

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (EDP) con 2 / 3 / m variables independientes *

► **EDP de primer orden** con dos variables independ.

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

x, y **variables independientes;**

$u = u(x, y)$ **función incógnita.**

Resolver la ecuación: encontrar una función u definida en algún dominio $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$, tal que sea continua y admita derivadas parciales primeras en $\mathbf{D}$, y que verifique:

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{D}.$$

Notaciones:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$F(x, t, u, u_x, u_t) = 0, \quad t \equiv y, \quad t - \text{variable temporal}$$

Ejemplos:

▷ **Ecuación de ondas:** $u_t - cu_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$

Solución: $u(x, t) = f(x + ct)$ *onda*

que viaja hacia la derecha (izquierda) si $c < 0$ ($c > 0$)

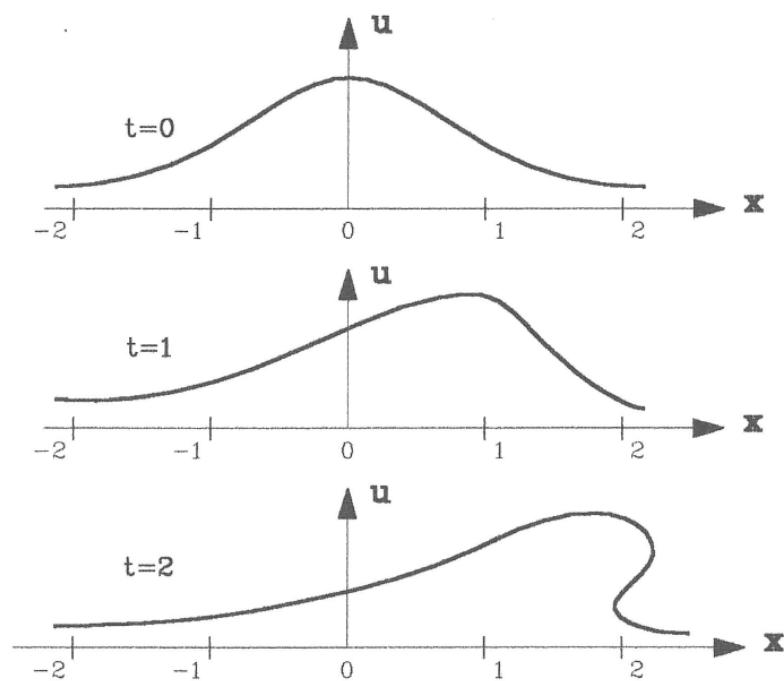
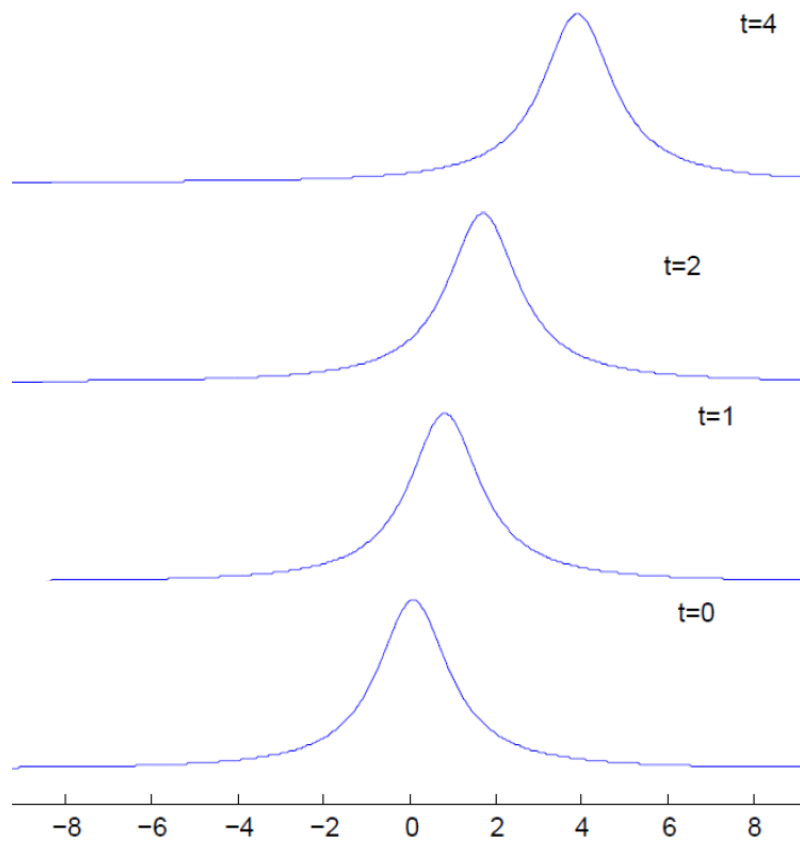
▷ **Ecuación de Burgers:** $u_t + uu_x = 0, u(x, 0) = f(x)$

Solución: $u = f(\xi), \quad x = f(\xi)\tau + \xi, \quad t = \tau$

*

**Resúmenes / Capítulo 6 / Ecuaciones Diferenciales!?.
Una introducción. UC, M^a Eugenia Pérez Martínez**

Distintos aspectos de la propagación de ondas: EDP de primer orden



► **EDP de segundo orden** con dos variables independ.

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0.$$

Se pide a la solución u que admita derivadas parciales segundas en D , y "que verifique la ecuación".

► **EDP parciales, de orden k** , con m variables indep.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_k^{r_k}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}) = 0.$$

► **EDP Lineal, de segundo orden, con 2 variables indep.**

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = p(x, y), \quad (\text{LNH})$$

los coeficientes A, B, C, D, E y F pueden ser funciones dependientes de (x, y) o constantes: *ecuación lineal con coeficientes constantes*.

Si $p(x, y) = 0$: *ecuación lineal homogénea*:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0, \quad (\text{LH})$$

Propiedades de las soluciones de (LH)-(LNH)

- Si $u_1(x, y), u_2(x, y)$ soluciones de (LH) $\Rightarrow$ cualquier combinación lineal de ellas, $c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y)$, es solución de (LH)
- Si $u(x, y)$ y $u_p(x, y)$ soluciones de (LNH) $\Rightarrow$ $u(x, y) - u_p(x, y)$ es solución de (LH)

$A=B=C=0 \Rightarrow$ (LH)-(LNH) EDP lineales de 1^{er} orden

Clasificación de las EDP lineales de 2º orden.

► EDP semilineal con dos variables independientes

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \tilde{F}(x, y, u, u_x, u_y)$$

Para ecuaciones lineales: $\tilde{F} \equiv Du_x + Eu_y + Fu + p(x, y)$

Posibilidad de reducción a una *forma canónica*, según que el *discriminante* $AC - B^2$ sea positivo, nulo o negativo, mediante un cambio de variables

$\zeta = \alpha x + \beta y$, $\eta = \delta x + \gamma y$ / Jacobiano: $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$,
para ciertas constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

1. Si $AC - B^2 > 0$, ecuación de **tipo elíptico** $\mapsto$
 $u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$
2. Si $AC - B^2 = 0$, ecuación de **tipo parabólico** $\mapsto$
 $u_{\eta} - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$
3. Si $AC - B^2 < 0$, ecuación de **tipo hiperbólico** $\mapsto$
 $u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$

Definición: rectas o curvas características (si $A \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Observaciones:

- Necesidad de añadir condiciones adicionales a las ecuaciones para la descripción de fenómenos físicos.
- Importancia de las rectas características para añadir condiciones adicionales.
- Extensión a más variables independientes: con restricciones!

- Ecuaciones elípticas $\longleftrightarrow$ **procesos estacionarios**
- Ecuaciones parabólicas o hiperbólicas $\longleftrightarrow$ **procesos de propagación o de difusión**

► **Ejemplos de ecuaciones en forma Canónica:**

- La ecuación de Laplace (elíptica):

$$u_{xx} + u_{yy} = p(x, y)$$

No tiene rectas características reales

- La ecuación del calor (parabólica):

$$u_t - a^2 u_{xx} = p(x, t), \quad t \equiv y, \quad a \text{ constante}$$

Rectas características: $t = cte$

- La ecuación de ondas (hiperbólica):

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = p(x, t), \quad t \equiv y, \quad a \text{ constante}$$

Rectas características $x + at = cte$; $x - at = cte$

► **Interesan problemas bien planteados:** existe solución, es única y a pequeñas variaciones de los datos le corresponden pequeñas variaciones de la solución

► **Tipos de problemas:**

- Problemas de Cauchy o de valor inicial $\longleftrightarrow$ datos conocidos sobre una curva no característica (condiciones iniciales)
- Problemas de contorno $\longleftrightarrow$ ecuación planteada en un dominio conocido D y datos conocidos sobre la frontera de ∂D (condiciones de contorno).
- Problemas mixtos: condiciones iniciales y condiciones de contorno

Galería de EDP:

- ecuaciones de 2º orden, 2 variables independientes
 - Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$
 - difusión del calor: $u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x)$
 - propagación de ondas: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t, x)$
 - de ondas amortiguadas: $u_{tt} + cu_t = a^2 u_{xx}$
 - ecuación del telegrafista: $u_{tt} + cu_t + bu = a^2 u_{xx}$

- ecuaciones de 2º orden, 3 / más variables indep.

- Laplace: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$
- calor: $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(t, x, y)$
- ondas: $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(t, x, y)$

$$\Delta u = f \quad / \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad / \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

- ecuaciones de 4º orden, 2 variables independientes

- vibraciones de vigas: $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = f(t, x)$
- deformaciones de placas: $\Delta^2 u = f(x, y)$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

- sistema de la elasticidad lineal: $i = 1, 2, 3$

$$-\mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div}(\bar{u})) = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

3 variables independientes, 3 funciones incógnitas:

$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ desplazamientos del punto x en las direcciones de los ejes x_i

λ, μ coef. de Lamé, f_i componentes de una fuerza

$$\operatorname{div}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

Problemas planteados con EDP Lineales

Problemas de Contorno: EDP de tipo elíptico

Dado el dominio D de $\mathbb{R}^2$ y las funciones $p(x, y)$ en D y $f(x, y)$ y $g(x, y)$ conocidas en la frontera D : $\Gamma \equiv \partial D$,

se plantea encontrar la solución de la ecuación (con coeficientes no necesariamente constantes)

$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = p(x, y), \quad (x, y) \in D$
verificando una **condición de contorno** sobre la frontera:

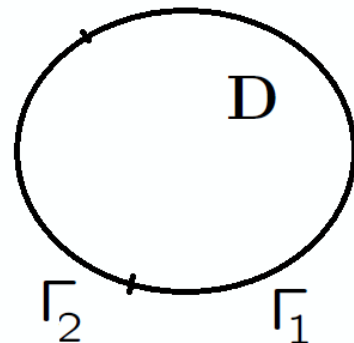
c. Dirichlet $u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma$

c. Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma$

para $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, **c. de contorno mixtas**

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2$$



SOLUCIÓN: Buscar $u(x, y)$ que admita derivadas parciales segundas “verificando” la ecuación EDP en D y las condiciones de contorno sobre Γ .

SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Buscar $u(x, y) = X(x).Y(y)$ y llegar a una ecuación diferencial ordinaria en la variable independiente x y otra en la variable independiente y

En general, nos lleva al cálculo de valores propios y funciones propias para problemas de contorno en EDO, y a los desarrollos en serie de Fourier de funciones

Problemas de contorno planteados para la Ecuación de Laplace:

Sea D un dominio del plano y ∂D su frontera

e.g.: $D = \{(x, y)/x^2 + y^2 < 1\}$; $\partial D = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$

Dadas las funciones $F(x, y)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$

- Problema de Dirichlet:**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

u conocida sobre la frontera

- Problema de Neumann**

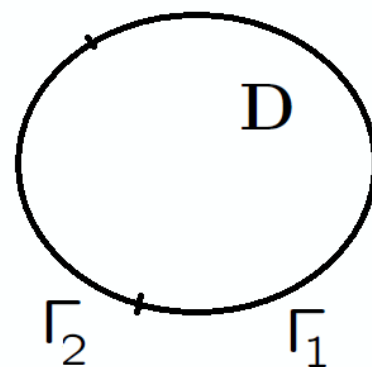
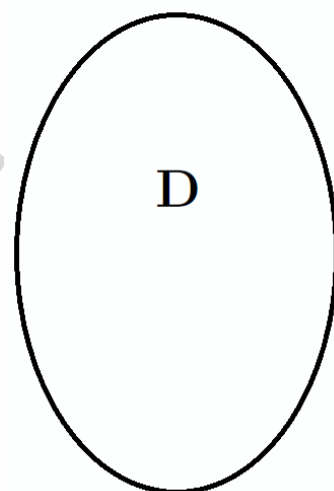
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ conocida sobre la frontera

- Problema de Contorno Mixto:**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera Γ_1 y condición de Neumann sobre la otra parte Γ_2 :
 $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



Resolución:

- Separación de variables si D rectángulo, círculo,....
- Métodos numéricos para dominios más generales

Definición: problemas de valores propios regulares

Encontrar los valores λ (**valores propios**) tales que existe una solución no nula $y(x)$ (**función propia**) de:

$$(\text{PVP}) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$p(x), p'(x), q(x), s(x)$ funciones continuas en $[a, b]$,
 $s(x), p(x) > 0, \forall x \in [a, b], -\infty < a < b < \infty$,
y $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

Teorema

1. Existe una infinidad numerable de valores propios que convergen a infinito:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty.$$

2. Para cada valor propio, λ_k , hay una única función propia asociada, $\phi_k(x)$, linealmente independiente.

3. Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo (a, b) , para el peso s ; es decir:

$$\int_a^b \phi_k(x) \phi_j(x) s(x) dx = \delta_{kj} \text{Cte.}, \forall k, j = 1, 2, 3, \dots$$

4. Para cada función $f(x)$ continua a trozos en $[a, b]$ admite un desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

donde las constantes c_n son los llamados **coeficientes de Fourier** y están dados por la fórmula:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \phi_k(x) s(x) dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx}.$$

La convergencia de la serie en hacia la función f tiene lugar en el sentido de la media cuadrática; es decir:

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Extensiones: sobre convergencia serie / sobre c.c. periódicas

Observación:

- Si las condiciones de contorno son periódicas ($y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$), se tienen los resultados del teorema: ahora para cada valor propio $\lambda_k > \lambda_1$ puede haber dos funciones propias linealmente independientes asociadas.
- El sumatorio del desarrollo en serie se extiende a todas las funciones propias.

Desarrollo clásico de Fourier en $[-\pi, \pi]$ en término de las funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$:

Dada $f(x)$ continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$,

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx),$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ son funciones propias del PVP:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-\pi, \pi), \\ y(-\pi) = y(\pi), & y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

$\phi_{0,0}(x) = 1$ asociada al valor propio $\lambda_0 = 0$

$\phi_{k,1}(x) = \cos(kx)$, $\phi_{k,2}(x) = \sin(kx)$ f.p. linealmente independientes asociadas al valor propio $\lambda_k = (k\pi)^2$.

Ortogonales!: para $k, j = 0, 1, 2 \dots$, $m, n = 0, 1, 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{k,m}(x) \phi_{j,n}(x) dx = 0, \quad \text{si } (k, m) \neq (j, n)$$

Problemas planteados para la ecuación de Ondas

-Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty) \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Solución: *fórmula de d' Alembert*

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds$$

Demostración: $\zeta = x + at, \eta = x - at \longleftrightarrow u_{\zeta\eta} = 0$.

-Problema Mixto:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, l) \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in (0, l) \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Resolución: *separación de variables* (buscar $u(x, t) = X(x)T(t)$ y llegar a un problema de valores propios en la variable espacial)

Extensiones:

- EDP no homogénea: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t)$.
- c.contorno no homogéneas: dadas $l_1(t)$ y $l_2(t)$,
 $u(0, t) = l_1(t), \quad u(l, t) = l_2(t)$.
- condiciones sobre las derivadas en los extremos:
 $u_x(l, t) = 0, \quad \text{o} \quad u_x(l, t) = l_2(t), \quad \text{o}$
 $u_x(l, t) + \beta u(l, t) = l_2(t), \quad \beta \text{ una constante dada.}$

Problemas planteados para la Ecuación del Calor

-Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Solución: *fórmula de Poisson*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4ta^2}} d\zeta.$$

Demostración: Transformación de Fourier

-Problema Mixto:

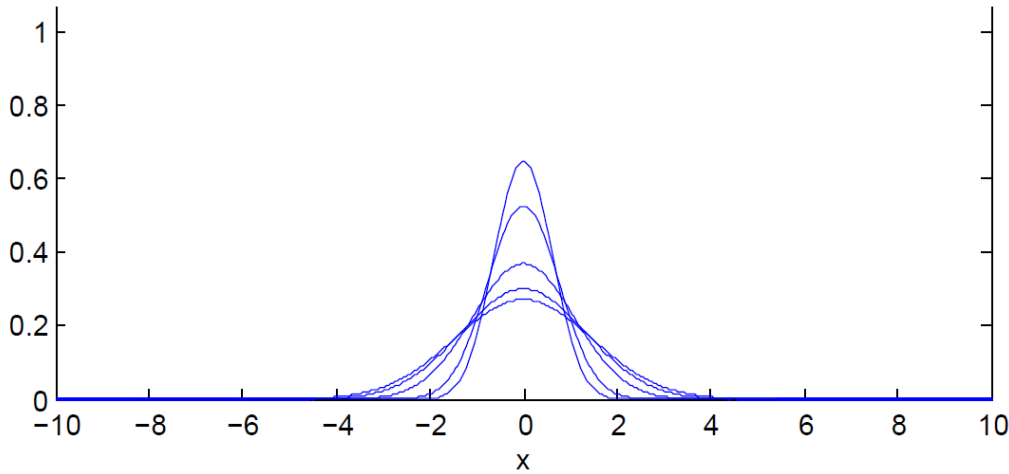
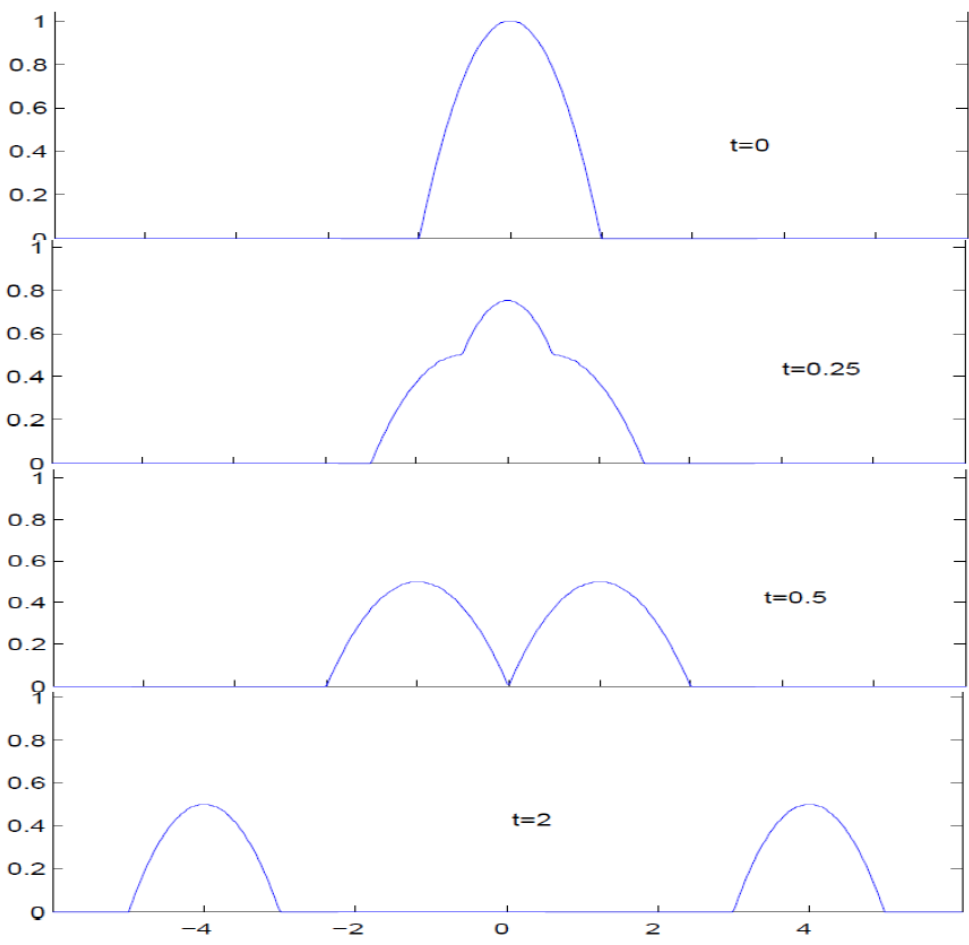
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, l), \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Resolución: *separación de variables* (buscar $u(x, t) = X(x)T(t)$ y llegar a un problema de valores propios en la variable espacial)

Extensiones:

- EDP no homogénea: $u_t - a^2 u_{xx} = F(x, t)$.
- c.contorno no homogéneas: dadas $l_1(t)$ y $l_2(t)$,
 $u(0, t) = l_1(t)$, $u(l, t) = l_2(t)$.
- condiciones sobre las derivadas en los extremos:
 $u_x(0, t) = 0$, o $u_x(0, t) = l_2(t)$, o
 $u_x(0, t) + \beta u(0, t) = l_2(t)$, β una constante dada.

Distintos aspectos de la propagación de ondas y difusión del calor



Problemas mixtos

Resolver utilizando la separación de variables

- **EDP Cuarto orden:** Modelo de vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{tt} + u_{xxxx} & = & 0, \quad x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) & = & \sin 2x, \quad x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) & = & 3 \sin 2x, \quad x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) & = & 0, \quad t \geq 0, \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) & = & 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

Solución: $u(x, t) = \sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4} \sin(4t))$

- **EDP segundo orden con 3 variables independientes:**
Modelos de vibraciones de membranas

- Encontrar el primer modo propio de vibración asociado a las vibraciones de una membrana circular de radio R sujeta en el borde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x^2 + y^2 < R$$

- Hacer lo mismo para una membrana rectangular. Encontrar todos los modos propios de vibración
- Sea $D = (0, 1) \times (0, 1)$, resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in D$$

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \partial D$$