NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2023/24
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen final: segundo parcial: 21- Diciembre - 2023

Observación: No utilizar calculadora, ni apuntes, ni dispositivos electrónicos (antes de comenzar el examen deben de situarse fuera del alcance). Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
a). Resolver el problema de valores iniciales para un sistema (usar el método de variación de parámetros):

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 + e^x \end{cases}$$

$$y_1(0) = 3/2, \;\; y_2(0) = -7/4.$$

b). Buscar una solución particular $\overline{y}_p = e^x\overline{c}$ para algún vector constante $\overline{c}$: si se puede, escribir el sistema algebraico al que se llega.

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA dado

SISTEMA algebraico. Razonamiento breve

EJERCICIO 2

EJERCICIO 2.1 Encontrar los valores propios y funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \pi/2)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)$ en términos de las funciones propias encontradas en el intervalo $(0, \pi/2)$:

$$f(x) = \cos(2x) \quad \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{4}], \qquad f(x) = 0 \quad \text{si } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}],$$

Escribir explícitamente el primer coeficiente de Fourier no nulo, y la aproximación mediante los tres primeros términos del desarrollo.

VALORES PROPIOS y
FUNCIONES PROPIAS

DESARROLLO DE $f(x)$

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

Los otros coeficientes:

APROXIMACIÓN

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.2

Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - 4u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (0, \pi/2), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in (0, \pi/2)\,, \\ u_x(0,t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \\ u(\pi/2, t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \end{array}\right.$$

con $f(x)$ en el ejercicio 2.1.

Problema de VALORES PROPIOS

ECUACIONES EN la variable t
y las SOLUCIONES en t:

SOLUCIÓN del problema

APROXIMACIÓN de la solución

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Se consideran los problemas de contorno

(a)

$$(x^2y')' = x, \quad x \in (1,2)$$
$$y(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

(b)

$$(x^2y')' = x, \quad x \in (1,2)$$
$$y'(1) = 0, \quad y'(2) = 0$$

Encontrar la solución única del problema que se pueda; decir si no existe. Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN ÚNICA de (a)...

SOLUCIÓN ÚNICA de (b)...

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4
Resolver por separación de variables los problemas de valores iniciales para ecuaciones de tipo ondas:
a)

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = \sin(x), \quad t > 0$$
$$u_t(x,0) = 2\sin(x), \quad t > 0$$

SOLUCIÓN

b)

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0 = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = \sin(x), \quad t > 0$$
$$u_t(x,0) = 2\sin(x), \quad t > 0$$

SOLUCIÓN

Problemas de valores iniciales que se resuelven en la variable t para a) y b):

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)\, dx)\, dx$
- E.D.O. de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\, dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\, dx)}{(y_1(x))^2}\, dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x) e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\, dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$