MASTER U. en Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos
Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
CURSO 2013-14 - Bloque I: EDP

Hoja 1 - Preliminares: valores propios y desarrollos en serie de Fourier. Aplicaciones en problemas de ingeniería

1. Se considera el modelo de deformaciones de una viga de longitud l, sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = l$, y sometidas a fuerzas externas que generan un momento:

$$EIy'' + Ty = p(x), \quad x \in (0, l)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

Tomando $l = \pi$ y $p(x) = e^x$ ($p(x) = \sin(2x)$, respectivamente) calcular la deformación $y(x)$ supuesto que la relación entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T es tal que $T/EI = 1$. Hacer lo mismo para $T/EI = -1$. Razonar a qué se deben los resultados.

1.a.-Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = \pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

1.b.- Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = -\pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

Complemento prácticas: utilizar MATLAB para resolver con *dsolve*.

2. Encontrar las relaciones entre T y EI en el ejercicio 1, de manera que la viga se deforme para $p(x) = 0$. Tomar $l = 1$ y $l = \pi$.

3. Encontrar los valores propios y las funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville

$a).\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0,1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad b).\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-1,1) \\ y(-1) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$

$c).\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0,\pi) \\ y'(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$ $\qquad d).\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0,\pi) \\ y(0) = 0, & y'(\pi) = 0 \end{cases}$

$e).\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0,2) \\ y'(0) = 0, & y'(2) = 0 \end{cases}$ $\qquad f).\begin{cases} (x+1)^2 y'' + 2(x+1)y' + \lambda y = 0, & x \in (0,1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$

Desarrollar las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = x$ en serie de Fourier de las funciones propias de los problemas (a)–(e).

Complemento prácticas: Crear una función MATLAB que lea n y nos de los n primeros términos del desarrollo en serie de Fourier, relativa a las funciones propias de (a), de una función f continua a trozos en [0,1]. Hacer la gráfica de la función f y de las sumas parciales de la serie comparando la aproximación. Tomar para esto $f(x) = x(x-1)$, $f(x) = x$ y f definida como:

$$f(x) = x \text{ si } x \in [0, 1/2], \quad f(x) = 0 \text{ si } x \in (1/2, 1].$$

4. Encontrar los valores propios y las funciones propias asociadas del problema con condiciones de contorno periódicas:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

4.1.- Desarrollar en serie de Fourier de las funciones propias del problema dado, las siguientes funciones:

$$(a) \qquad f(x) = x, \text{ si } x \in [-\pi, 0], \quad f(x) = 0, \text{ si } x \in [0, \pi]$$

$$(b) \qquad f(x) = -1, \text{ si } x \in [-\pi, 0], \quad f(x) = 1, \text{ si } x \in (0, \pi]$$

$$(c) \qquad f(x) = x^2 - \pi^2, \text{ si } x \in [-\pi, \pi]$$

4.2.- Expresar la función $f(x) = x + \pi$ definida en $[-\pi, \pi]$ en serie de Fourier de las funciones propias de dicho problema.

4.3.- Expresar la función $g(t) = (t-2)\pi$ definida en $[2, 4]$ en serie de las funciones propias obtenidas (para ello, hacer un cambio de variable $x = \alpha t + \beta$, para constantes α y β a determinar, que transforme el intervalo $[2, 4]$ en $[-\pi, \pi]$).

5. Encontrar los valores propios y funciones propias de los problemas

(a)

$$y'' + y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \ln(2))$$

$$y(0) = 0, \quad y(\ln(2)) = 0$$

(b)

$$x^2 y'' + xy' + y + \lambda y = 0, \quad x \in (1, 2)$$

$$y(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$ en términos de las funciones propias de (b) en el intervalo $[1, 2]$. (nota: se puede utilizar (a) para obtener dicho desarrollo).

6. Encontrar los valores propios y las funciones propias del problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dy}{dr}) + \lambda r y \;=\; 0\,, \quad r \in (0, R), \\ y(R) = 0 \quad , \quad y,\ \dfrac{dy}{dr} \text{ acotadas cuando } r \to 0\,. \end{cases}$$

7. Escribir en forma autoadjunta las siguientes ecuaciones:
Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
Ecuación de Bessel: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$
Ecuación de Hermite: $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$
n (ν) denota un número natural (real). ¿Qué ecuación aparece en el ejercicio 6?.

Nota: estas ecuaciones aparecen de manera natural al utilizar la separación de variables para resolver distintos modelos de ingeniería gobernados por EDP

MASTER U. en Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos
Métodos Matemáticos y Numéricos en Ingeniería
CURSO 2013-14 - Bloque I: EDP

Hoja 2 - Ecuaciones en derivadas parciales: problemas de valores iniciales / contorno / mixtos (procesos estacionarios /ondas / calor / vibraciones)

1. Resolver los problemas de Cauchy para una EDP de primer orden, relacionados con modelos de propagación de ondas, para los valores de $c = \pm 2$

$$\begin{cases} u_t - cu_x = 0\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = (x^2+1)^{-1}\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - cu_x = e^x\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = (x^2+1)^{-1}\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

2. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x)\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = 0\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

a). Tomar $f(x) = sin(x)$ en ambos ejercicios.

b). Tomar el dato inicial $f(x)$ definida como: $f(x) = x + 1$ para $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 1 - x$ para $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \notin [-1, 1]$

3. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad , & u_t(x,0) = g(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

a). Tomar $c = 3$, y los datos inciales

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \quad , & \text{si} \quad x \in [-1, 1], \\ 0 \quad , & \text{si} \quad x \notin [-1, 1]\,. \end{cases} \quad , \qquad g(x) = 0$$

Encontrar el instante de tiempo t_0^* en el que el punto $x = 100$ de la cuerda empieza a vibrar y el instante t_f^* en el que deja de vibrar.

b). Tomar $c = 5$, $f = sin(x)$, $g = 0$,

c). Tomar $c = 2$, $f = sin(x)$, $g = cos(x)$

4. Se considera un modelo de vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt}+u_{xxxx} &=& 0\,, \quad x\in(0,\pi), t>0\,,\\ u(x,0) &=& \sin 2x\,, \quad x\in[0,\pi]\,,\\ u_t(x,0) &=& 3\sin 2x\,, \quad x\in[0,\pi]\\ u(0,t)=u(\pi,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0\,,\\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(\pi,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0\,. \end{array}\right.$$

Utilizar el método de separación de variables para demostrar que la solución es: $u(x,t)=sin(2x)(\cos(4t)+\frac{3}{4}\sin(4t))$

5. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$a).\ \left\{\begin{array}{rcl} u_{tt}-9u_{xx} &=& 0\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(x,0) &=& f(x), \quad x\in[0,1]\,,\\ u_t(x,0) &=& 0, \quad x\in[0,1]\,,\\ u(0,t)=u(1,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0\,, \end{array}\right.$$

con los distintos datos inciales:

$$f(x)=\sin(2\pi x)/2$$

$$f(x)=\frac{\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x)}{2}$$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rl} (x-(\frac{1}{2}))^2-\frac{1}{4^2}, & \text{si } x\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]\\ 0, & \text{si } x\in[0,1],\ x\notin[\frac{1}{4},\frac{3}{4}] \end{array}\right.$$

Complemento prácticas (relacionado con los ejercicios 1–5): crear funciones MATLAB que permitan simular propagación de ondas / difusión del calor/ vibraciones de cuerdas / vibraciones de vigas .

6. Intentar aplicar el método de separación de variables para resolver las ecuaciones

$$u_{\xi\eta}=0, \quad (5/4)u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=0.$$

Reducirlas a una del tipo calor, ondas o Laplace mediante un cambio de variables.

7. Resolver los problemas mixtos para la ecuación del calor

$$a).\ \left\{\begin{array}{rcl} u_t-u_{xx} &=& 0\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(x,0) &=& x^2(x-1), \quad x\in[0,1]\,,\\ u(0,t)=u(1,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0\,. \end{array}\right.$$

$$b).\ \left\{\begin{array}{rcl} u_t-4u_{xx} &=& 0\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(x,0) &=& x^2(x-1), \quad x\in[0,1]\\ u_x(0,t)=u(1,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0\,. \end{array}\right.$$

8. Resolver los problemas mixtos para la ecuación de ondas

$$a).\ \begin{cases} u_{tt}-u_{xx} &= 0\,, \quad x\in(0,\pi),\, t>0\\ u(x,0) &= \sin(x), \quad x\in[0,\pi]\,,\\ u_t(x,0) &= x^2-\pi x, \quad x\in[0,\pi]\,,\\ u(0,t)=u(\pi,t) &= 0\,, \quad t\geq 0\,. \end{cases}$$

$$b).\ \begin{cases} u_{tt}-9u_{xx} &= 0\,, \quad x\in(0,2),\, t>0\\ u(x,0) &= x(x-2), \quad x\in(0,2)\,,\\ u_t(x,0) &= 1, \quad x\in(0,2)\,,\\ u_x(0,t)=u_x(2,t) &= 0\,, \quad t>0\,. \end{cases}$$

9. Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u &= 0\,, \quad x\in(0,1), t>0\,,\\ u(x,0) &= \sin(x\pi/2), \quad x\in[0,1]\,,\\ u_t(x,0) &= 0, \quad x\in[0,1]\,,\\ u(0,t)=u_x(1,t) &= 0\,, \quad t\geq 0\,. \end{cases}$$

10. Resolver el problema mixto con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\begin{cases} u_t-4u_{xx}-u &= 0\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(x,0) &= x^2, \quad x\in(0,1)\,,\\ u(0,t) &= 0\,, \quad t>0\,.\\ u(1,t) &= e^t\,, \quad t>0\,. \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $u_p(x,t)=xe^t$ es una solución particular de

$$\begin{cases} u_t-4u_{xx}-u &= 0\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(0,t) &= 0\,, \quad t>0\,.\\ u(1,t) &= e^t\,, \quad t>0\,. \end{cases}$$

Encontrar u_p aplicando el método de separación de variables

11. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx} &= x\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(x,0) &= 0, \quad x\in(0,1)\,,\\ u_t(x,0) &= 0, \quad x\in(0,1)\,,\\ u(0,t)=u(1,t) &= 0\,, \quad t>0\,. \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $u_p(x,t)=x(1-x^2)/6$ es una solución particular de

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx} &= x\,, \quad x\in(0,1),\, t>0\\ u(0,t)=u(1,t) &= 0\,, \quad t>0\,. \end{cases}$$

Encontrar u_p aplicando el método de separación de variables

12. Resolver los siguientes problemas de contorno:

a) Problema de Dirichlet en el cuadrado $(0,1)\times(0,1)$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0\,, \quad x,\in(0,1)\,, y\in(0,1)\,,\\ u(0,y)=y(y-1) \quad , \quad u(1,y)=0\,, \quad y\in[0,1]\,,\\ u(x,0)=0 \quad , \quad u(x,1)=0\,, \quad x\in[0,1]\,,\end{cases}$$

b). Problema de Neumann en el cuadrado $(0,\pi)\times(0,\pi)$.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0\,, \quad x,y\in(0,\pi)\,,\\ u_x(0,y)=0 \quad , \quad u_x(\pi,y)=0 \quad , y\in[0,\pi]\,,\\ u_y(x,0)=\cos x \quad , \quad u_y(x,\pi)=0\,, x\in[0,\pi]\,,\end{cases}$$

c). Problema de contorno de tipo mixto en el rectángulo $(0,\pi)\times(0,1)$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0\,, \quad x\in(0,\pi)\,, y\in(0,1)\,,\\ u_x(0,y)=0 \quad , \quad u(\pi,y)=0\,, \quad y\in[0,1]\,,\\ u_y(x,0)=\cos x \quad , \quad u_y(x,1)=0\,, \quad x\in[0,\pi]\,,\end{cases}$$

13. Resolver el problema de Dirichlet para una ecuación asociada a la de Laplace, en coordenadas polares (r,θ): $x=r\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{1}{r^2}u = 0\,, \quad r\in(1,2),\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2})\,,\\ u(r,0)=0 \quad , \quad u(r,\frac{\pi}{2})=1\,, \quad r\in(1,2)\,,\\ u(1,\theta) = u(2,\theta)=0\,, \quad \theta\in(0,\frac{\pi}{2})\,.\end{cases}$$

Dibujar la región del plano xy en que está planteado el problema.

14. Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$(a)\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0\,, \quad r\in(0,1), \theta\in(0,\pi/2)\,,\\ u(r,0)=u(r,\pi/2) = 0\,, \quad r\in[0,1]\,,\\ u(1,\theta) = g(\theta)\,, \quad \theta\in[0,\pi/2]\,.\end{cases}$$

r y θ son las coordenadas polares. Dibujar la región del plano xy en que está planteado el problema. Tomar por ejemplo, $g=\sin(2\theta)$ y $g=\theta(\theta-\pi/2)$

15. Utilizando el método de separación de variables, calcular las frecuencias propias y los modos propios de vibración del problema que modela las vibraciones de una membrana circular, sujeta en el borde:

$$-\Delta u=\lambda u, \quad \text{en } D$$
$$u=0, \quad \text{sobre } \partial D$$

Hacer una gráfica de los distintos modos propios (D es un círculo de radio R)

16. Encontrar el primer modo propio de vibración asociado a las vibraciones de una membrana circular de radio R sujeta en el borde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0, \quad t>0, \quad x^2+y^2<R$$

Complemento prácticas: crear una función matlab que simule un onda estacionaria asociada al primer modo propio de vibración.

17. Repetir los ejercicios 15 y 16 para una membrana rectángular.