NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - 2 de Febrero de 2011

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Resolver

$$y' = -\frac{e^x y}{e^x + y}$$

Encontrar la solución pasando por $(0, 1/2)$. Razonar la existencia y unicidad de solución explícita pasando por este punto, encontrarla si se puede, así como el intervalo de definición de ésta. Hacer lo mismo con el punto $(0, 0)$.

SOLUCION GENERAL

SOLUCION pasando por $(0, 1/2)$ / INTERVALO

SOLUCION pasando por $(0, 0)$ / INTERVALO

RAZONANIENTOS:

Existencia y unicidad de solución

EJERCICIO 2

Se considera la ecuación de un resorte no lineal amortiguado

$$y'' + y' + y^3 = 0$$

Linealizar la ecuación para valores $y(t)$ cercanos a $y = 0$. Resolver dicha ecuación.

Escribir la ecuación de las trayectorias de ambas ecuaciones, encontrando las trayectorias de la ecuación que se pueda. Para la otra ecuación, encontrar y dibujar las isoclinas para las pendientes 0, 1, -1 e ∞ y las respectivas direcciones del campo asociado a la ecuación diferencial.

ECUACION LINEALIZADA Y SOLUCION

ECº DIFER. DE LAS TRAYECTORIAS.

TRAYECTORIAS de ED LINEALIZADA o de ED DADA
(tachar lo que no proceda)

ISOCLINAS

EJERCICIO 3

Se considera el Problema de Cauchy

$$y'' + y' + x^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Encontrar la aproximación de la solución mediante los 6 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Para condiciones iniciales $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$. Encontrar la expresión del término general a_n en función de los anteriores indicando el valor de n. Razonar el intervalo de definición de la solución.

$y(x) \approx$

para $n \geq$ .... , $a_n =$

INTERVALO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Resolver la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - y = t^2 + e^{2t}$$

(indicación: encontrar soluciones particulares de las ED: $y^{(4)} - y = t^2$, $y^{(4)} - y = e^{2t}$)

Escribir el sistema diferencial de primer orden asociado a la ecuación diferencial y la matriz fundamental del sistema. Escribir la solución del sistema no homogéneo asociado en términos de la matriz fundamental (no se pide resolver el sistema).

SOLUCION GENERAL ED HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL ED NO HOMOGENEA

SISTEMA

MATRIZ FUNDAMENTAL

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA ASOCIADO

EJERCICIO 5
Resolver los sitemas

$$a).\begin{cases} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$b).\begin{cases} xy_1' &= y_1 \\ xy_2' &= y_1 + y_2 \end{cases}$$

SOLUCION GENERAL DE a).

SOLUCION GENERAL DE b).

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

NOMBRE: **Número**

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - Septiembre de 2011

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia $xy = C$. Razonar qué campo de direcciones está asociado a la ecuación diferencial de la familia dada.

ECUACIÓN DIF. DE LA FAMILIA DADA ....

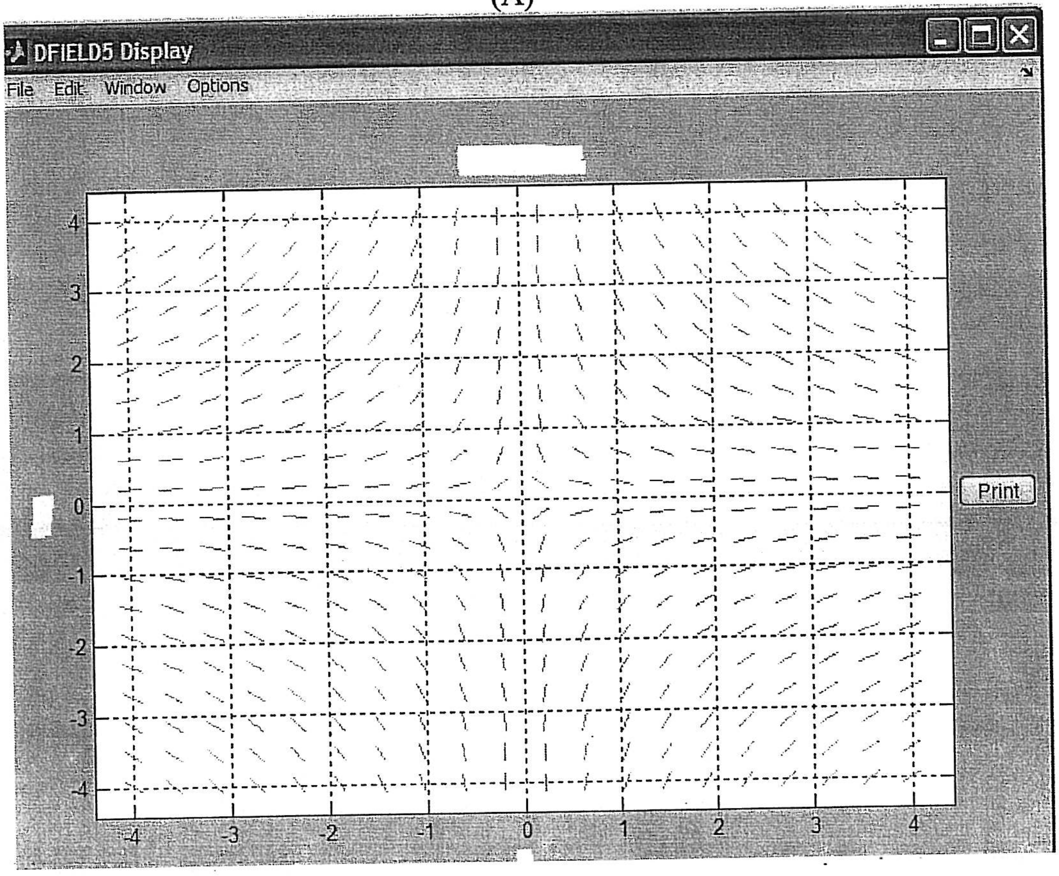
CAMPO DE DIRECCIONES: GRÁFICA (A) o (B) (tachar lo que no proceda)
RAZÓN BREVE:

ECUACIÓN DIF. DE LA NUEVA FAMILIA ....

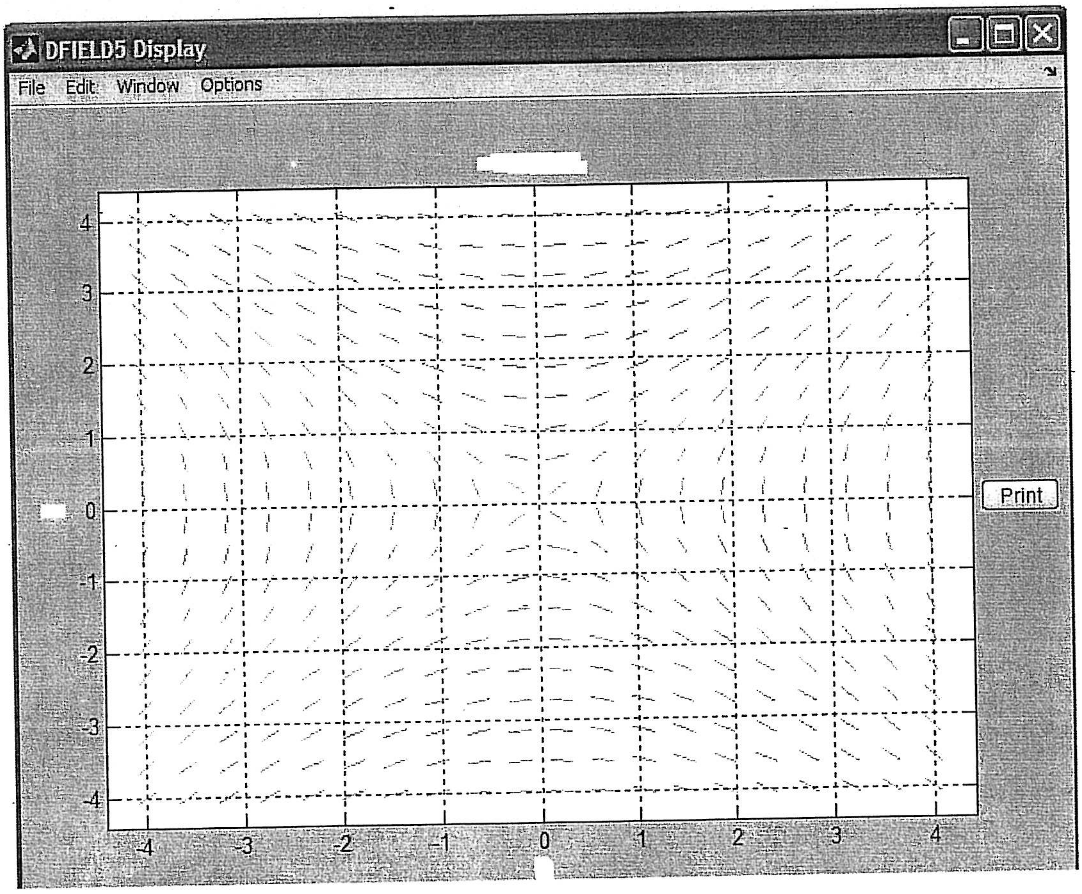
NUEVA FAMILIA ....

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

(A)


DFIELD5 Display
File Edit Window Options
Print
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

(B)


DFIELD5 Display
File Edit Window Options
Print
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

NOMBRE: Número:

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - Septiembre de 2011

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia $y^2 - x^2 = C$. Razonar qué campo de direcciones está asociado a la ecuación diferencial de la familia dada.

ECUACIÓN DIF. DE LA FAMILIA DADA ....

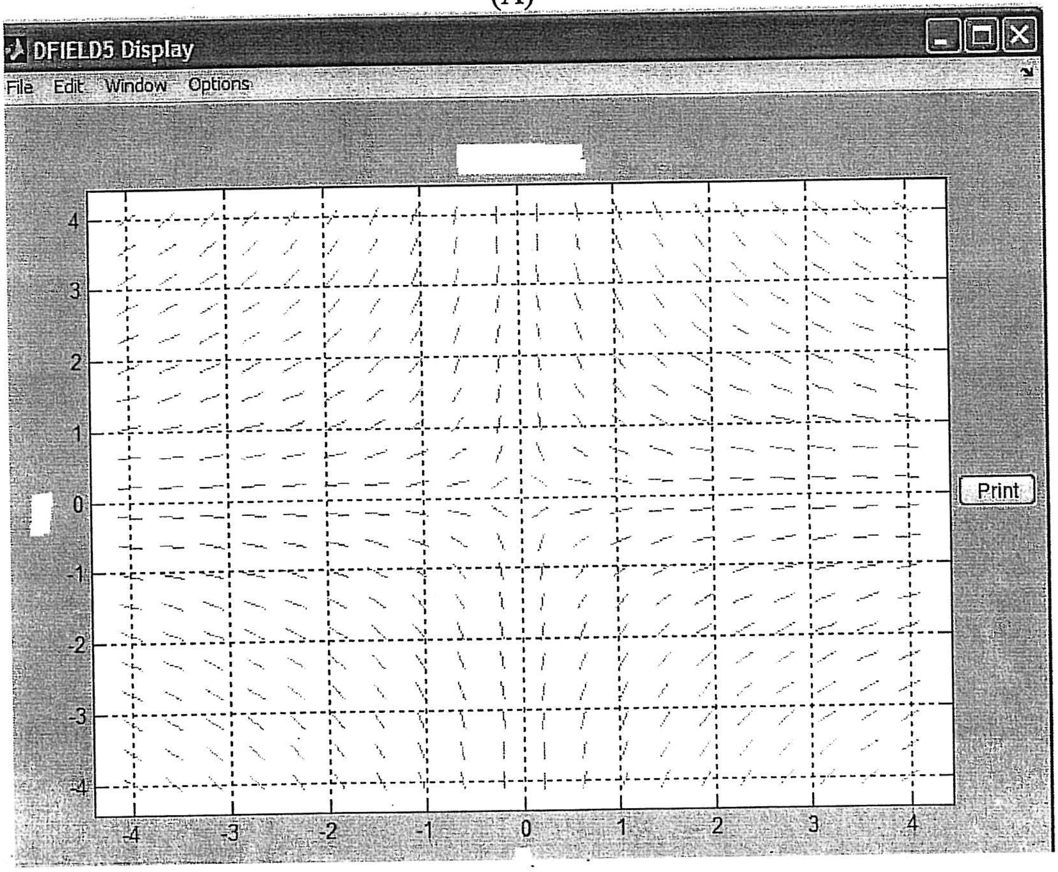
CAMPO DE DIRECCIONES: GRÁFICA (A) o (B) (tachar lo que no proceda)
RAZÓN BREVE:

ECUACIÓN DIF. DE LA NUEVA FAMILIA ....

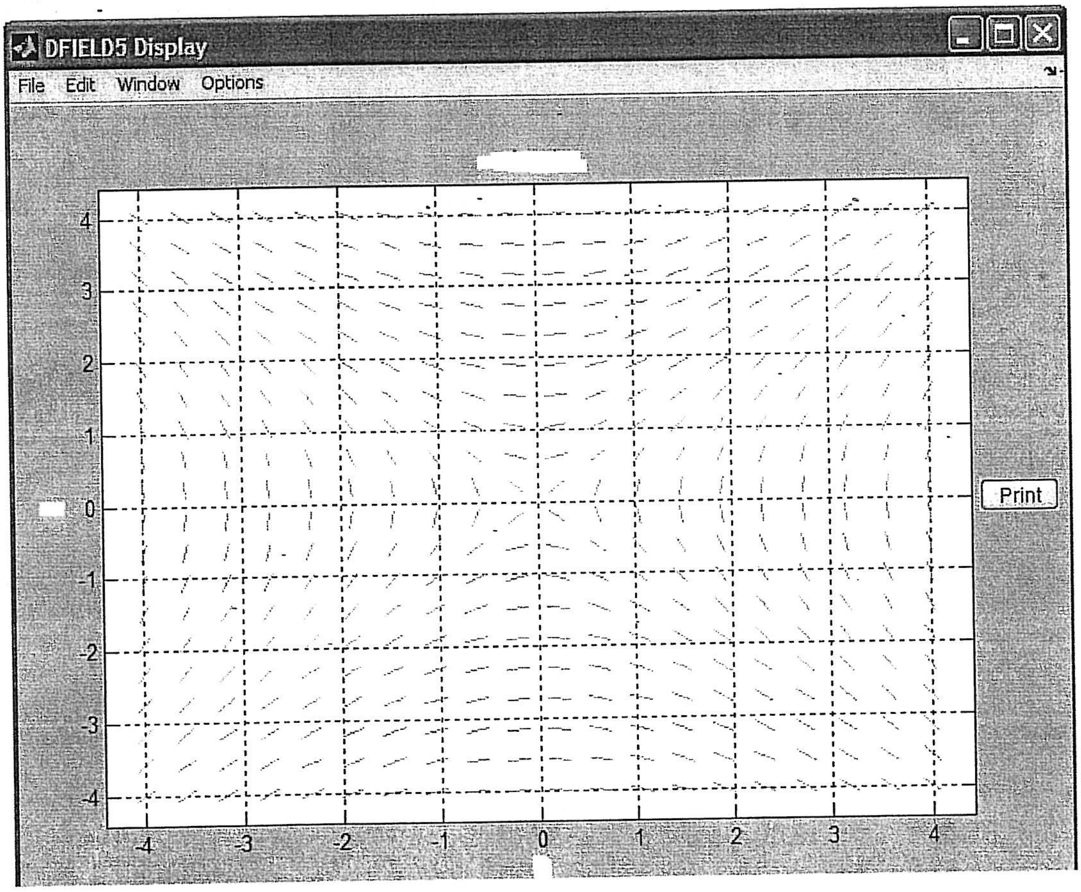
NUEVA FAMILIA ....

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

(A)


DFIELD5 Display
File Edit Window Options
Print
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

(B)


DFIELD5 Display
File Edit Window Options
Print
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

EJERCICIO 2

Resolver la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{2x^2y}{x^3 + 3xy^2}$$

Estudiar la existencia y unicidad de solución explícita del problema de Cauchy

$$y' = -\frac{2x^2y}{x^3 + 3xy^2}, \quad y(1) = 1$$

Escribir el valor aproximado de la solución explícita del Problema de Cauchy en [0.9,1.1], utilizando el método de Euler para el tamaño del paso h=0.1

SOLUCION GENERAL.......................................

APROXIMACION

$\varphi(0.9) \approx$ ....$\varphi(1.1) \approx$ ....

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION

EJERCICIO 3

1). Resolver las ecuaciones diferenciales

$$a).\quad y'' + 6y' + 9y = cos(x)$$

$$b).\quad y''' + 6y'' + 9y' = cos(x)$$

SOLUCION GENERERAL DE LAS ECU. DIF. HOMOGENEAS a) y b)

SOLUCION GENERAL de a):..

SOLUCION GENERAL de b):.......................................

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Resolver la ecuación

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

sabiendo que una solución es un polinomio de primer grado. Indicar en qué intervalo o intervalos se resuelve la ecuación diferencial. Encontrar la ecuación diferencial de primer orden a la que se llega utilizando el método de variación de parámetros o reducción de orden.

SOLUCION GENERAL ECUACION...........................

ECUACION DIF. de 1^{er} orden...............................

INTERVALOS..................

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5
Demostrar que el problema de contorno

$$x^2y'' + 3xy' + y = x, \quad x \in (1,2)$$

$$y(1) = 1/4, \quad y'(2) = 0$$

tiene solución única y encontrarla

SOLUCION GENERAL EC HOMOGENEA.................

SOLUCION GENERAL EC NO HOMOGENEA.................

SOLUCION PROBLEMA CONTORNO.................

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION

EJERCICIO 6
Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 + e^x \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = -2$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad ; \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h \, , \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad ; \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b) \, ; \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$