NOMBRE.....Número.....

Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
Master Universitario en I. Caminos, C. y P. - Curso 2015-16

Examen Bloque I-EDP, 18 de Enero de 2016

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada donde se pide o en las hojas adjuntas grapadas. Indicar si se cambia de hoja en la resolución. Tiempo 1h.30m.

EJERCICIO 1 (2p.)
Considerando la ecuación de Laplace en coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, se plantea el modelo para la ecuación del calor estacionario:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 1, \qquad \text{para } r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$u(1,\theta) = 2 \quad \text{para} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Teniendo en cuenta que las soluciones deben estar acotadas cuando $r \to 0$, aplicar el método de separación de variables para encontrar una solución independiente de θ. Encontrar el flujo (la derivada normal de la solución) en la frontera $r = 1$

SOLUCIÓN

ECUACIONES en la variable r que se resuelven:

FLUJO:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS ejercicio 1 y 2

EJERCICIO 2 (3p.)

2.1. Resolver el problema de valor inicial

$$u_t - 4u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad t > 0$$

SOLUCION

2.1. Resolver el problema de valor inicial

$$xu_t - tu_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad t > 0$$

SOLUCION

2.3. Resolver el problema de valor inicial

$$u_t - cos(t)u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = e^{2x}, \quad t > 0$$

SOLUCION

EJERCICIO 3 (5p.)
Resolver el problema mixto para la ecuación de tipo ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u &= 0\,, \quad x \in (0,3), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in (0,3)\,, \\ u_t(x,0) &= \sin(\pi x), \quad x \in (0,3)\,, \\ u(0,t) = u(3,t) &= 0\,, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

donde $f(x) = sin(\pi x)$ para $x \in [0, 1/2]$, $f(x) = 1$ para $x \in [1/2, 3]$.
Escribir el desarrollo en serie de Fourier de las funciones $f(x)$ y $\sin(\pi x)$ y el primer coeficiente de Fourier de ambos desarrollos que no se anule.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS y
valores propios y funciones propias

ECUACIONES en la variable t

DESARROLLO en serie de $f(x)$:
1er coeficiente no nulo

DESARROLLO en serie de $\sin(\pi x)$:
1er coeficiente no nulo

SOLUCION DEL PROBLEMA:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2 \sin a \, \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$

$$2 \sin a \, \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)\,, \quad 2 \cos a \, \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$