NOMBRE.....Número.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2015-16

Examen Bloque I-EDP, Septiembre de 2016

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1 (5p.)

1.1. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, \pi/2), \quad t > 0$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0, \pi/2)$$
$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in (0, \pi/2)$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi/2, t) = 0 \qquad t > 0$$

donde la velocidad inicial de $g(x)$ está dada por la función

$$g(x) = \cos(2x), \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \qquad g(x) = 0, \text{ si } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}].$$

Escribir claramente los valores propios y las funciones propias encontrados, el primer coeficiente del desarrollo en serie de Fourier utilizado (calculando integrales) y la solución.

VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

1er coeficiente de Fourier

SOLUCION

1.2. Utilizando el apartado 1.1, encontrar la solución del problema dado cambiando la condición inicial para u_t por

$$u_t(x,0) = g(x) - cos(x), \quad x \in (0, \pi/2)$$

con $g(x)$ misma función dada en 1.1.

SOLUCION:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2 (5p.)

2.1. Resolver el problema de valor inicial

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$

$$u(x,0) = e^{-2x}, \quad t > 0$$

SOLUCION

2.2. Resolver el problema de valor inicial

$$u_t + sin(t)u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$

$$u(x,0) = e^{-2x}, \quad t > 0$$

SOLUCION

2.3. Escribir todas las soluciones que encuentres por separación de variables de la ecuación

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

POSIBLES SOLUCIONES

2.4. Dada la ecuación en derivadas parciales:

$$2u_{\zeta\zeta} - 4u_{\zeta\eta} = 0,$$

considérese el cambio $y = \eta$, $x = \zeta + \frac{\eta}{2}$ para reducir a otra ecuación en derivadas parciales. Dar soluciones de la ecuación si se puede.

ESCRIBIR LA NUEVA ECUACION

POSIBLES SOLUCIONES:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$