NOMBRE...**Número**.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

3^{er} Curso I. Caminos. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Examen final parte ED: 1-II-2012

Observaciones: Escribir exactamente la solución o ecuación obtenida donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide (en RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS) o en las otras hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. No utilizar calculadora ni apuntes.

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1.1

Hacer el cambio de variable $\xi = x + 5t$, $\eta = x - 5t$, para reducir la ecuación $u_{xt} = x$ a una del tipo calor, ondas o Laplace, en las variables ξ y η.

ECUACION QUE SE OBTIENE:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 1.2
Resolver el problema de valor inicial

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\, t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad t > 0$$

SOLUCION:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 1.3
Resolver el problema de valor inicial

$$xu_t + tu_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\, t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad t > 0$$

SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 2

Resolver el problema de contorno mixto para el operador de Laplace en el cuadrado $(0,\pi)\times(0,\pi)$.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} &= 0\,, \quad x,\, y\in(0,\pi)\,, \\ u_x(0,y)=0 \quad , & u_x(\pi,y)=0 \quad , y\in[0,\pi]\,, \\ u(x,0)=5\cos 2x \quad , & u(x,\pi)=0\,,\ x\in[0,\pi]\,, \end{cases}$$

Escribir el problema de valores propios al que se llega por separación de variables. Indicar cuáles de las funciones que se dan

$\phi_1(x)=5\cos(2x)$, $\phi_2(x)=5\sin(2x)$, $\phi_3(x)=3$, $\phi_4(x)=\cos(x/2)$

son funciones propias de dicho problema y calcular los valores propios asociados a dichas funciones propias. Dar una razón que justifique las ϕ_i que no son funciones propias.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

FUNCIONES PROPIAS entre las ϕ_i dadas // VALORES PROPIOS ASOCIADOS

ϕ_i que no son funciones propias: RAZON BREVE

SOLUCION DEL PROBLEMA dado:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

a). Resolver el problema de contorno (si no se sabe resolver demostrar que tiene solución única)

$$(x+2)^2y'' + (x+2)y' - y = 1, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

b). Utilizando el método de elementos finitos para la aproximación de la solución del problema de contorno dado en 3.a, considerar el sistema asociado $A\bar{c} = \bar{f}$ para el tamaño del paso $h = 0.1$. Calcular los términos $a_{10,10}$ y f_{10} de dicho sistema precisando su valor numérico (se puede dejar $a_{10,10}$ en términos integrales y calcular el valor numérico de f_{10}). Razonar las respuestas así como los valores que deben aproximar los coeficientes c_1 y c_{10}

SOLUCION PROBLEMA

$a_{10,10}$=

f_{10}=

$c_1 \approx$

$c_{10} \approx$

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \, \exp(\int p(x)dx) \, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$