NOMBRE.....Número.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2016-17

Examen Bloque I-EDP, 28 de Octubre de 2016

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. .

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1.1

: Resolver el problema de valor inicial para la ecuación de ondas de primer orden (ondas amortiguadas o amplificadas)

$$u_t - 2u_x - 2u = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad t > 0.$$

Idea: Considerar el cambio $u(x,t) = e^{\alpha t} v(x,t)$, para alguna constante α a determinar.

valor de $\alpha =$

SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 1.2

Utilizar el método de separación de variables para resolver el modelo de vibraciones transversas de una viga:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt}+u_{xxxx} & = & 0\,, \quad x\in(0,\pi), t>0\,, \\ u(x,0) & = & 2\sin(3x)\,, \quad x\in[0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) & = & 2\sin(3x)\,, \quad x\in[0,\pi] \\ u(0,t)=u(\pi,t) & = & 0\,, \quad t\geq 0\,, \\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(\pi,t) & = & 0\,, \quad t\geq 0\,. \end{array}\right.$$

Problema de Cauchy en la variable t

SOLUCION

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 1.3

Considerando la ecuación de Laplace en coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$), se plantea el problema de contorno para un modelo de calor estacionario en la corona circular $r \in (1,2)$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} - \frac{1}{r^2}u = 0, \text{ para } r \in (1,2), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$u(1,\theta) = 1, \quad u(2,\theta) = 1 \quad , \text{ para } \theta \in [0, 2\pi)$$

Por método de separación de variables encontrar una solución independiente de θ.

SOLUCIÓN

ECUACIONES en la variable r :

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u &= 0\,, \quad x \in (0,1), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= f\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ u_t(x,0) &= 1, \quad x \in (0,1)\,, \\ u(0,t) = u_x(1,t) &= 0\,, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

donde $\quad f(x) = \sin(2\pi x)$ para $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = 0$ para $x \in [1/2, 1]$.

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de los datos iniciales en término de las funciones propias encontradas. En particular, escribir claramente (calculando integrales) el primer coeficiente de fourier de $f(x)$. Asimismo, para la función $g(x) = 1$, escribir la aproximación que dan los tres primeros términos del desarrollo en serie de Fourier en el punto $x = 1/2$. Escribir condiciones de contorno para que $g(x) = 1$ sea un función propia

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS y
valores propios y funciones propias

ECUACIONES en la variable t

COEFICIENTE DE FOURIER DE $f(x)$:
1er coeficiente no nulo

APROXIMACION de $g(x) = 1$ en $x = 1/2$

SOLUCION DEL PROBLEMA:

POSIBLES NUEVAS CONDICIONES DE CONTORNO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2 \sin a \, \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$

$$2 \sin a \, \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)\,, \quad 2 \cos a \, \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$