

NOMBRE..... DNI.....

2º Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2024/25
Ampliación de Matemáticas (EDO)
Examen Extraordinario: primer parcial:
29- Enero - 2025

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes, ni dispositivos electrónicos (antes de comenzar el examen deben situarse fuera del alcance). Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1.

Resolver el problema de Cauchy

$$y' = \frac{x^4 + y^4}{xy^3}$$
$$y(1) = 1$$

Indicar el intervalo de definición de la solución explícita. Hacer un dibujo aproximado en el campo de direcciones dado. Escribir las ecuaciones de las isoclinas para pendientes 0 e $+\infty$, hacer una gráfica aproximada en el campo de direcciones y estudiar los posibles cambios de crecimiento de las soluciones.

SOLUCION GENERAL de la ED

SOLUCION Problema de Cauchy

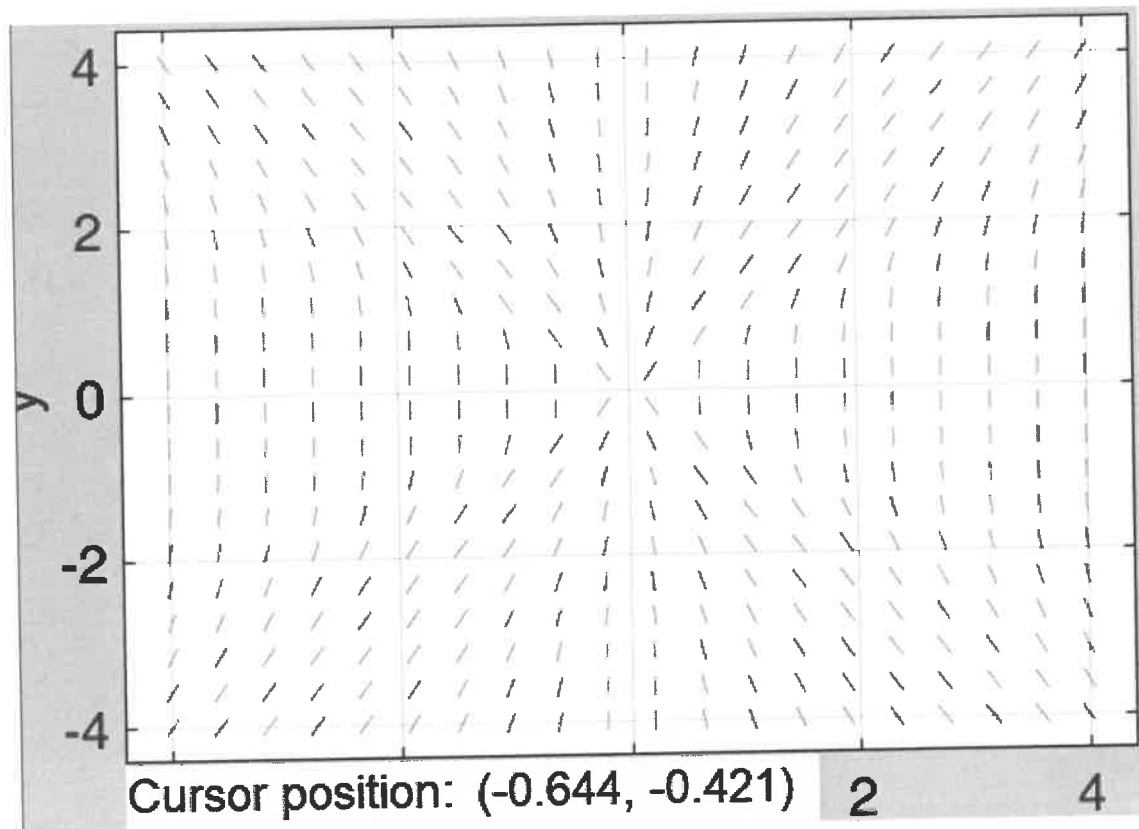
SOLUCIÓN explícita $/y(1) = 1$ Intervalo.....

Ecuaciones isoclinas

Crecimientos

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

Campo de direcciones para (x,y) en $[-4,4] \times [-4,4]$



Isóclinas, crecimientos, solución/ $y(1)=1$

EJERCICIO 2

Resolver el problema de Cauchy

$$y' = -\frac{y^2 - xy}{xy - 1}, \quad y(2) = 1$$

(Indicación: buscar un factor integrante dependiente de y).

Verificar que se obtiene la solución de la ED. Escribir la aproximación de la solución del problema dado mediante los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor.

FACTOR INTEGRANTE.....SOLUCIÓN GENERAL.....

SOLUCION PC.....

APROXIMACIÓN.....

VERIFICACIÓN DE SOLUCIÓN

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

a).

Resolver

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x}$$

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN GENERAL

2

b). Encontrar la solución particular de

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2 e^x$$

SOLUCIÓN

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4 Resolver las ecuaciones diferenciales

$$(a) \quad y'' - 5y' + 4y = e^x$$

$$(b) \quad y'' - 5y' + 4y = \sin(x)$$

y el Problema de Cauchy asociado a a)

$$y'' - 5y' + 4y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

SOLUCIÓN GENERAL ED homogénea.....

SOLUCIÓN particular de $y'' - 5y' + 4y = e^x$

SOLUCIÓN general de $y'' - 5y' + 4y = e^x$

SOLUCIÓN del Problema de Cauchy

SOLUCIÓN particular de $y'' - 5y' + 4y = \sin(x)$

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5

Se considera la ecuación

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

o equivalentemente, para $x \neq 0$,

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

ELEGIR un ejercicio entre a) y b)

a). Resolver sabiendo que una solución de la ecuación homogénea es $y_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Escribir el desarrollo en serie de Taylor de $y_1(x)$ (completo o los 8 primeros términos)

$y_2(x) = \dots\dots\dots$

SOLUCIÓN GENERAL
de la ED

Desarrollo de $y_1(x) = \dots\dots\dots$

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

b). Para $xy'' + 2y' + xy = 0$, encontrar los 8 primeros términos del desarrollo en serie de la solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + \cdots$$

Encontrar el término general en función de los anteriores. Relacionar este desarrollo con la solución general $y_g(x)$ o con $y_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Razonar la respuesta

APROXIMACIÓN de la solución
relación con y_g o y_1
razonamiento breve

Término general

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $k(x) = \int q(x) \exp\left(\int p(x) dx\right) dx$

- E.D.O. de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx, \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1} \cdot \bar{b}(x) dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp\left(-\int p(x) dx\right)}{(y_1(x))^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$,
se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k ,

$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i .

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones “escalón” (“Heaviside”) y “Delta de Dirac”

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \phi_k(x) s(x) dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x) dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$