$. Encontrar esta solución explícita exacta y el intervalo en el que está definida dicha solución. Hacer una gráfica aproximada de dichas soluciones.

SOLUCION EXPLICITA verificando $y(-2) = 0$

INTERVALO de definición

SOLUCION EXPLICITA verificando $y(1) = 1$

INTERVALO de definición

RAZON BREVE Y GRAFICA

2). Resolver, utilizando el método de variación de parámetros, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2e^x \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0\,, y_2(0) = 0\,.$$

Encontrar un problema de Cauchy relativo a la ecuación diferencial de segundo orden que verifica la componente $y_1(x)$ del sistema.

SOLUCION DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION DEL PROBLEMA DE CAUCHY DADO

$y_1(x) =$

$y_2(x) =$

ESCRIBIR EL PROBLEMA DE CAUCHY para $y_1(x)$

3). Resolver la ecuación diferencial:

$$y''' + 4y'' + 4y' = e^{-2x}$$

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION NO HOMOGENEA

RESOLUCION

4). Se consideran los problemas de contorno

$$(a) \quad \begin{cases} (\frac{1}{\cos(x)} y')' = \cos(x) & , \quad x \in (0,1) \\ y'(0) = 0 & , \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} (\frac{1}{\cos(x)} y')' = \cos(x) & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Encontrar la solución única del problema que se pueda; decir si no existe. Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN ÚNICA de (a)......

SOLUCIÓN ÚNICA de (b)....

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

5). Linealizar la ecuación del péndulo no amortiguado

$$y'' + ky' + \sin(y) = 0\,, \qquad \text{con } k > 0$$

para valores de y cercanos a $y = \pi$. Resolver la ecuación linealizada

ECUACION LINEALIZADA

SOLUCION EC.LINEALIZADA

RESOLUCION

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-**Método de variación de parámetros:** cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-**Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:**

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- **Método de coeficientes indeterminados** cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-**Método de Euler para el problema** $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-**Función de Green:**

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-**Coeficientes de Fourier:**

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen de Septiembre-2008

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Sea una A constante fija. De los dos problemas de Cauchy que se dan a continuación, resolver el que se pueda. Del otro encontrar una aproximación de la solución mediante los 7 primeros términos del desarrollo en serie de Taylor. Dejar los resultados en términos de A

$$a) \qquad y' + xy = 1, \quad y(0) = A$$

SOLUCION o APROXIMACION

$$b) \qquad y' + xy = x, \quad y(0) = A$$

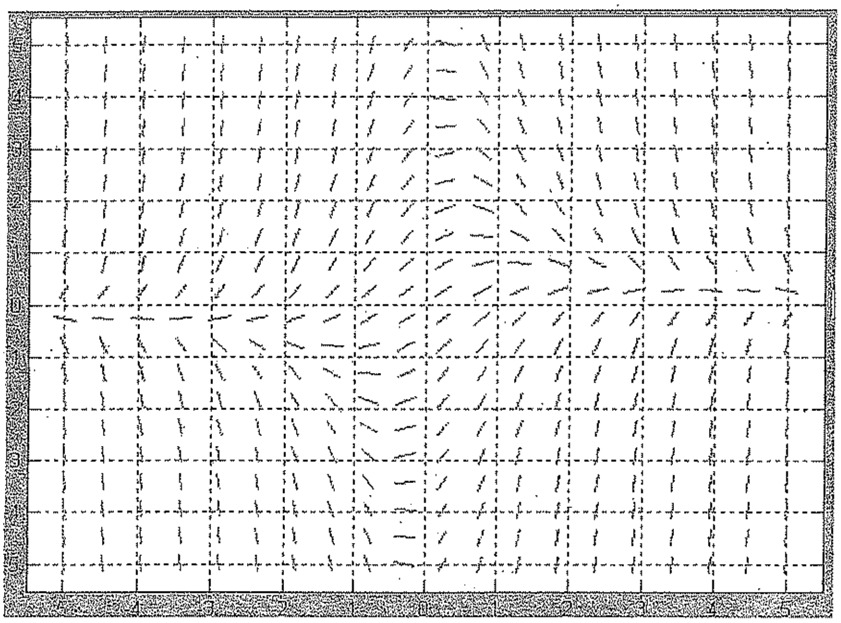
SOLUCION o APROXIMACION

Escribir claramente cuál de los dos campos de direcciones dados corresponde a cada una de las ecuaciones diferenciales dadas. Dar una razón breve.

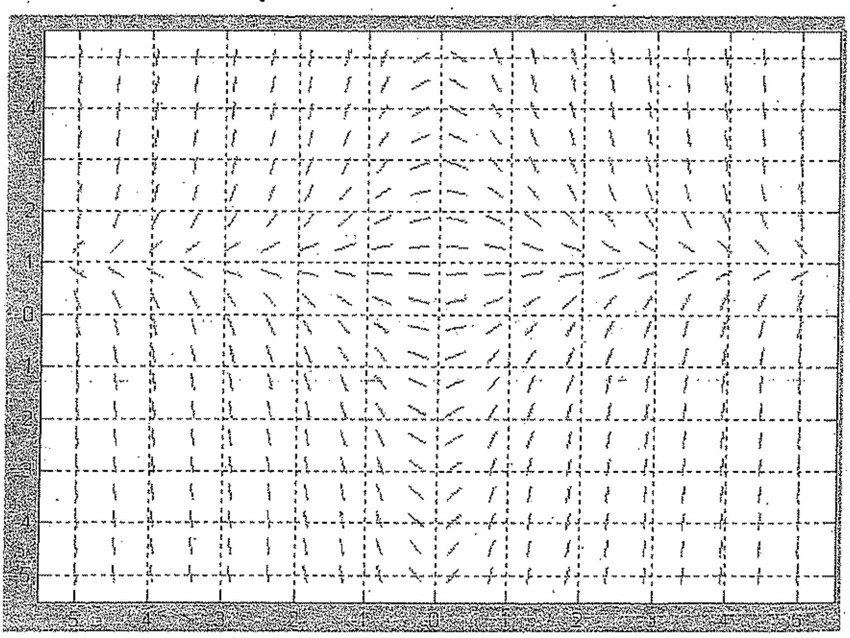
(1) CORRESPONDE a..........
RAZON

(2) CORRESPONDE a..........
RAZON

(1)



(2)



EJERCICIO 2

Encontrar los 10 primeros términos del desarrollo en serie de la solución de

$$y'' + 3xy' - 6y = 0$$

Encontrar una solución explícita y reducir el orden de la ecuación.

Resolver el problema de Cauchy:

$$y'' + 3xy' - 6y = 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

ESCRIBIR:

DESAROLLO EN SERIE DE LA SOLUCION

SOLUCION EXPLÍCITA DE LA EC. HOMOGENEA

ECUACION DE PRIMER ORDEN A LA QUE SE LLEGA

SOLUCION DEL P. DE CAUCHY

EJERCICIO 3 Resolver, utilizando el método de variación de parámetros, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 + 2 \\ y_2' &= 2y_1 - 2y_2 + 1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0\,, y_2(0) = 0\,.$$

SOLUCION DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION DEL PROBLEMA DE CAUCHY DADO

1

EJERCICIO 4
Resolver la ecuación diferencial:

$$y''' - 4y'' + 3y' = x^2$$

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION NO HOMOGENEA

RESOLUCION

EJERCICIO 5
Se considera el problema de Contorno

$$x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}, \quad x \in (1, e)$$
$$y(1) = 0, \quad y(e) = 3$$

Razonar si tiene solucin única. Resolver la ecuación.

SOLUCIÓN DE LA EC. HOMOGENEA......

SOLUCIÓN DE LA EC. NO HOMOGENEA....

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN: RAZONAMIENTO

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$