NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3er Curso I. Caminos. Ecuaciones Diferenciales
Examen, 4 de Febrero de 2009. Curso 08-09

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes.

EJERCICIO 1

1.1.Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$
\begin{gathered}
u_t - 4u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad t > 0 \\
u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,\pi) \\
u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0
\end{gathered}
$$

con temperatura inicical $f(x)$ dada por la función

$$
f(x) = 1, \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(x) = \sin(x), \text{ si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]
$$

Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega, los valores propios y las funciones propias encontrados, el desarrollo en serie de Fourier utilizado y la solución.

a). PROBLEMA DE VALORES PROPIOS
VALORES Y FUNCIONES PROPIAS

b). DESARROLLO EN SERIE

c). SOLUCION

1.2.- Escribir un problema de valor inicial para la ecuación del calor en una barra conductora de longitud infinita, de manera que las solució verifique también

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0\,, \qquad \forall t \geq 0$$

Escribir la solución.

a). PROBLEMA DE CAUCHY

b).SOLUCION

c).RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Se considera el problema de contorno

$$((x-1)^2 y')' = (x-1), \quad x \in (2,3)$$

$$y(2) = 0, \quad y(3) = 0$$

2.1.- Resolver

2.2.- Considerar la aproximación de la solución a través de las funciones de base $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N+1}$ del método de los elementos finitos, para puntos igualmente espaciados en $[2,3]$ a distancia $h = 0.1$. Escribir la aproximación de la solución en el intervalo $[2.2, 2.3]$. Razonar si alguna matriz de las dadas es la que se obtiene en la aproximación con el método de los elementos finitos de la solución del problema dado (se ha utilizado para generarla las funciones matlab *galerkin* o *elementosfinitos* del curso)

SOLUCION

APROXIMACION en $[2.2, 2.3]$.

MATRIZ a) b) c) d) NINGUNA

Hacer un círculo en lo que proceda y razonar la respuesta

a) matriz_sistema =

5.4348	0	0	0	0	0	0	0	0
0	20.2392	0	0	0	0	0	0	0
0	0	44.9132	0	0	0	0	0	0
0	0	0	79.4568	0	0	0	0	0
0	0	0	0	123.8701	0	0	0	0
0	0	0	0	0	178.1529	0	0	0
0	0	0	0	0	0	242.3053	0	0
0	0	0	0	0	0	0	316.3273	0
0	0	0	0	0	0	0	0	400.2190

b) matriz_sistema =

-42.0684	21.5599	0	0	0	0	0	0	0
21.5599	-44.2253	22.6653	0	0	0	0	0	0
0	22.6653	-46.4927	23.8274	0	0	0	0	0
0	0	23.8274	-48.8765	25.0491	0	0	0	0
0	0	0	25.0491	-51.3824	26.3334	0	0	0
0	0	0	0	26.3334	-54.0169	27.6835	0	0
0	0	0	0	0	27.6835	-56.7864	29.1029	0
0	0	0	0	0	0	29.1029	-59.6979	30.5950
0	0	0	0	0	0	0	30.5950	-62.7586

c) matriz_sistema =

-24.2667	13.2333	0	0	0	0	0	0	0
13.2333	-28.8667	15.6333	0	0	0	0	0	0
0	15.6333	-33.8667	18.2333	0	0	0	0	0
0	0	18.2333	-39.2667	21.0333	0	0	0	0
0	0	0	21.0333	-45.0667	24.0333	0	0	0
0	0	0	0	24.0333	-51.2667	27.2333	0	0
0	0	0	0	0	27.2333	-57.8667	30.6333	0
0	0	0	0	0	0	30.6333	-64.8667	34.2333
0	0	0	0	0	0	0	34.2333	-72.2667

d) matriz_sistema =

11.7645	-6.6667	0.9375	-1.8133	0.4514	-1.0873	0.3038	-0.7861	0.2306
-6.6667	46.3082	-18.7200	2.2222	-3.9456	0.9375	-2.1985	0.6044	-1.5483
0.9375	-18.7200	103.8808	-36.7347	3.9844	-6.6667	1.5225	-3.4750	0.9375
-1.8133	2.2222	-36.7347	184.4826	-60.7407	6.2400	-10.0275	2.2222	-4.9591
0.4514	-3.9456	3.9844	-60.7407	288.1135	-90.7438	8.9931	-14.0434	3.0421
-1.0873	0.9375	-6.6667	6.2400	-90.7438	414.7734	-126.7456	12.2449	-18.7200
0.3038	-2.1985	1.5225	-10.0275	8.9931	-126.7456	564.4624	-168.7467	15.9961
-0.7861	0.6044	-3.4750	2.2222	-14.0434	12.2449	-168.7467	737.1805	-216.7474
0.2306	-1.5483	0.9375	-4.9591	3.0421	-18.7200	15.9961	-216.7474	932.9276

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\ \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
$3^{\underline{er}}$ Curso I. Caminos. Ecuaciones Diferenciales

Examen, Septiembre 2009. Curso 08-09

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes. ————

EJERCICIO 1. Resolver el problema mixto para la ecuación del ondas:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, \pi), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,\pi)$$

$$u_t(x,0) = 1, \quad x \in (0,\pi)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \qquad t > 0$$

donde $f(x)$ está definida

$$f(x) = cos(x), \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad f(x) = 0, \text{ si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega, los valores propios y las funciones propias encontradas, los desarrollos en serie de Fourier de los datos iniciales utilizados y la solución.

a). VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

b). DESARROLLOS EN SERIE de FOURIER UTILIZADOS

c). SOLUCION

EJERCICIO 2 Se considera el problema de Cauchy para la ecuación del calor:

$$u_t - 9u_{xx} = \cos(x), \qquad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Encontrar una solución particular de la ecuación en derivadas parciales y resolver el problema. Escribir un problema mixto para la misma ecuación del calor en $(0, \pi)$ que tenga la misma solución encontrada.

a). SOLUCION PARTICULAR

b). SOLUCION DEL PROBLEMA

c).PROBLEMA MIXTO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

3.1 Considerando la aproximación de la función $f(x)$ dada en el ejercicio 1 a través de las funciones de base $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N+1}$ del método de los elementos finitos, para puntos igualmente espaciados en $[0, 3.1]$ a distancia $h = 0.1$. Escribir la aproximación de la función en el intervalo $[0.4, 0.5]$ y en el intervalo $[2.4, 2.5]$

3.-APROXIMACIÓN.en $[0.4, 0.5]$ ....

3.-APROXIMACIÓN.en $[2.4, 2.5]$ ....

3.2 Hacer lo mismo que en el apartado 3.1 con $f(x)$ en $[0, \pi]$, considerando las funciones de base encontradas en el ejercicio 1 y $N = 9$.

3.-APROXIMACIÓN.en $[0.4, 0.5]$ ....

3.-APROXIMACIÓN.en $[2.4, 2.5]$ ....

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$