NOMBRE.....**Número**.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2017-18

Examen Bloque I-EDP, 26 de Octubre de 2017

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1 (3p.)
Se considera una ecuación de tipo ondas $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t + u = 0$ (ec. del telegrafista).

EJERCICIO 1.1
Resolver el problema de valores iniciales asociado

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} - 2u_t + u = 0 & = & 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & \sin(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,, \\ u_t(x,0) & = & 2\sin(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty) \end{array} \right.$$

utilizando el método de separación de variables o utilizando la técnica del ejercicio 1.2.

SOLUCIÓN

REOLUCIÓN

EJERCICIO 1.2

Resolver el problema de valores iniciales asociado

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} - 2u_t + u = 0 & = & 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,, \\ u_t(x,0) & = & g(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \end{array} \right.$$

para $f(x)$ y $g(x)$ funciones regulares dadas, reduciendo a un problema de valores iniciales para la ecuación de ondas. Hacer el cambio $u = e^{\alpha t} v$ para alguna constante α a determinar.

$\alpha =$ .....

PROBLEMA PARA LA EC DE ONDAS

SOLUCIÓN

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2 (6p.)
Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} - 2u_t + u & = & 0\,, \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) & = & g(x)\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0 \\ u_x(\pi,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{array}\right.$$

EJERCICIO 2.1. Tomar $f(x) = 0$, $g(x) = \sin(x)$.
Escribir el problema de valores propios al que se llega, así como los valores propios y las funciones propias encontradas. Escribir el desarrollo en serie de Fourier de $g(x)$ utilizado, especificando el valor del primer coeficiente de Fourier no nulo.

EL PROBLEMA de valores propios
loa valores propios y las funciones propias

EL DESARROLLO de $g(x)$:

EL PRIMER COEFICIENTE no nulo:

LA SOLUCION:

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.2. Tomar $f(x) = \sin(x/2)$, $g(x) = \sin(x)$.
Utilizar los razonamientos del ejercicio 2.1 para resolver el problema mixto y escribir el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$.

EL DESARROLLO de $f(x)$:

LA SOLUCION:

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3 (2p.)
Resolver el problema de calor estacionario en un sector circular:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} - \frac{1}{r^2}u = 0, \quad r \in (0,1),\ \theta \in [0,1]$$

$$u(1,\theta) = \sin(5\pi\theta), \quad \theta \in [0,1],$$

$$u(r,0) = u(r,1) = 0, \quad r \in [0,1],$$

utilizando la separación de variables y el hecho de que la solución se aula en el origen de coordenadas ($r = 0$). Escribir la solución en coordenadas cartesianas x, y.

ECUACIONES en la variable r que se resuelven.

ECUACIONES en la variable θ que se resuelven.

LA SOLUCIÓN

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$