

## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (EDP) con 2 / 3 / $m$ variables independientes \*

► **EDP de primer orden** con dos variables independ.

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

$x, y$  variables independientes;

$u = u(x, y)$  función incógnita.

**Resolver la ecuación:** encontrar una función  $u$  definida en algún dominio  $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ , tal que sea continua y admita derivadas parciales primeras en  $\mathbf{D}$ , y que verifique:

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{D}.$$

**Notaciones:**

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$F(x, t, u, u_x, u_t) = 0, \quad t \equiv y, \quad t - \text{variable temporal}$$

**Ejemplos:**

▷ **Ecuación de ondas:**  $u_t - cu_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$

Solución:  $u(x, t) = f(x + ct)$  *onda*

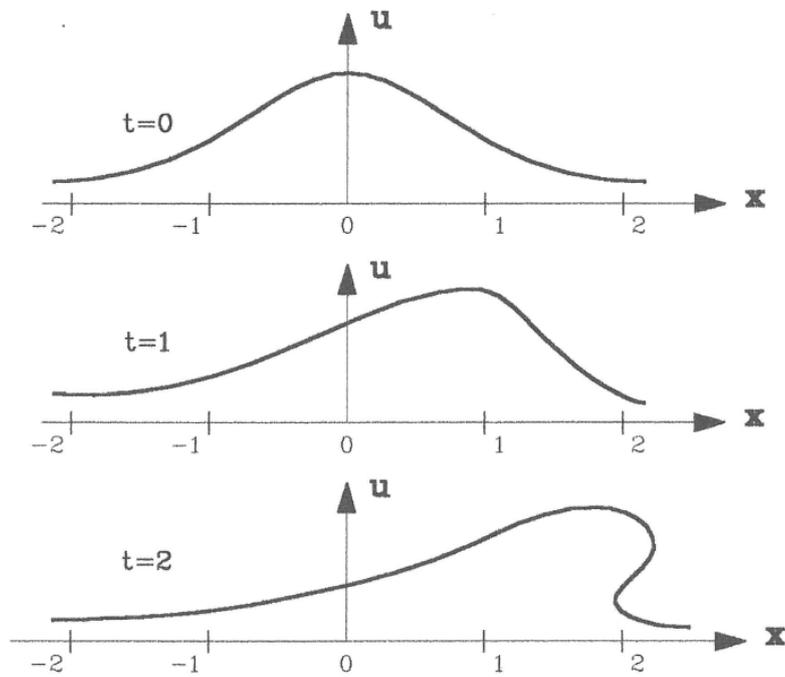
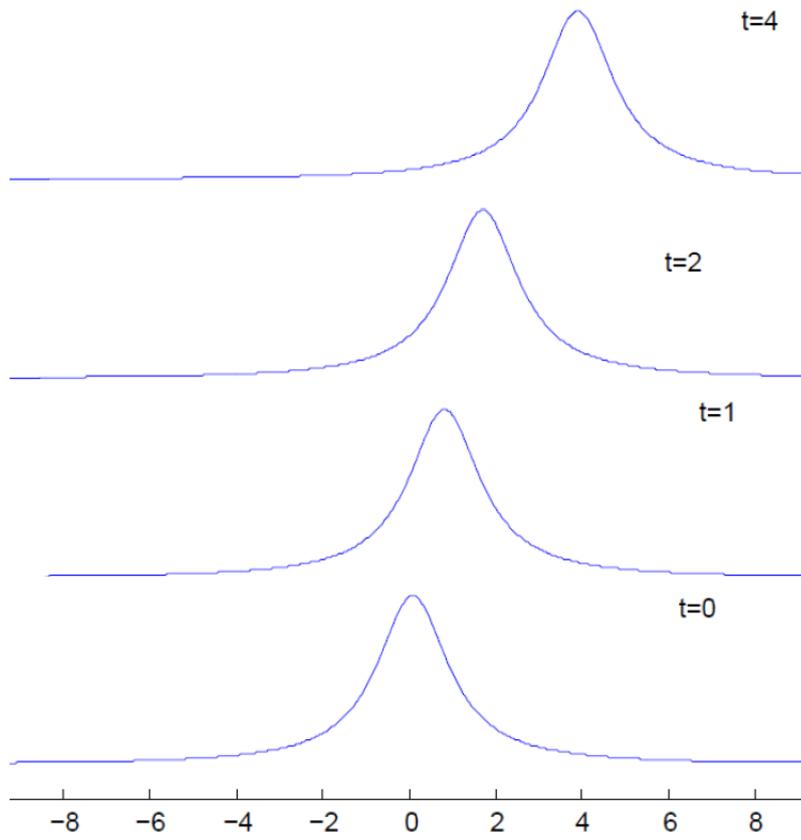
que viaja hacia la derecha (izquierda) si  $c < 0$  ( $c > 0$ )

▷ **Ecuación de Burgers:**  $u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$

Solución:  $u = f(\xi), \quad x = f(\xi)\tau + \xi, \quad t = \tau$

\* **Resúmenes / Capítulo 6 / Ecuaciones Diferenciales!?.  
Una introducción. UC, M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez**

# Distintos aspectos de la propagación de ondas: EDP de primer orden



2013-14

EDP/A

► **EDP de segundo orden** con dos variables independ.

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Se pide a la solución  $u$  que admita derivadas parciales segundas en  $D$ , y "que verifique la ecuación".

► **EDP parciales, de orden  $k$** , con  $m$  variables indep.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_k^{r_k}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) = 0.$$

► **EDP Lineal, de segundo orden, con 2 variables indep.**

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = p(x, y), \quad (\text{LNH})$$

los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$  pueden ser funciones dependientes de  $(x, y)$  o constantes: *ecuación lineal con coeficientes constantes*.

Si  $p(x, y) = 0$ : *ecuación lineal homogénea*:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0, \quad (\text{LH})$$

**Propiedades de las soluciones de (LH)-(LNH)**

- Si  $u_1(x, y), u_2(x, y)$  soluciones de (LH)  $\Rightarrow$  cualquier combinación lineal de ellas,  $c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y)$ , es solución de (LH)
- Si  $u(x, y)$  y  $u_p(x, y)$  soluciones de (LNH)  $\Rightarrow$   $u(x, y) - u_p(x, y)$  es solución de (LH)

$A=B=C=0 \Rightarrow$  (LH)-(LNH) EDP lineales de 1<sup>er</sup> orden

## Clasificación de las EDP lineales de 2<sup>o</sup> orden.

### ► EDP semilineal con dos variables independientes

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \tilde{F}(x, y, u, u_x, u_y)$$

Para ecuaciones lineales:  $\tilde{F} \equiv Du_x + Eu_y + Fu + p(x, y)$

Posibilidad de reducción a una *forma canónica*, según que el *discriminante*  $AC - B^2$  sea positivo, nulo o negativo, mediante un cambio de variables

$\zeta = \alpha x + \beta y$ ,  $\eta = \delta x + \gamma y$  / Jacobiano:  $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$ ,  
para ciertas constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

1. Si  $AC - B^2 > 0$ , ecuación de **tipo elíptico**  $\mapsto$   
 $u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$
2. Si  $AC - B^2 = 0$ , ecuación de **tipo parabólico**  $\mapsto$   
 $u_{\eta} - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$
3. Si  $AC - B^2 < 0$ , ecuación de **tipo hiperbólico**  $\mapsto$   
 $u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$

**Definición:** rectas o curvas características (si  $A \neq 0$ )

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

### Observaciones:

- Necesidad de añadir condiciones adicionales a las ecuaciones para la descripción de fenómenos físicos.
- Importancia de las rectas características para añadir condiciones adicionales.
- Extensión a más variables independientes:  
con restricciones!

- ▶ Ecuaciones elípticas  $\longleftrightarrow$  **procesos estacionarios**
- ▶ Ecuaciones parabólicas o hiperbólicas  $\longleftrightarrow$  **procesos de propagación o de difusión**

▶ **Ejemplos de ecuaciones en forma Canónica:**

- **La ecuación de Laplace (elíptica):**

$$u_{xx} + u_{yy} = p(x, y)$$

No tiene rectas características reales

- **La ecuación del calor (parabólica):**

$$u_t - a^2 u_{xx} = p(x, t), \quad t \equiv y, \quad a \text{ constante}$$

Rectas características:  $t = cte$

- **La ecuación de ondas (hiperbólica):**

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = p(x, t), \quad t \equiv y, \quad a \text{ constante}$$

Rectas características  $x + at = cte; x - at = cte$

▶ **Interesan problemas bien planteados:** existe solución, es única y a pequeñas variaciones de los datos le corresponden pequeñas variaciones de la solución

▶ **Tipos de problemas:**

- **Problemas de Cauchy o de valor inicial**  $\longleftrightarrow$  datos conocidos sobre una curva no característica (*condiciones iniciales*)
- **Problemas de contorno**  $\longleftrightarrow$  ecuación planteada en un dominio conocido  $\mathbf{D}$  y datos conocidos sobre la frontera de  $\partial\mathbf{D}$  (*condiciones de contorno*).
- **Problemas mixtos:** *condiciones iniciales y condiciones de contorno*

## Galería de EDP:

- ecuaciones de 2º orden, 2 variables independientes
  - Laplace:  $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$
  - difusión del calor:  $u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x)$
  - propagación de ondas:  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t, x)$
  - de ondas amortiguadas:  $u_{tt} + cu_t = a^2 u_{xx}$
  - ecuación del telegrafista:  $u_{tt} + cu_t + bu = a^2 u_{xx}$

- ecuaciones de 2º orden, 3 / más variables indep.

- Laplace:  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$
- calor:  $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(t, x, y)$
- ondas:  $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(t, x, y)$

$$\Delta u = f \quad / \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad / \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

- ecuaciones de 4º orden, 2 variables independientes

- vibraciones de vigas:  $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = f(t, x)$
- deformaciones de placas:  $\Delta^2 u = f(x, y)$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

- sistema de la elasticidad lineal:  $i = 1, 2, 3$

$$-\mu \Delta u_i - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div}(\bar{u})) = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

**3 variables independientes, 3 funciones incógnitas:**  
 $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  desplazamientos del punto  $x$  en las direcciones de los ejes  $x_i$

$\lambda, \mu$  coef. de Lamé,  $f_i$  componentes de una fuerza

$$\operatorname{div}(\bar{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

## Problemas planteados con EDP Lineales

### Problemas de Contorno: EDP de tipo elíptico

Dado el dominio  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  y las funciones  $p(x, y)$  en  $D$  y  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  conocidas en la frontera  $D$ :  $\Gamma \equiv \partial D$ ,

se plantea encontrar la solución de la ecuación (con coeficientes no necesariamente constantes)

$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = p(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$   
verificando una **condición de contorno** sobre la frontera:

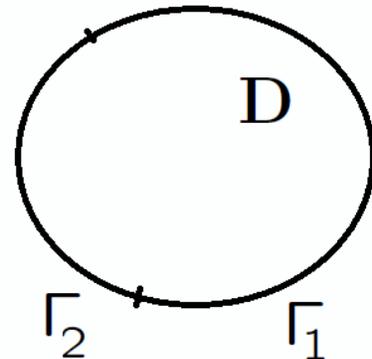
c. Dirichlet  $u(x, y) = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma$

c. Neumann  $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma$

para  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , c. de contorno mixtas

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_2$$



**SOLUCIÓN:** Buscar  $u(x, y)$  que admita derivadas parciales segundas “verificando” la ecuación EDP en  $D$  y las condiciones de contorno sobre  $\Gamma$ .

### SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Buscar  $u(x, y) = X(x).Y(y)$  y llegar a una ecuación diferencial ordinaria en la variable independiente  $x$  y otra en la variable independiente  $y$

En general, nos lleva al cálculo de valores propios y funciones propias para problemas de contorno en EDO, y a los desarrollos en serie de Fourier de funciones

## Problemas de contorno planteados para la Ecuación de Laplace:

Sea  $D$  un dominio del plano y  $\partial D$  su frontera

e.g.:  $D = \{(x, y)/x^2 + y^2 < 1\}$ ;  $\partial D = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$

Dadas las funciones  $F(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$

- **Problema de Dirichlet:**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

$u$  conocida sobre la frontera

- **Problema de Neumann**

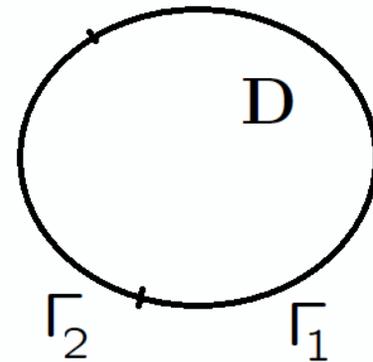
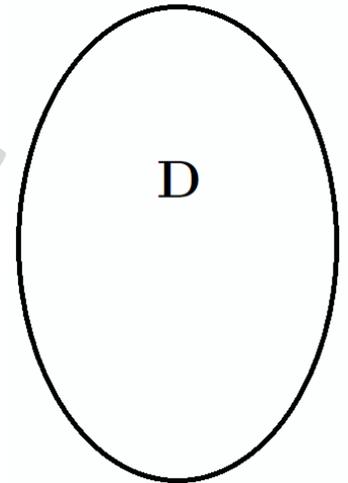
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$  conocida sobre la frontera

- **Problema de Contorno Mixto:**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera  $\Gamma_1$  y condición de Neumann sobre la otra parte  $\Gamma_2$ :  
 $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$



### Resolución:

- **Separación de variables** si  $D$  rectángulo, círculo,....
- **Métodos numéricos** para dominios más generales

### Definición: problemas de valores propios regulares

Encontrar los valores  $\lambda$  (*valores propios*) tales que existe una solución no nula  $y(x)$  (*función propia*) de:

$$(\text{PVP}) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$p(x), p'(x), q(x), s(x)$  funciones continuas en  $[a, b]$ ,  
 $s(x), p(x) > 0, \forall x \in [a, b], -\infty < a < b < \infty$ ,  
y  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ .

### Teorema

1. Existe una infinidad numerable de valores propios que convergen a infinito:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty.$$

2. Para cada valor propio,  $\lambda_k$ , hay una única función propia asociada,  $\phi_k(x)$ , linealmente independiente.

3. Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo  $(a, b)$ , para el peso  $s$ ; es decir:

$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)s(x) dx = \delta_{kj} \text{Cte.}, \forall k, j = 1, 2, 3, \dots$$

4. Para cada función  $f(x)$  continua a trozos en  $[a, b]$  admite un desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

donde las constantes  $c_n$  son los llamados coeficientes de Fourier y están dados por la fórmula:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x) dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx}.$$

La convergencia de la serie en hacia la función  $f$  tiene lugar en el sentido de la media cuadrática; es decir:

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

**Extensiones:** sobre convergencia serie / sobre c.c. periódicas

### Observación:

- Si las condiciones de contorno son periódicas ( $y(a) = y(b)$ ,  $y'(a) = y'(b)$ ), se tienen los resultados del teorema: ahora para cada valor propio  $\lambda_k > \lambda_1$  puede haber dos funciones propias linealmente independientes asociadas.
- El sumatorio del desarrollo en serie se extiende a todas las funciones propias.

**Desarrollo clásico de Fourier en  $[-\pi, \pi]$**  en término de las funciones  $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ :

Dada  $f(x)$  continua a trozos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ ,

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx),$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$  son funciones propias del PVP:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-\pi, \pi), \\ y(-\pi) = y(\pi), & y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

$\phi_{0,0}(x) = 1$  asociada al valor propio  $\lambda_0 = 0$

$\phi_{k,1}(x) = \cos(kx)$ ,  $\phi_{k,2}(x) = \sin(kx)$  f.p. linealmente independientes asociadas al valor propio  $\lambda_k = (k\pi)^2$ .

**Ortogonales!:** para  $k, j = 0, 1, 2 \dots$ ,  $m, n = 0, 1, 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{k,m}(x) \phi_{j,n}(x) dx = 0, \quad \text{si } (k, m) \neq (j, n)$$

## Problemas planteados para la ecuación de Ondas

### -Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty) \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Solución: *fórmula de d' Alembert*

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds$$

Demostración:  $\zeta = x + at, \eta = x - at \longleftrightarrow u_{\zeta\eta} = 0$ .

### -Problema Mixto:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, l) \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in (0, l) \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Resolución: *separación de variables* (buscar  $u(x, t) = X(x)T(t)$  y llegar a un problema de valores propios en la variable espacial)

### Extensiones:

- EDP no homogénea:  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t)$ .
- c.contorno no homogéneas: dadas  $l_1(t)$  y  $l_2(t)$ ,  
 $u(0, t) = l_1(t), \quad u(l, t) = l_2(t)$ .
- condiciones sobre las derivadas en los extremos:  
 $u_x(l, t) = 0, \quad \circ \quad u_x(l, t) = l_2(t), \quad \circ$   
 $u_x(l, t) + \beta u(l, t) = l_2(t), \quad \beta$  una constante dada.

## Problemas planteados para la Ecuación del Calor

### -Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Solución: *fórmula de Poisson*

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4ta^2}} d\zeta.$$

Demostración: Transformación de Fourier

### -Problema Mixto:

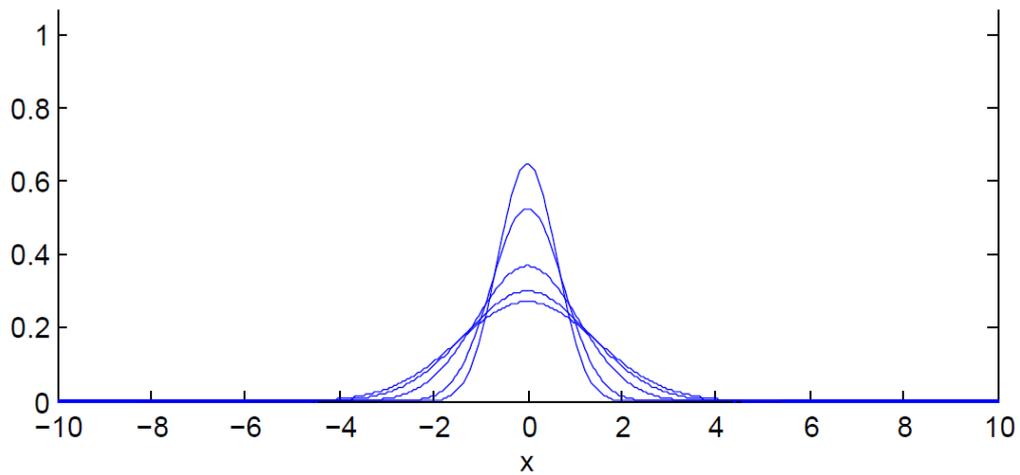
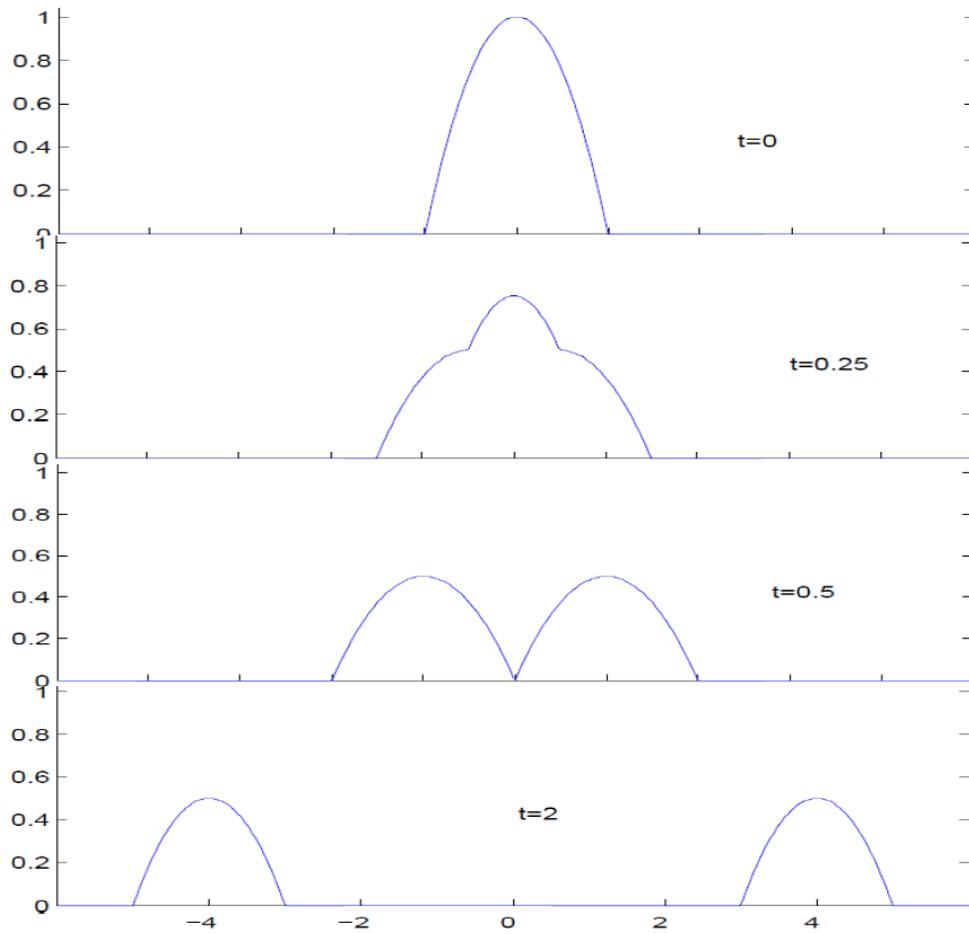
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, l), \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(l, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Resolución: *separación de variables* (buscar  $u(x, t) = X(x)T(t)$  y llegar a un problema de valores propios en la variable espacial)

Extensiones:

- EDP no homogénea:  $u_t - a^2 u_{xx} = F(x, t)$ .
- c.contorno no homogéneas: dadas  $l_1(t)$  y  $l_2(t)$ ,  
 $u(0, t) = l_1(t)$ ,  $u(l, t) = l_2(t)$ .
- condiciones sobre las derivadas en los extremos:  
 $u_x(0, t) = 0$ ,    o     $u_x(0, t) = l_2(t)$ ,    o  
 $u_x(0, t) + \beta u(0, t) = l_2(t)$ ,     $\beta$  una constante dada.

## Distintos aspectos de la propagación de ondas y difusión del calor



# Problemas mixtos

Resolver utilizando la separación de variables

- **EDP Cuarto orden:** Modelo de vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x, \quad x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 3 \sin 2x, \quad x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

Solución:  $u(x, t) = \sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4} \sin(4t))$

- **EDP segundo orden con 3 variables independientes:**  
Modelos de vibraciones de membranas

- Encontrar el primer modo propio de vibración asociado a las vibraciones de una membrana circular de radio  $R$  sujeta en el borde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x^2 + y^2 < R$$

- Hacer lo mismo para una membrana rectangular. Encontrar todos los modos propios de vibración
- Sea  $D = (0, 1) \times (0, 1)$ , resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in D$$

$$u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x, y) \in \partial D$$