NOMBRE.....**Número**.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2014-15

Examen Bloque I-EDP, 7 de Noviembre 2014

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1 (6p.)

1.1. Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$u_t - 4u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, \pi/2), \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0, \pi/2)$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi/2, t) = 0 \qquad t > 0$$

donde la distribución inicial de temperatura está dada por la función

$$f(x) = \cos(2x), \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \qquad f(x) = 0, \text{ si } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}].$$

Escribir claramente los valores propios y las funciones propias encontrados, el primer coeficiente del desarrollo en serie de Fourier utilizado (calculando integrales) y la solución.

VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

1er coeficiente de Fourier

SOLUCION

1.2. Utilizando el apartado 1.1, encontrar la solución del problema dado cambiando la condición inicial por

$$u(x,0) = f(x) - cos(x), \quad x \in (0, \pi/2)$$

con $f(x)$ misma función dada en 1.1.

SOLUCION:

1.3. Utilizando el apartado 1.1, razonar la existencia de solución del problema

$$u_t - 4u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, \pi/2), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0, \pi/2)$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in (0, \pi/2)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi/2, t) = 0 \qquad t > 0$$

para para alguna función $g(x)$.

SI o NO (tachar lo que no proceda, y escribir $g(x)$ si procede)

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2 (4p.)

2.1. Resolver el problema de valor inicial

$$u_t + u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\, t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad t > 0$$

SOLUCION

2.2. Resolver el problema de valor inicial

$$xu_t + tu_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\, t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad t > 0$$

SOLUCION

2.3. Dada la ecuación en derivadas parciales:

$$2u_{\zeta\zeta} - 4u_{\zeta\eta} = 0,$$

considérese el cambio $y = \eta$, $x = \zeta + \frac{\eta}{2}$ para reducir a otra ecuación en derivadas parciales. Resolver dicha ecuación si se puede y deshacer el cambio de variable para escribir la solución de la ecuación dada. Indicar si la ecuación está relacionada con alguna de las ecuaciones de los apartados anteriores.

ESCRIBIR LA NUEVA ECUACION

SOLUCIONES:

POSIBLES RELACIONES con 2.1 o 2.2

RESOLUCION-RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$