NOMBRE.....**Número**.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2015-16

Examen Bloque I-EDP, 30 de Octubre de 2015

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1 (4.4p.)

Resolver el problema mixto para la ecuación del calor en una barra conductora:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (-\pi,\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in [-\pi,\pi]\,, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) & , & u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)\,, \quad t \geq 0\,. \end{array}\right.$$

donde $f(x)$ es la función definida como:

$$f(x) = sin(2x) \text{ si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \qquad f(x) = 0 \text{ si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

Escribir el problema de valores propios al que se llega, así como los valores propios y las funciones propias encontradas. Escribir el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ utilizado, especificando todos los coeficientes del desarrollo que se anulan. Resolver cambiando la condición inicial por $u(x,0) = f(x) + 1$.

LA SOLUCION:

DESARROLLO de $f(x)$:

COEFICIENTES que se anulan:

SOLUCION cuando $u(x,0) = f(x) + 1$

EL PROBLEMA de valores propios
loa valores propios y las funciones propias

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2 (3p.)
Resolver el problema de calor estacionario en una corona circular:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad r \in (1,2),\ \theta \in [-\pi, \pi]$$
$$u(1,\theta) = g(\theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$
$$u(2,\theta) = 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

para la función $g(\theta) = \cos(\theta)$, y para la función $g(\theta) = 2(\cos(\theta/2))^2$. Indicación: utilizar laseparación de variables y/o el problema de valores propios del ejercicio 1 (lo que proceda)

ECUACIONES en la variable r que se resuelven:

ECUACIONES en la variable θ que se resuelven:

2.1. SOLUCION para $g(\theta) = \cos(\theta)$.

2.2. SOLUCION para $g(\theta) = 2(\cos(\frac{\theta}{2}))^2$.

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3 (2.6p.)

Se considera una ecuación de tipo ondas (ecuación del telegrafista) $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$. Resolver los problemas de valores iniciales asociados que se dan a continuación. Indicacón: utilizar la separación de variables o hacer el cambio $u = e^{-t}v$ (elegir lo que proceda)

3.1.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u & = & 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & \sin(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,, \\ u_t(x,0) & = & 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty) \end{array} \right.$$

MÉTODO y SOLUCIÓN

3.2.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0 & = & 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & \sin(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,, \\ u_t(x,0) & = & xe^{-x^2}\,, \quad x \in (-\infty, \infty) \end{array} \right.$$

MÉTODO y SOLUCIÓN

RESOLUCIÓN-RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2 \sin a\, \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$

$$2 \sin a\, \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)\,, \quad 2 \cos a\, \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$