NOMBRE.....**Número**.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2018-19

Examen Bloque I-EDP, 5 de Noviembre de 2018

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. .

EJERCICIO 1

Resolver usando fórmulas o el método de separación de variables
EJERCICIO 1.1 (1p) Resolver el problema de valor inicial

$$u_t + 4u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

SOLUCION:

EJERCICIO 1.2 (1.2p) Resolver el problema de valor inicial

$$u_t + \sin(t)u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

SOLUCION:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 1.3 (1.2p)
Considerando las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, se plantea el problema de contorno para un modelo de calor estacionario una corona circular

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{4}{r^2}u = 0, \text{ para } r \in (1,2), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$u(1,\theta) = 1, \quad u(2,\theta) = 1 \quad , \text{ para } \theta \in [0, 2\pi)$$

Encontrar una solución independiente de θ, esto es $u(r,\theta) = R(r)$

SOLUCIÓN:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2
EJERCICIO 2.1 (4.5p)
Resolver el problema de contorno de tipo mixto para la ecuación de Laplace en el rectángulo $(0,\pi)\times(0,2)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{xx}+u_{yy} & = & 0\,, \quad x\in(0,\pi)\ , y\in(0,2)\,, \\ u_x(0,y)=0 & , & u(\pi,y)=0\,, \quad y\in(0,2)\,, \\ u_y(x,0)=0 & , & u_y(x,2)=1\,, \quad x\in(0,\pi)\,, \end{array}\right.$$

Escribir los valores propios y funciones propias encontradas, y el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)=1$ en términos de dichas funciones propias. Escribir la solución del problema dado. Escribir la aproximación de dicha solución mediante el primer término del desarrollo en serie. Precisar los coeficientes.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS y
valores propios y funciones propias

DESARROLLO DE $f(x)$

1er COEFICIENTE de FOURIER de $f(x)$:

APROXIMACIÓN de la SOLUCIÓN:

SOLUCION DEL PROBLEMA:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.2. (2p)
Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} + u_t + u & = & 0\,, x \in (0,\pi), t > 0\,, \\ u(x,0) = \cos(x/2) & , & u_t(x,0) = \cos(x/2)\,, x \in [0,\pi]\,, \\ u_x(0,t) = 0 & , & u(\pi,t) = 0\,,\ t \geq 0\,. \end{array} \right.$$

Usar el método de separación de variables (nótese que el problema de valores propios es el mismo que en el ejercicio 2.1)

SOLUCIÓN

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$