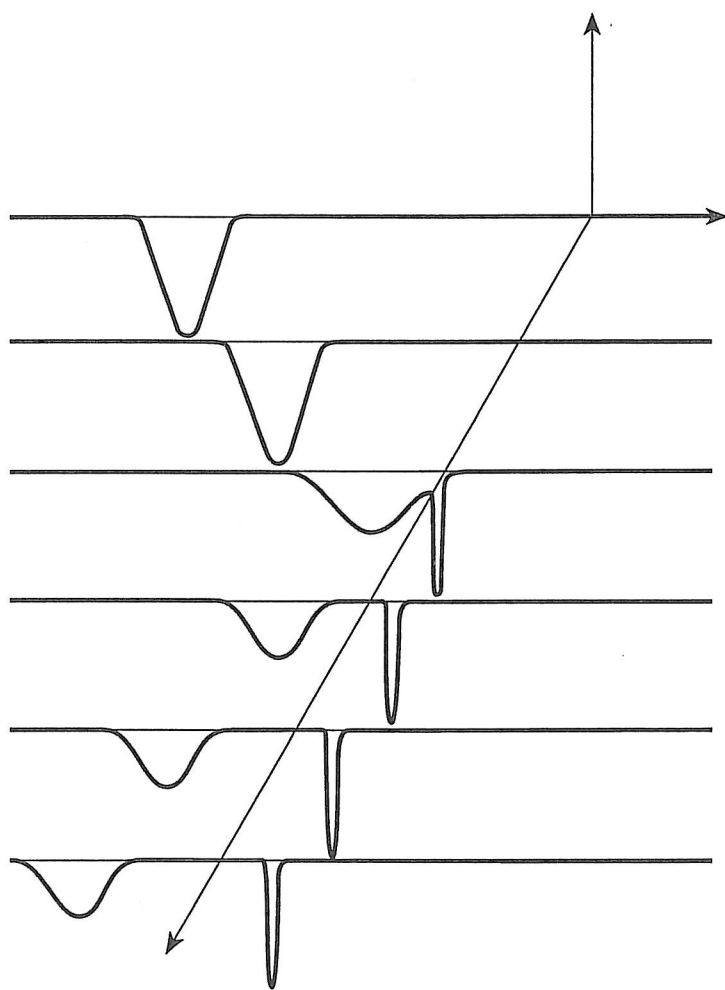


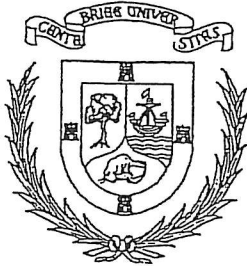
# ECUACIONES DIFERENCIALES!?.

## Una introducción.

*M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez*



Universidad de Cantabria



ECUACIONES DIFERENCIALES!?.  
Una introducción.

*M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez.*

Departamento de Matemática Aplicada  
y Ciencias de La Computación.

E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos

Universidad de Cantabria

**Título:** Ecuaciones Diferencias !?.  
Una introducción

**Autor:** María Eugenia Pérez Martínez  
**Portada:** Antonio José González

**I.S.B.N.:** 84-89627-28-2  
**Depósito Legal:** SA-655-1996

**Imprime:** Servicio de Publicaciones  
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de Cantabria  
Avda. de los Castros, s/n  
39005 Santander.España

## Prólogo

- . ¿Podría decirme qué camino debo tomar?
- . Eso depende en gran medida de adónde quieras llegar.<sup>1</sup>

La frase con que el Gato de Cheshire contesta a la pregunta de Alicia me parece una de las más adecuadas al empezar a escribir cualquier tratado de matemáticas. Dado que es difícil escribir sobre ecuaciones diferenciales para un amplio público, lo primero a tener en cuenta es a quién va dirigido lo que se escribe y qué se pretende con ello.

A la vista de la larga historia de las ecuaciones diferenciales, y de la extensa literatura escrita sobre el tema, lo que se puede aportar de nuevo en un libro de texto de nivel elemental, es la orientación personal del autor sobre la materia. Aunque las palabras son mitad del que las dice y mitad del que las escucha, personalmente me siento obligada a confesar que al escribir este documento estoy pensando, fundamentalmente, en los alumnos de segundo curso de las Escuelas de Ingeniería de Caminos e Industrial de la Universidad de Cantabria, y mi principal pretensión es la de facilitarles la tarea en la introducción y comprensión de dicha materia. Esto no quita que el libro pueda ser útil para otros alumnos. Prácticamente la totalidad del texto tiene su origen en los apuntes dictados a lo largo de uno de los cursos Cálculo III o Ecuaciones Diferenciales en dichas Escuelas.

Dicho esto, se explica en cierto modo el nivel tan elemental y esquemático con el que se abordan los temas: por un lado, los conocimientos previos de matemáticas con que dichos alumnos llegan a esta

---

<sup>1</sup> L. Carrol. *Alicia en el país de las maravillas*.

asignatura se limitan a nociones elementales de Cálculo diferencial e integral en una y varias variables, y de Álgebra lineal. Así pues, estos son los conocimientos previos que se requieren para introducirse en el estudio de las ecuaciones diferenciales abordadas en el texto. Por otro lado, la materia relativa a la asignatura debe impartirse en un cuatrimestre y esto limita considerablemente la extensión de cada tema.

Desde sus orígenes, las ecuaciones diferenciales, están ligadas a problemas de la Ciencia que intentan, de alguna manera, explicar el comportamiento de la Naturaleza. Así, por ejemplo, los problemas de cálculo de la forma de un cuerpo elástico que se deforma bajo la acción de unas fuerzas (en especial de una viga) fueron tratados empíricamente por los constructores de las grandes catedrales medievales. Sin embargo, la aproximación matemática del problema, es decir, *el modelo matemático*, no se tiene hasta varios siglos después. El concepto de ecuación diferencial es tan antiguo como el de derivada, y éste se remonta al siglo XVII; en la última década de este siglo se habla ya explícitamente de *ecuación diferencial* (cf. *Actorum Eruditorum*, 1693).

Aunque en la historia de las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales han dado lugar al desarrollo de teorías para ecuaciones diferenciales ordinarias, por razones obvias de simplicidad la exposición que se hace aquí toma un sentido contrario. Este proceso de paso de lo más sencillo a lo más complicado pretende ser tónica general en la exposición de cada tema. Además, se intenta dar una amplia variedad de métodos matemáticos y referencias, considerando la importancia de las Ecuaciones Diferenciales (y de las Matemáticas en general) en una carrera de Ingeniería, no sólo desde un punto de vista formativo sino también informativo.

Por otro lado, es en esta rama de la Ciencia, la Ingeniería, en la que quizás más se trabaja con aproximaciones, y los datos de los modelos matemáticos planteados suelen obtenerse haciendo medidas, lo cual ya involucra un error; es importante saber, en todo momento, en qué medida lo que se resuelve se aproxima a lo que realmente había que resolver. De aquí la importancia en Ingeniería del concepto de problemas de ecuaciones diferenciales bien propuestos y de los métodos de aproximación de soluciones. Teniendo en cuenta todas estas observaciones, a continuación se explica brevemente lo que se hace en este libro.

El libro está dividido en 7 capítulos, los cinco primeros dedicados a las ecuaciones diferenciales ordinarias y el sexto a las ecuaciones en derivadas parciales. Cada uno de los temas o capítulos se dividen en secciones y éstas, a su vez, pueden dividirse en subsecciones.

En todos los temas se intenta seguir la técnica de introducir conceptos y enunciados de teoremas a través de ejemplos, de manera que sea más sencilla, para el alumno, la comprensión del significado de estos resultados. En general, los teoremas no se demuestran a no ser que su demostración sea constructiva y aporte algo más que la prueba en sí de dicho resultado; en ocasiones, se da una idea intuitiva de la demostración y, desde luego, sí se dan referencias para que el alumno interesado pueda ver dichas demostraciones, indicando cuándo los conocimientos matemáticos que precisa superan el nivel del curso. Son interesantes las observaciones hechas a lo largo de los diferentes capítulos para precisar o explicar algunos resultados, para la ampliación de la materia presentada o para la utilización de técnicas introducidas en otros capítulos.

En cada capítulo hay ejercicios planteados, relacionados con el tema tratado, que pueden servir al alumno para comprobar si ha asimilado los conocimientos adquiridos. Algunos de ellos sólo tienen sentido si se hacen inmediatamente a continuación de algún teorema o resultado teórico que los precede, dado que sirven para mejorar su comprensión o dar idea de una demostración omitida en el texto. Determinados ejercicios propuestos pueden resultar de resolución complicada para el nivel del curso. Estos se incluyen en el texto para dar idea al alumno de otras posibilidades abiertas para profundizar en la materia.

El capítulo 7 sólo consta de ejercicios planteados, relativos a los diferentes temas, todos ellos de fácil resolución. En cuanto a la bibliografía, al final de cada capítulo se encuentran referencias recomendadas sobre el tema. Se citan algunos libros de nivel adecuado para los cursos mencionados; no obstante, es evidente que el alumno, a lo largo de la carrera, se encontrará con problemas mucho más complicados de los que se tratan en el texto, motivo por el cual se aporta una amplia lista de referencias bibliográficas a las que poder dirigirse en determinados casos no tratados en el libro.

Queda por expresar mi agradecimiento a quienes de alguna manera han hecho sugerencias sobre la materia, en especial, a Miguel Lobo; y a Luis Alberto Fernández, Benita Pérez y Jesús Prieto por la lectura y comentarios sobre determinadas partes y diferentes aspectos del texto. Finalmente, dedico esta publicación docente a mi madre por su ayuda incondicional desde siempre.

M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez  
Santander, Octubre de 1999.

# Índice general

<b>1. Ecuaciones diferenciales de primer orden.</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción.	9
1.2. Primeras definiciones y ejemplos.	10
1.3. Significado geométrico de $y' = f(x, y)$ .	15
1.4. Ecuaciones diferenciales exactas.	22
1.4.1. Factores integrantes.	24
1.5. Ecuaciones lineales.	27
1.6. Modelos diferenciales.	30
1.6.1. Crecimiento de poblaciones.	31
1.6.2. Caída libre de cuerpos.	34
1.6.3. Paso de corriente eléctrica a través de circuitos.	35
1.7. El problema de Cauchy.	39
1.7.1. Aproximación numérica de la solución.	44
1.8. Ecuaciones no resueltas en $y'$ .	55
<b>2. Ecuaciones diferenciales de orden <math>n</math>, <math>n &gt; 1</math>.</b>	<b>61</b>
2.1. Introducción.	61
2.2. Primeras definiciones y ejemplos.	62
2.3. Ecuaciones lineales de segundo orden.	69
2.3.1. Ecuación lineal homogénea.	70
2.3.2. Ecuación lineal no homogénea.	75
2.4. Ecuaciones lineales de orden $n$ , $n > 2$ .	76
2.5. Modelos diferenciales.	81
2.6. Solución por desarrollos en serie.	89
2.7. La Transformada de Laplace.	99



<b>3. Sistemas diferenciales de ecuaciones lineales.</b>	<b>113</b>
3.1. Introducción.	113
3.2. Sistemas diferenciales lineales con $n$ ecuaciones.	117
3.3. Sistema homogéneo con coeficientes constantes.	121
3.4. Sistema no homogéneo.	125
<b>4. Sistemas no lineales. Plano de fases.</b>	<b>133</b>
4.1. Introducción.	133
4.2. Mapa de fases para un sistema autónomo.	138
4.3. Puntos críticos en el plano	143
4.3.1. Clasificación de los puntos críticos.	145
4.3.2. Puntos críticos para sistemas lineales con coeficientes constantes.	146
4.3.3. Puntos críticos para sistemas no lineales: aproximación lineal.	148
4.3.4. Estabilidad de los puntos críticos: Método de Liapunov.	149
4.4. Localización de ciclos en el plano.	155
<b>5. Problemas de contorno.</b>	<b>159</b>
5.1. Introducción.	159
5.2. La Función de Green.	163
5.3. Problemas de valores propios.	168
<b>6. Ecuaciones en Derivadas Parciales.</b>	<b>179</b>
6.1. Introducción.	179
6.2. Clasificación de las ecuaciones lineales de segundo orden.	182
6.3. Problemas bien propuestos.	185
6.4. Problemas de Cauchy.	191
6.4.1. Fórmula de D'Alembert.	192
6.4.2. Fórmula de Poisson.	194
6.5. El método de separación de variables.	198
<b>7. Problemas propuestos.</b>	<b>213</b>
7.1. Sobre el capítulo 1.	213
7.2. Sobre el capítulo 2.	222
7.3. Sobre los capítulos 3 y 4.	229

<i>Índice general</i>	7
7.4. Sobre el capítulo 5. . . . .	235
7.5. Sobre el capítulo 6. . . . .	240
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>249</b>



# Capítulo 1

## Ecuaciones diferenciales de primer orden.

### 1.1. Introducción.

Dada una función regular  $f(x)$  se puede conocer su derivada; el proceso contrario consiste en encontrar una función  $y(x)$  tal que su derivada sea  $f(x)$ . Esto es resolver la ecuación diferencial  $y' = f(x)$ . La ecuación planteada es evidentemente *la ecuación diferencial ordinaria de primer orden* más sencilla con que nos vamos a encontrar, y como es sabido no siempre se conoce la primitiva de la función  $f$ .

El objetivo de este capítulo es la familiarización con las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden introduciendo conceptos básicos que se utilizarán a lo largo del curso, así como ejemplos de aplicación de las ecuaciones de primer orden a problemas de la Física y la Técnica. En general, dada la dificultad de resolución de las ecuaciones se intentará dar una aproximación numérica de la solución así como dar ideas sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones, esto es, sobre su comportamiento sin conocerlas explícitamente. Se darán métodos de resolución para algunas ecuaciones "sencillas" que han jugado un papel decisivo a lo largo de la historia de las ecuaciones diferenciales y que en ocasiones aparecen en la práctica en la resolución de importantes problemas.

## 1.2. Primeras definiciones y ejemplos.

Una ecuación diferencial de primer orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con su derivada. Es decir una expresión del tipo:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1.1)$$

donde  $F$  es una función dependiente de tres variables definida en un dominio  $D \subset \mathbf{R}^3$ ,  $y = y(x)$  es la *función incógnita*,  $y'(x)$  su derivada y  $x$  es la *variable independiente*.

Una función  $y = \varphi(x)$  se dice que es una *solución* de la ecuación (1.1) en un intervalo  $(\alpha, \beta)$  cuando  $\varphi$  es continua y derivable en  $(\alpha, \beta)$ , y

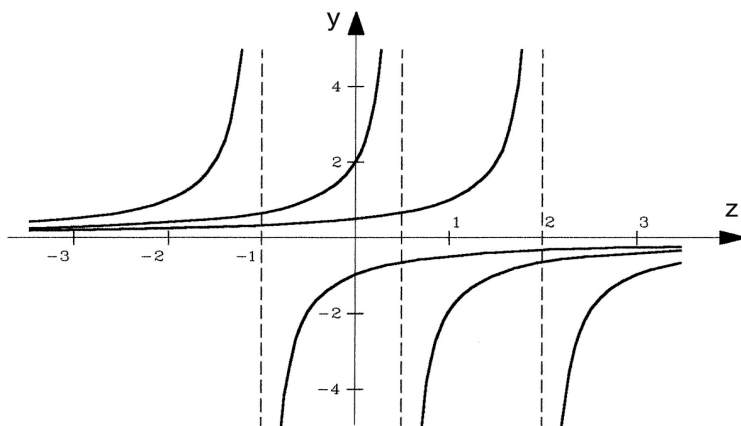
$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D \text{ y } F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

**Ejemplo 1** La ecuación  $y' = y^2$  tiene una solución  $y(x) = \frac{1}{3-x}$  en  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$  (ver figura 1). Otra solución es  $y = 0$  definida en  $(-\infty, +\infty)$ . Evidentemente, éstas dos no son todas las soluciones de la ecuación diferencial. Dividiendo la ecuación por  $y^2$  e integrando obtenemos una familia de soluciones de la ecuación dependientes de un parámetro:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2} dx = \int 1 dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx + c.$$

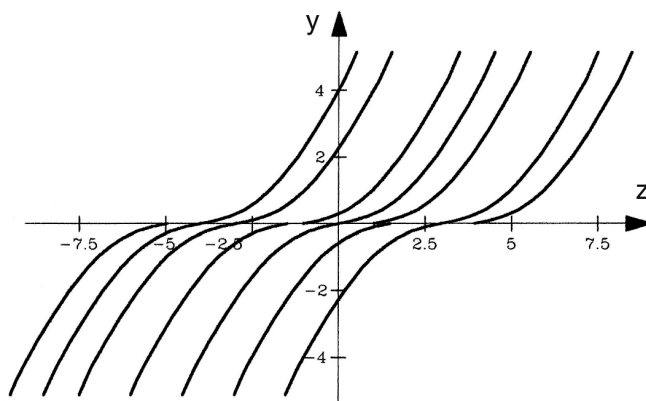
Por tanto,  $y(x) = \frac{1}{c-x}$  es la familia uniparamétrica de soluciones: para cada valor de la constante  $c$  una solución. Observamos que la solución  $y = 0$  no aparece en esta familia, esto es debido a que al dividir por  $y^2$  en la ecuación estamos eliminando la posibilidad de que  $y = 0$  sea solución. También observamos que, aunque la ecuación diferencial esté definida en todo  $\mathbf{R}^3$ , la solución no tiene porque estar definida en todo  $\mathbf{R}$ .  $\square$

**Ejemplo 2** La función  $\varphi(x) = \frac{x^2}{4}$  es continua y derivable en  $(-\infty, \infty)$  y satisface  $\varphi'(x) = \sqrt{\varphi(x)}$  para  $x \in (0, \infty)$ . Es decir, es una solución de la ecuación  $y' = \sqrt{y}$  en  $(0, \infty)$ . Es fácil demostrar que la función  $y(x) = 0$  cuando  $x \leq 0$ ,  $y(x) = \frac{x^2}{4}$  cuando  $x \geq 0$  y la función  $y(x) \equiv 0$  son soluciones de la ecuación en  $(-\infty, \infty)$  (ver figura 2). Por otro lado,



**Figura 1** Curvas integrales de la ecuación  $y' = y^2$

la ecuación diferencial dada está definida en  $\{(x, y, y'), y \geq 0\}$ , mientras que  $y' = \sqrt{|y|}$  está definida en  $\mathbf{R}^3$ . La familia de curvas solución de ésta última ecuación está dada por  $\sqrt{y} = \frac{x+c}{2}$  para  $x \geq -c$  y por  $\sqrt{-y} = -\frac{x+c}{2}$  para  $x \leq -c$  (ver figura 2).  $\square$

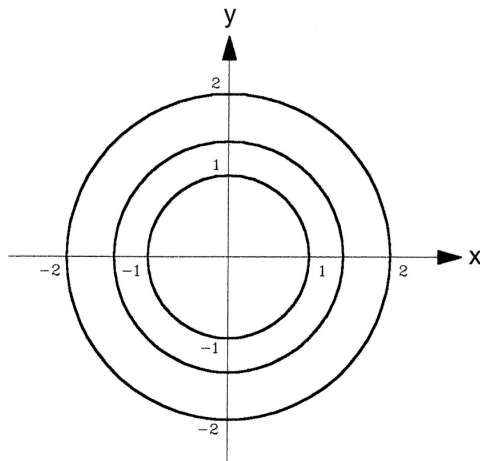


**Figura 2** Curvas integrales de la ecuación  $y' = \sqrt{|y|}$ .

Los ejemplos 1 y 2 son ejemplos de ecuaciones diferenciales escritas en *forma normal* es decir de la forma  $y' = f(x, y)$ . No todas las ecuaciones se saben escribir de esta forma, como por ejemplo, la ecuación

$y' = xy + \exp(y')$ . Estos ejemplos nos permiten observar que en general, al integrar una ecuación diferencial de primer orden se obtiene *una familia uniparamétrica de curvas solución*  $y = y(x, c)$ ,  $c$  es un parámetro. Sin embargo esta afirmación no siempre es cierta. Por ejemplo, la ecuación  $|y'| + |y| + |x| = 0$  no tiene solución real, la ecuación  $y'^2 + y^2 = 0$  sólo admite la solución trivial  $y \equiv 0$ . Tampoco la familia uniparamétrica de soluciones nos proporciona todas las soluciones de la ecuación diferencial ( $y \equiv 0$  en los ejemplos 1 y 2 no está incluida en la familia). A la familia uniparamétrica de soluciones se la llama *solución general* mientras que a cada solución para un valor fijo del parámetro  $y = y(x, c_0)$  se la denomina *solución particular*. Observamos que al integrar la ecuación diferencial las curvas de la solución general no vienen siempre dadas en *forma explícita*,  $y = y(x, c)$ , sino que pueden venir definidas *en forma implícita*,  $\phi(x, y, c) = 0$ , ó en *forma paramétrica*  $(x(t, c), y(t, c)), t \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ , o en *forma inversa*,  $x = x(y, c)$ . A todas estas curvas se les suele llamar *curvas integrales* de la ecuación diferencial y cuando se pueden escribir en la forma  $y = y(x)$  se les denomina *solución explícita* (ver Teorema de la función implícita). Nosotros, en general, no haremos diferencia y nos referiremos a ellas como curvas solución. El siguiente ejemplo intenta ser ilustrativo de la situación.

**Ejemplo 3** Se considera la ecuación  $y' = \frac{-x}{y}$ . Multiplicando la ecuación por  $y$ , una simple integración nos permite afirmar que la familia de curvas integrales está dada por la familia de circunferencias centradas en el origen,  $x^2 + y^2 = c^2$  (ver figura 3). Evidentemente, la solución obtenida está dada en forma implícita. La solución explícita:  $y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}, x \in (-c, c)$ . La solución en forma paramétrica es  $(c \cos t, c \sin t)$ , mientras que la función inversa de la solución es  $x(y) = \pm\sqrt{c^2 - y^2}, y \in (-c, c)$ . Observamos que la solución explícita está definida en puntos  $x \neq \pm c$ . En estos puntos de la circunferencia  $y = 0$ , y como consecuencia la ecuación diferencial  $y' = \frac{-x}{y}$  no está definida, mientras que si lo está la ecuación  $x'(y) = \frac{-y}{x}$  donde la variable independiente es ahora la  $y$ . Las soluciones de esta última ecuación son precisamente las curvas solución de la primera, en forma inversa,  $x(y) = \pm\sqrt{c^2 - y^2}, x \in (-c, c)$ . Por otro lado, derivando implícitamente con respecto a  $x$  en  $x^2 + y^2 = c^2$  obtenemos la ecuación  $2x + 2yy' = 0$ , y derivando con respecto a  $y$  se obtiene  $2xx'(y) + 2y = 0$ . De ambas



**Figura 3** Curvas integrales de la ecuación  $y' = -x/y$ .

ecuaciones se obtiene inmediatamente  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  y  $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$  respectivamente. Así pues el problema de obtener las curvas integrales de la ecuación  $y' = -x/y$  es el mismo que el de obtener las curvas integrales de  $x' = -y/x$ .  $\square$

El ejemplo 3 nos da idea de cómo obtener una ecuación diferencial de la que es solución general la familia de curvas  $\phi(x, y, c) = 0$ : Desde un punto de vista práctico, se deriva implícitamente con respecto a  $x$  y se elimina  $c$  si se puede entre las ecuaciones  $\phi(x, y, c) = 0$  y  $\phi_x(x, y, c) + \phi_y(x, y, c)y' = 0$  para obtener la ecuación diferencial.  $\phi_x, \phi_y$  indican las derivadas parciales de  $\phi$  con respecto a  $x$  e  $y$ . Así la ecuación diferencial verificada por la familia  $y = \exp(cx)$  está dada por  $y' = \frac{y \log y}{x}$ , y la ecuación diferencial de las circunferencias de radio 1 y centro en la recta  $y = 0$  es  $y^2(y'^2 + 1) = 1$ .

De ahora en adelante  $\phi_x$  indicará la derivada parcial de la función  $\phi$  con respecto a la variable  $x$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ , y cuando escribamos  $\int f(x) dx$  haremos referencia a una primitiva cualquiera de la función  $f(x)$ .

El ejemplo 3, también, nos da idea de que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.2)$$



es equivalente a resolver

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \quad (1.3)$$

Ambas ecuaciones son la misma si  $f(x, y) \neq 0$  y  $\frac{1}{f(x, y)} \neq 0$

La ecuaciones que hemos integrado hasta ahora son ejemplos de *ecuaciones de variables separadas*, esto es se pueden escribir en la forma

$$f(y)y' = g(x). \quad (1.4)$$

y su solución está dada por

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c \quad \forall c \text{ constante.} \quad (1.5)$$

Otras ecuaciones que se reducen a una de este tipo son las *ecuaciones homogéneas*. Son de la forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.6)$$

Sin más que hacer el cambio  $u = y/x$  (i.e.  $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ ) y substituir en la ecuación (1.6), teniendo en cuenta que  $y' = xu' + u$ , se tiene una ecuación de la forma (1.4). Ecuaciones que se reducen fácilmente a homogéneas son las de la forma  $y' = h\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$  (hágase un cambio de variable  $z = ax + by$  ó  $(X = x - x_0, Y = y - y_0)$  según que las rectas  $ax + by + c = 0$  y  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  sean paralelas o se corten en un punto  $(x_0, y_0)$ ).

Nosotros consideraremos que conocemos la solución de una ecuación de variables separadas, ésta está dada mediante la fórmula (1.5), pero como ya se dijo en la introducción no siempre se conoce la primitiva de  $f$  y  $g$ , y por tanto, la solución escrita de esta forma puede no darnos mucha idea de cómo se comportan las soluciones de la ecuación diferencial. Damos, en la sección 1.3, un método que en ocasiones nos permite obtener una idea cualitativa sobre el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial escrita en forma normal (1.2) o (1.3). Observemos antes que la fórmula (1.5) puede también expresarse de la forma:

$$\int_{y_0}^y f(y)dy = \int_{x_0}^x g(s)ds$$

donde ahora estamos particularizando el valor de la constante  $c$ , imponiendo a la curva solución que verifique  $y(x_0) = y_0$ . Notemos que, decir que se impone a la gráfica de una curva solución que pase por un punto  $(x_0, y_0)$  del plano, es resolver el *problema de valor inicial o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

En general se dirá que dicha solución pasa por  $(x_0, y_0)$ . Es evidente que resolver el problema (1.7) es equivalente a resolver la ecuación integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (1.8)$$

### 1.3. Significado geométrico de $y' = f(x, y)$ .

Supongamos que  $y = y(x)$  es una solución de la ecuación  $y' = f(x, y)$  y  $(x_0, y_0)$  es un punto cualquiera de su gráfica. No conocemos la curva  $y = y(x)$ , pero sí su pendiente:  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ . Si en cada punto  $(x, y)$  dibujamos una recta o un vector con pendiente  $f(x, y)$  se tiene, lo que se llama, un campo de direcciones. Como desde el punto de vista geométrico las ecuaciones (1.2) y (1.3) son totalmente equivalentes, diremos que la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  define *un campo de direcciones* en el dominio  $D$  donde  $f$  o  $\frac{1}{f}$  estén definidas:

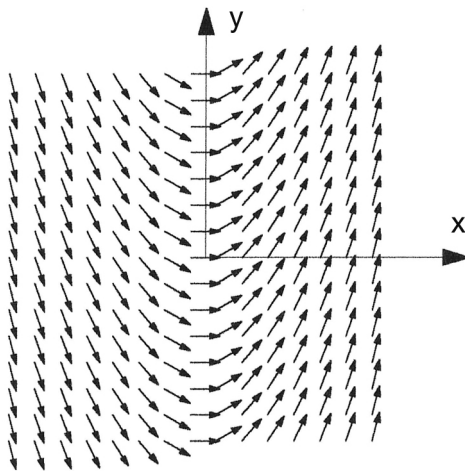
$$(x, y) \longrightarrow \text{dirección de la recta de pendiente } f(x, y)$$

para  $(x, y) \in D$ , cuando  $f(x, y)$  está definida, ó

$$(x, y) \longrightarrow \text{dirección del vector } \left( \frac{1}{f(x, y)}, 1 \right).$$

para  $(x, y) \in D$ , cuando  $1/f(x, y)$  está definida. Evidentemente en los puntos en que  $f$  y  $1/f$  están definidas ambas direcciones coinciden.

Dibujando muchas direcciones (tantas como se pueda) seguramente podemos tener una idea de cómo se comportan las curvas solución. Tal ocurre con la ecuación  $y' = x$  para la que, a raíz del dibujo de la figura 4, vemos que las curvas integrales son parábolas desplazadas a lo largo del eje  $y$ ; esto se confirma fácilmente integrando la ecuación:  $y = \frac{x^2}{2} + c$ .



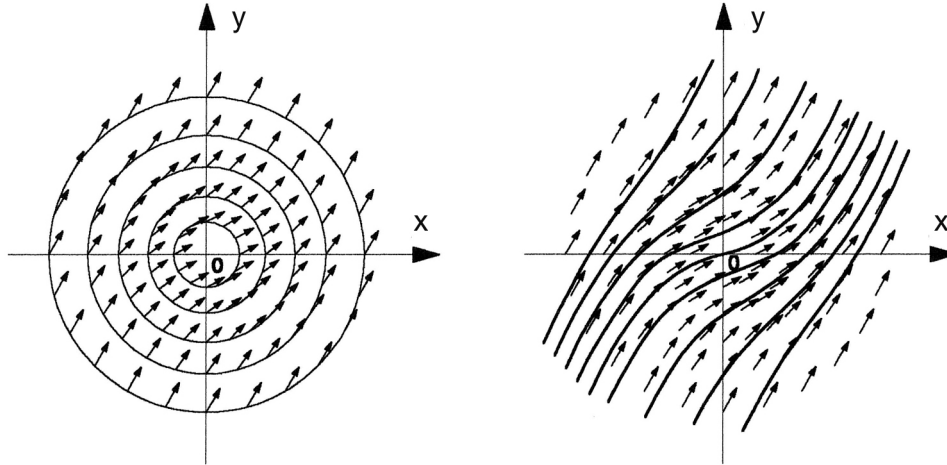
**Figura 4** Campo de direcciones asociado a  $y' = x$ .

Evidentemente, el proceso es interesante para ecuaciones diferenciales de las que no se conoce la solución, con la complicación lógica de dibujar el campo de direcciones asociado a la ecuación. El *método de las isoclinas* nos puede ayudar en este caso. Dicho método consiste en dibujar en el plano  $xy$  las llamadas curvas isoclinas donde la pendiente de las soluciones de la ecuación diferencial es constante y, por tanto, lo es la dirección del campo en los puntos de dichas isoclinas. Así

$$\{(x, y)/f(x, y) = k\}$$

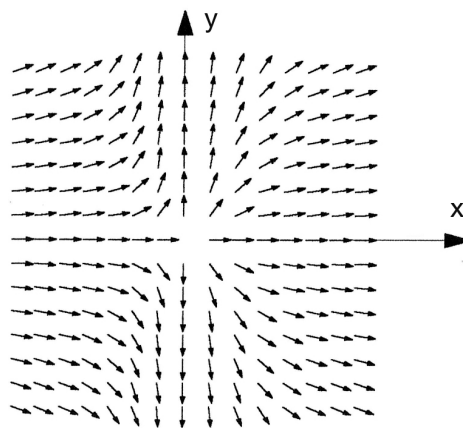
es la *isoclina para la pendiente  $k$* , y la dirección del campo a lo largo de dicha curva es la del vector  $(1, k)$ .

**Ejemplo 4** La ecuación diferencial  $y' = x^2 + y^2$  tiene por isoclinas las circunferencias  $x^2 + y^2 = k$ . En cada circunferencia la dirección del campo está dada por la del vector  $(1, k)$ . Las curvas integrales son tangentes a las rectas que definen la dirección del campo (ver figura 5). Así, dado que no sabemos resolver la ecuación diferencial, podemos tener una idea del comportamiento de las curvas solución: las curvas solución son crecientes y su pendiente es más suave cuando están cerca del punto  $(0, 0)$ . Más adelante se comprobará numéricamente que esta gráfica nos da una idea aproximada del comportamiento de las soluciones.  $\square$

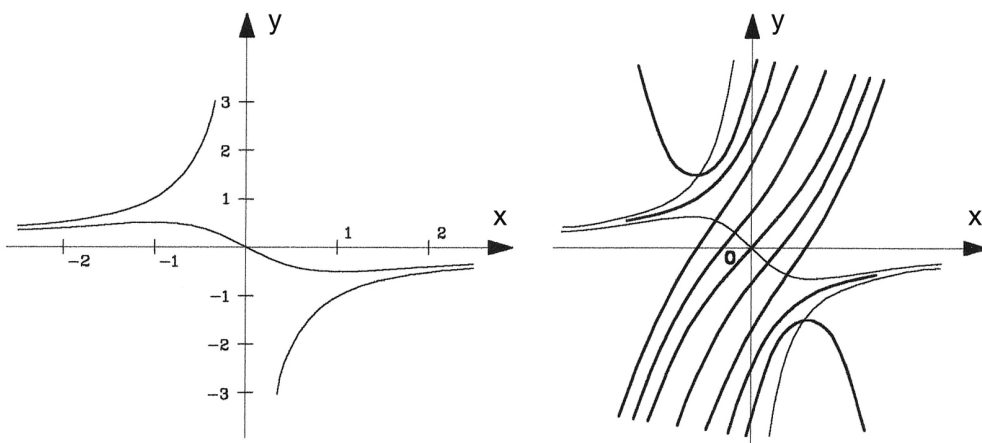


**Figura 5** Campo de direcciones asociado a  $y' = x^2 + y^2$ .

**Ejemplo 5** La ecuación  $y' = \frac{y}{x^2}$  tiene por isoclinas las parábolas con vértice en el origen  $y = kx^2$ . En cada parábola la dirección del campo está dada por la del vector  $(1, k)$ . En los puntos de la recta  $x = 0$  la dirección del campo está dada por el vector  $(0, 1)$ , como consecuencia de considerar la ecuación diferencial  $x' = \frac{x^2}{y}$ . El único punto donde no está definido el campo de direcciones es el punto  $(0, 0)$ . Así, el dibujo de la figura 6 nos da una idea aproximada de las curvas integrales de la ecuación que coincide con la obtenida al representar las soluciones obtenidas por integración:  $y = c \exp(-\frac{1}{x})$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .  $\square$



**Figura 6** Campo de direcciones asociado a  $y' = y/x^2$ .



**Figura 7** Crecimiento de las curvas integrales de  $y' = xy + 1$ .

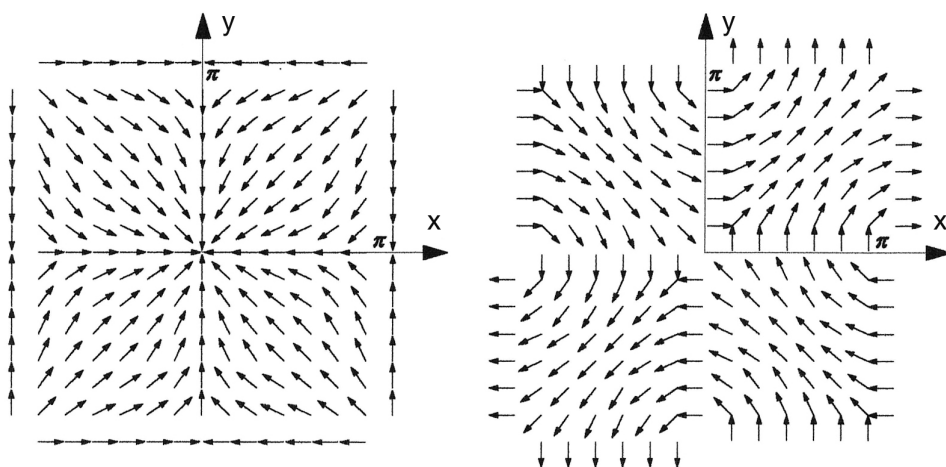
De cara a obtener una mejor representación de las curvas integrales a través del campo de direcciones puede ser conveniente pensar detenidamente en la isoclima para la pendiente 0 así como calcular la derivada segunda de la función solución  $y(x)$ ,

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y),$$

que nos da idea de las concavidades y convexidades de la solución  $y(x)$ . Por ejemplo, puede hacerse como ejercicio, bosquejar las curvas integrales de la ecuación  $y' = xy + 1$ . Observamos que la isoclima para la pendiente  $k = 0$ , la hipérbola  $xy = -1$ , divide el plano en regiones en que las curvas pasan de crecientes a decrecientes. La derivada segunda,  $y'' = x + (x^2 + 1)y$ , nos proporciona la curva  $x + (x^2 + 1)y = 0$  por debajo de la cual las soluciones son convexas y por encima cóncavas (ver figura 7). Si dibujamos más isoclinas tendremos una mejor aproximación de las curvas integrales.

Ejemplos más sofisticados de representación de curvas integrales a través del campo de direcciones nos los dan, por ejemplo, las ecuaciones  $y' = \frac{\sin y}{\sin x}$  e  $y' = \frac{\sin x}{\sin y}$  (ver gráficas de la figura 8), para los que puede ser conveniente utilizar un ordenador. Observamos que en ambos casos el campo de direcciones está definido en  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / (x, y) \neq (k\pi, n\pi), k, n \in \mathbf{Z}\}$ , pero que mientras los trozos de rectas  $\{x = k\pi, y \neq$

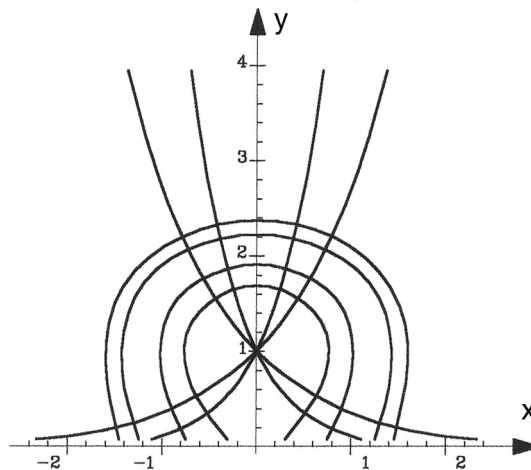
$n\pi$ },  $\{y = n\pi, x \neq k\pi\}$  son curvas integrales de la primera ecuación, no lo son de la segunda. Una simple integración de ambas ecuaciones nos permite contrastar los dibujos de las figura 8 con las soluciones de dichas ecuaciones.



**Figura 8** Campo de direcciones asociado a  $y' = \frac{\sin y}{\sin x}$  ( $y' = \frac{\sin x}{\sin y}$ , respectivamente).

Dada una familia de curvas,  $\phi(x, y, c) = 0$ , estamos en condiciones de encontrar la familia de curvas,  $\psi(x, y, c) = 0$ , tal que, cada curva de éstas corta a cada una de las de la otra familia con un determinado ángulo  $\omega$ . En particular, cuando  $\omega = \pi/2$ , se denominan *familia de curvas ortogonales*: evidentemente, después de lo expuesto anteriormente, si  $\phi(x, y, c) = 0$  satisfacen la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$ ,  $\psi(x, y, c) = 0$  son las curvas solución de  $y' = -1/f(x, y)$ .

**Ejemplo 6** la familia de curvas ortogonales a  $y = \exp(cx)$  satisfacen la ecuación diferencial  $y'y \log y = -x$ . Integrando dicha ecuación se tiene que las curvas que cortan a la familia dada con un ángulo recto es  $\frac{y^2}{2} \log y - \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = c$  (ver figura 9). Se observa que como  $y = e^{cx}$ , sólo nos movemos en el semiplano  $y > 0$ .  $\square$



**Figura 9** Curvas ortogonales a  $y = \exp(cx)$  .

### EJERCICIOS.

1. Dibujar el campo de direcciones y bosquejar las curvas integrales asociadas a las siguientes ecuaciones diferenciales
  - a). Las ecuaciones de variables separadas:  $y' = \frac{y}{x^2}$ ,  $y' = \exp(-x^2)$ ,  
 $y' = \frac{xy}{|xy|}$ ,  $y' = \frac{-x}{y}$ ,  $y' = \frac{x+|x|}{y+|y|}$
  - b). Las ecuaciones homogéneas:  $y' = \frac{x-y}{x+y}$ ,  $y' = \frac{x+y}{x-y}$
  - c). Las ecuaciones lineales:  $y' = 1 + 2xy$ ,  $y' = y$ ,  $y' = y + x$ ,  
 $y' = y + \sin x$ ,  $y' = 2x - 1$ ,  $y' = xy + 1$ ,  $y' = \frac{y}{\sin x}$ .
  - d). Las ecuaciones de Riccati  $y' = y^2 - x^2$ ,  $y' = x^2 + y^2 + 1$ .
  - e). Las ecuaciones  $y' = \cos(x - y)$ ,  $y' = \sqrt{|1 - x^2 - y^2|}$ .

Comparar con los gráficos de las soluciones obtenidas al integrar la ecuación diferencial siempre que se pueda.

2. Encontrar la familia de curvas ortogonales a a). la familia de circunferencias centradas en el origen, b). la familia  $y = \exp(cx)$ , c). la familia de rectas  $y = kx$ , d). la familia de elipses  $x^2 - xy + y^2 = c^2$ , e). la familia de parábolas  $y = cx^2$ , y,  $y^2 = x + c$ , f). la familia de hipérbolas  $xy = c$ , g). La familia de curvas en coordenadas polares  $r = c(1 + \cos \theta)$

3. a). Demostrar que la familia de circunferencias centradas en el eje  $x$  y de radio 1 son una familia de curvas integrales de  $y^2(y'^2 + 1) = 1$ .
- b). Considerando el dibujo de esta familia, deducir que las rectas  $y = \pm 1$  son también curvas integrales de la ecuación. ¿Se Podrían construir otras curvas integrales a partir de estas?
- c). Demostrar que por cada punto de cada una de las rectas  $y = \pm 1$  hay una única circunferencia de la familia tangente a ellas y que en cada segmento de las rectas hay infinitas circunferencias que las cortan. Esto es, las rectas  $y = \pm 1$  son *curvas envolventes* de la familia de circunferencias.
4. Encontrar la ecuación diferencial de las siguientes familias de curvas:  $y = e^{cx}$ ,  $y = \sin(x + c)$ ,  $cy = \sin(cx)$ ,  $x^2 + cy^2 = 2y$ .
5. Encontrar la ecuación diferencial de la familia de rectas que distan del origen una longitud constante  $a$ . ¿Se podrían construir a partir de estas rectas otras soluciones de la ecuación diferencial?
6. Se sabe que si dos líneas rectas en el plano tienen pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, y se cortan con un ángulo  $\alpha$ , entonces se verifica la relación

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

- a). Encontrar la familia de curvas que cortan a cada una de las siguientes familias con un ángulo de  $45^\circ$ : a).  $x - 2y = c$ , b).  $x^2 + y^2 = c^2$ .
- b). Encontrar la familia de curvas que cortan a  $y = x \ln|x| + cx$  con un ángulo  $\omega = \arctan(2)$ .
7. Resolver las ecuaciones homogéneas: a).  $y' = \frac{xy+y^2+x^2}{x^2}$ , b).  $y' = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}}$ , c).  $xy' = y - x \exp(\frac{y}{x})$ , d).  $y' = \frac{y^2+xy}{x^2}$ , e).  $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ , f).  $y' = \frac{2x+y-5}{x+2y-4}$ , g).  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ , h).  $y' = \frac{x+y+5}{x+y-1}$ .
8. Se dice que una función  $f(x, y)$  es *homogénea de orden  $p$*  cuando para cada real  $\lambda$  se verifica  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p f(x, y)$ . Demostrar que



si  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son funciones homogéneas del mismo orden la ecuación diferencial  $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$  es también homogénea.

9. Una curva pasa del origen, en el plano  $xy$ , al primer cuadrante. Se sabe que el área bajo la curva de  $(0, 0)$  a  $(x, y)$  es un tercio del área del rectángulo que tiene esos puntos como vértices opuestos. Encontrar la ecuación de la curva.
10. Encontrar las curvas verificando que, en cada punto, la abscisa del punto de intersección de la tangente a la curva con el eje de las abscisas es la mitad de la del punto.
11. Una pelota de futbol americano, que tiene forma de elipsoide de revolución con 12 pulgadas de longitud y 6 de ancho, permanece bajo la lluvia. Encontrar las trayectorias que seguirán las gotas de agua al escurrir por sus lados.

## 1.4. Ecuaciones diferenciales exactas.

En ocasiones, como a lo largo de esta sección, encontramos ecuaciones diferenciales escritas en la forma:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (1.9)$$

Dejando a un lado cualquier otra consideración, nosotros no haremos distinción entre la ecuación (1.9) y la ecuación

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (1.10)$$

De ahora en adelante suponemos que  $P$  y  $Q$  son funciones definidas en un rectángulo abierto  $\mathcal{R}$  de  $\mathbf{R}^2$  no nulas a la vez. Se dice que la ecuación (1.9) es *diferencial exacta* si existe una función  $F$ ,  $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable tal que  $F_x(x, y) = P(x, y)$  y  $F_y(x, y) = Q(x, y) \forall (x, y) \in \mathcal{R}$ . La importancia de la exactitud reside en que, en este caso,  $F(x, y) = c$  es una familia de curvas integrales de (1.9). Esta última afirmación se deduce sin más que derivar implícitamente con respecto a  $x$ :  $F_x + F_y y' = 0$ , y por tanto  $F(x, y) = c$  satisface la ecuación (1.10).

Evidentemente, nos interesa un criterio de exactitud para saber cuando una ecuación es diferencial exacta. Supongamos para ello que  $P$  y  $Q$  son funciones continuas y tienen derivadas parciales primeras continuas en  $\mathcal{R}$ . Si la ecuación (1.9) es diferencial exacta entonces se demuestra inmediatamente que  $P_y = Q_x$  en  $\mathcal{R}$ . El resultado complementario también es cierto. Supongamos que  $P_y = Q_x$  en  $\mathcal{R}$ , y busquemos  $F$  tal que  $F_x = P$ ,  $F_y = Q$ .

Integrando la ecuación  $F_x = P$  con respecto a  $x$ :

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y)$$

donde  $C(y)$  es la constante de integración dependiente sólo de  $y$ . Imponiendo ahora la condición  $F_y = Q$  se tiene:

$$C'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$$

donde, debido a la relación  $P_y = Q_x$ , la parte derecha de la igualdad es una función de la variable  $y$  independiente de  $x$ . Así pues,

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \int (Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx) dy. \quad (1.11)$$

Observamos que de esta manera tenemos un método constructivo de calcular las curvas integrales de una ecuación diferencial exacta,  $F(x, y) = c$ . Hemos demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 1** Sean  $P$  y  $Q$  dos funciones continuas y con derivadas parciales primeras continuas en  $\mathcal{R}$ . Entonces, la ecuación (1.9) es diferencial exacta en  $\mathcal{R}$  si y sólo si  $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathcal{R}$ .

**Ejemplo 7** La ecuación  $(y \exp(xy) + 2xy)dx + (x \exp(xy) + x^2)dy = 0$  es diferencial exacta dado que  $P = (y \exp(xy) + 2xy)$  y  $Q = (x \exp(xy) + x^2)$  satisfacen  $P_y = \exp(xy) + xy \exp(xy) + 2x = Q_x$ . La fórmula (1.11) nos da  $F(x, y) = \exp(xy) + x^2y$ . Por tanto la familia de curvas integrales es:  $\exp(xy) + x^2y = c$ .  $\square$

Observamos que los resultados de esta sección son ciertos si  $\mathcal{R}$  es un dominio abierto simplemente conexo de  $\mathbf{R}^2$ . Por otro lado, a raíz

del resultado anterior, uno puede preguntarse cuándo una ecuación no diferencial exacta puede reducirse a una diferencial exacta. Para ello introducimos en el siguiente apartado la noción de factor integrante de una ecuación diferencial y damos idea de como obtener algunos de ellos. Veamos antes un ejemplo:

**Ejemplo 8** La ecuación  $(\tan y)dx + (\tan x)dy = 0$  no es diferencial exacta, pues  $P_y \neq Q_x$ , sin embargo, si multiplicamos la igualdad por  $\cos x \cos y$  obtenemos  $(\cos x \sin y)dx + (\sin x \cos y)dy = 0$  que sí es diferencial exacta y por tanto sabemos resolverla. La función  $\nu$ ,  $\nu(x, y) = \cos x \cos y$ , es lo que se denomina un *factor integrante* de la ecuación diferencial dada, y resolver ésta es lo mismo que resolver la obtenida al multiplicar por  $\nu$ , salvo en los puntos en los que se anula  $\nu(x, y)$  ( $x = \frac{2n+1}{2}\pi$ , o  $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ , para  $k, n \in \mathbf{Z}$ ).  $\square$

### 1.4.1. Factores integrantes.

Una función  $\nu = \nu(x, y)$ ,  $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\nu(x, y) \neq 0$  en  $\mathcal{R}$ , se dice que es un factor integrante de la ecuación (1.9) cuando la ecuación

$$\nu(x, y)P(x, y) dx + \nu(x, y)Q(x, y) dy = 0 \quad (1.12)$$

es diferencial exacta en  $\mathcal{R}$ .

Es evidente que la resolución de la ecuación (1.9) es equivalente a la de (1.12)

A raíz de lo expuesto anteriormente una condición necesaria y suficiente para que (1.9) admita un factor integrante es que se satisfaga

$$\nu_y(x, y)P(x, y) + \nu(x, y)P_y(x, y) = \nu_x(x, y)Q(x, y) + \nu(x, y)Q_x(x, y).$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales de primer orden y su resolución en general es más complicada que la que teníamos al principio. Así pues, vemos que el problema de encontrar un factor integrante no es nada fácil, y en general lo que se suele hacer es encontrar factores integrantes dependientes de  $x$  e  $y$  de una determinada forma:  $\nu(x)$ ,  $\nu(y)$ ,  $\nu(xy)$ ,  $\nu(x^2 + y)$ , etc. La manera de proceder para ver si la ecuación admite un factor integrante  $\nu(z)$ , con  $z = z(x, y)$  una función que depende de  $x$  e  $y$  en la forma anteriormente citada, es como sigue: Se

calculan las derivadas parciales de  $\nu$  con respecto a  $x$  e  $y$  y se substituye en la ecuación en derivadas parciales. A continuación se despeja  $\frac{\nu'(z)}{\nu(z)}$ . Evidentemente este término deberá ser función de  $z$  y de esta manera se llega a una relación que tienen que verificar  $P$  y  $Q$  para que exista un factor integrante  $\nu(z)$ .

**Ejemplo 9** Queremos encontrar un factor integrante (1.9) dependiente de  $xy^2$ . Haciendo  $z = xy^2$ , imponemos la condición de que  $\nu = h(z)$  sea factor integrante, i.e.

$$h(z)P_y + h'(z)2xyP = h(z)Q_x + h'(z)y^2Q$$

Despejando  $\frac{h'(z)}{h(z)}$ , se tiene:

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2Q}.$$

Así pues, una condición necesaria y suficiente para que exista un factor integrante dependiente de  $xy^2$  es que la función  $\frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{2xyP(x,y) - y^2Q(x,y)}$  sea función de  $xy^2$ . Entonces, el factor integrante está dado por

$$h(z) = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2Q} dz\right).$$

□

**Ejemplo 10** Demostramos que la ecuación  $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$  admite un factor integrante dependiente de  $xy^2$ . Para ello, primero demostramos que no es diferencial exacta: Tomemos  $P = (y^2 + xy)$ ,  $Q = -x^2$ . Evidentemente  $P_y \neq Q_x$ . Sin embargo,  $\frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2Q} = -\frac{1}{xy^2}$ , luego existe un factor integrante de la forma buscada, dado por la fórmula del ejemplo 9:  $\nu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ . Multiplicando la ecuación por  $\frac{1}{xy^2}$  se tiene  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ , que sí es una ecuación diferencial exacta. Ahora, la fórmula (1.11) con  $P = (\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ ,  $Q = -\frac{x}{y^2}$  nos da la función  $F(x, y) = \log|x| + \frac{x}{y}$ . La familia de curvas integrales es:  $\log|x| + \frac{x}{y} = c$ . Como, en la ecuación de partida,  $P = (y^2 + xy)$  y  $Q = -x^2$  son nulas en el punto  $(0, 0)$ , en este punto no hay definida ecuación diferencial. Por otro lado, puesto que hemos dividido por  $xy^2$  en la ecuación de partida podríamos estar quitando soluciones de dicha ecuación. Así comprobamos que las curvas  $x = 0$ ,  $y = 0$  son también curvas integrales de la ecuación diferencial. □

Se observa que una ecuación diferencial puede admitir distintos factores integrantes y que cuantos más factores integrantes se conozcan más ecuaciones sabremos resolver. En los siguientes ejercicios se pide encontrar diversos factores integrantes de ecuaciones diferenciales

### EJERCICIOS.

- Resolver las siguientes ecuaciones: a).  $y \cos x dx + (1 + \sin x) dy = 0$ , b).  $(y \cos x + 2x \exp(y)) dx + (x^2 \exp y - 1 + \sin x) dy = 0$ , c).  $(x^3 + \frac{y}{x}) dx + (y^2 + \log x) dy = 0$  para  $x > 0$ , d).  $3x(xy - 2) dx + (x^3 + 2y) dy = 0$ .
- Dar condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación (1.9) admita un factor integrante dependiente de  $x$ ,  $y$ ,  $x+y$ ,  $xy$ ,  $x^2+y^2$ ,  $x+y^2$ ,  $x^n y^m$ ,  $y$ ,  $\frac{x}{y}$ .
- Reducir las siguientes ecuaciones a diferenciales exactas utilizando alguno de los factores integrantes del ejercicio anterior: a).  $(3y^2 - x) dx + (2y^3 - 6xy) dy = 0$ , b).  $(y^2 + xy) dx - x^2 dy = 0$ , c).  $\frac{x^2}{y} dy + 2x dx = 0$ , d).  $x^2 y^3 + x(1+y^2) y' = 0$ , e).  $(x-y) dx + (x+y) dy = 0$ , f).  $(y-x) dx + (x+y) dy = 0$ , g).  $2x dx + \frac{x^2}{y} dy = 0$ , h).  $(y^3 - xy) y' = 1$ , i).  $(xy - 1) dx + (x^2 - xy) dy = 0$ , j).  $y dx + (3x^3 y^4 + x) dy = 0$ , k).  $y dx + (x^2 y - x) dy = 0$ , l).  $x dx + (y + 4y^3(x^2 + y^2)) dy = 0$ , m).  $y(x + y^2) dx + x^2(y - 1) dy = 0$ , n).  $y dx - x dy = 0$ , o).  $y dx + (2xy - \exp(-2y)) dy = 0$ , p).  $(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$ .
- Demostrar que si la ecuación (1.9) es una ecuación homogénea entonces admite el factor integrante  $\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$  siempre que el denominador no sea nulo. En el caso  $xP(x,y) + yQ(x,y) \equiv 0$  entonces la ecuación es equivalente a la de variables separadas  $y dx - x dy = 0$ .
- Demostrar que la ecuación lineal no homogénea  $y' + p(x)y = q(x)$  admite un factor integrante dependiente de  $x$ . Calcular dicho factor y resolver la ecuación.
- Encontrar  $a$  para que la ecuación  $(xy^2 + ax^2y) dx + x^2(x+y) dy = 0$  sea diferencial exacta y resolverla.

## 1.5. Ecuaciones lineales.

La forma más general de la *ecuación lineal de primer orden* es  $a_0(x)y' + a_1(x)y + a_2(x) = 0$  con  $a_i(x)$  funciones definidas en un intervalo  $I \subset \mathbf{R}$ , donde  $a_0(x)$  no se anula nunca. Así se puede dividir por  $a_0(x)$  y tener una ecuación

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.13)$$

conocida como *ecuación lineal no homogénea*, mientras que si  $q(x) \equiv 0$ ,

$$y' + p(x)y = 0 \quad (1.14)$$

la ecuación recibe el nombre de *ecuación lineal homogénea*. De ahora en adelante, suponemos que  $p$  y  $q$  son funciones continuas de  $I = (\alpha, \beta)$  en  $\mathbf{R}$ , y se resuelve la ecuación en el intervalo  $I$ . Las ecuaciones lineales aparecen en numerosos problemas de la Física y la Técnica y en ocasiones se utilizan para aproximar modelos no lineales.

Resolvemos primero la ecuación homogénea. Observamos que la particularidad de la ecuación (1.14), a la que debe su nombre, es que dadas dos soluciones  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  en el intervalo  $I$ , cualquier combinación lineal de ellas  $y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$  es también solución en  $I$ , para cualesquiera  $k_i$  constantes. La resolución de (1.14) es sencilla dado que es una ecuación de variables separadas. La familia de curvas integrales es:

$$y(x) = c \exp\left(-\int p(x)dx\right). \quad (1.15)$$

Es evidente, que toda solución de (1.14) tiene la forma (1.15): en efecto, si  $y_1(x)$  es una solución, se comprueba que  $\frac{d}{dx}(y_1(x) \exp(\int p(x)dx)) = 0$  y por tanto  $y_1(x)$  es de la forma (1.15) para alguna constante  $c$ .

En cuanto a la ecuación (1.13), puede ser considerada como una ecuación que admite un factor integrante dependiente de  $x$ ,  $\nu(x) = \exp(\int p(x)dx)$  y ser resuelta, por tanto, como una diferencial exacta. Nosotros, introducimos aquí un método para resolverla que nos será de utilidad para ecuaciones de orden superior: el *método de variación de parámetros*. Para ello, observamos que toda solución de (1.13) es de la forma  $c \exp(-\int p(x)dx) + y_p(x)$ , donde  $y_p$  es una solución particular cualquiera de (1.13).

El método de variación de parámetros consiste en encontrar  $y_p(x)$  de la forma  $y_p = k(x) \exp(-\int p(x)dx)$ , es decir, una solución de la ecuación homogénea multiplicada por una función  $k(x)$  a determinar. Calculamos  $k(x)$  derivando la expresión  $y_p = k(x) \exp(-\int p(x)dx)$  y substituyendo en (1.13). Así se llega a la ecuación:

$$k'(x) \exp(-\int p(x)dx) = q(x),$$

de donde se obtiene  $k(x)$  mediante una simple integración. Esto nos permite afirmar que la solución general de (1.13) está dada por

$$y(x) = \exp(-\int p(x)dx) \left( c + \int q(x) \exp(\int p(x)dx) dx \right), \quad (1.16)$$

y evidentemente cualquier solución de la ecuación no homogénea es de la forma (1.16). Así pues, para una ecuación lineal, no existen más soluciones que las obtenidas a través de esta familia uniparamétrica (comparar con el ejemplo 1, y el ejercicio 3 de la sección 1.3).

Observamos que se han tomado integrales indefinidas para la resolución de las ecuaciones lineales, pero, como en el caso de las ecuaciones de variables separadas, se podrían haber tomado integrales definidas. De hecho se puede enunciar el siguiente teorema:

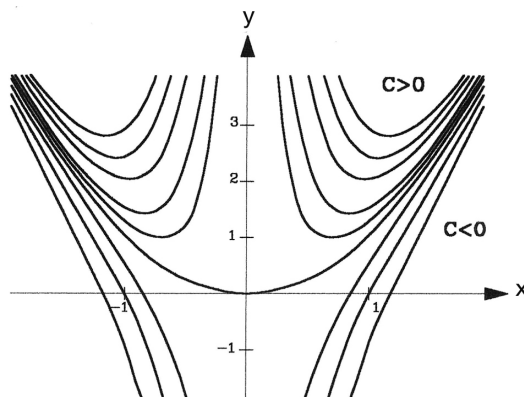
**Teorema 2** Sean  $p, q : I \rightarrow \mathbf{R}$  funciones continuas y  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbf{R}$ . Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.17)$$

definida en el intervalo  $I$ . Esta solución es:

$$y(x) = \exp(-\int_{x_0}^x p(s)ds) \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(s) \exp(\int_{x_0}^s p(u)du) ds \right).$$

**Ejemplo 11** Resolvemos la ecuación lineal  $xy' + 2y = 4x^2$  para  $x \neq 0$ , aplicando la fórmula (1.16). Se tiene que la solución general está dada por la familia  $y = x^2 + \frac{c}{x^2}$  cuyas gráficas son las de la figura 10. Si se impone la condición  $y(1) = 0$ , estamos resolviendo un problema de Cauchy y la única curva solución es  $y = x^2 - \frac{1}{x^2}$  que está definida en  $(0, \infty)$  (es decir, es la curva de la familia solución para  $c = -1$ ).  $\square$



**Figura 10** Curvas integrales de la ecuación  $xy' + 2y = 4x^2$ .

Algunas ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones lineales sin más que hacer un cambio de variable son las ecuaciones de Bernoulli y Riccati. La *ecuación de Bernoulli* es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

para  $n \neq 0$  y  $n \neq 1$ . Estas ecuaciones se reducen a lineales multiplicándolas por  $y^{-n}$  y haciendo el cambio  $z = y^{-n+1}$ . La *ecuación de Riccati* es de la forma

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = h(x)$$

y, supuesto que se conoce una solución particular de ella,  $y_1(x)$ , se reduce a una de Bernoulli para  $n = 2$  mediante el cambio  $u = y - y_1$ .

En la sección 1.6 se darán diversos ejemplos de modelos matemáticos en los que intervienen las ecuaciones lineales.

### EJERCICIOS.

- Resolver las siguientes ecuaciones lineales: a).  $y' + xy = 2x$ , b).  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ , c).  $xy' + 2y = 4x^2$ , d).  $y' + y = \frac{1}{(1+\exp(x))}$ , e).  $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$ , f).  $xy' + y = x \sin x$ . Dibujar la familia de curvas integrales si se puede.
- Resolver las siguientes ecuaciones de Bernoulli y Riccati: a).  $y' = \frac{1}{3}(1 - 2x)y^4 - y$ , b).  $y' + y^2 = 1 + x^2$ , c).  $y' = y^4 \cos x + y \tan x$ ,



d).  $y' - (1 - 2x)y + y^2 = 2x$ , e).  $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$ , f).  $y' = \frac{2(\cos x)^2 - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}$ , g).  $y' = 2 \frac{\tan x}{\cos x} - y^2 \sin x$ , h).  $y' + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$ , i).  $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$ . Buscar las soluciones particulares de las ecuaciones de Riccati entre las funciones:  $y_p = 1, x, \frac{1}{x}, \sin x, \frac{1}{\cos x}$ .

3. Resolver las ecuaciones: a).  $y(x^2 + x) + x^2y' = 0$ , b).  $x \cos x = xy^2y' + y^3$ , c).  $y'(x \cos x - 1) = y^2 - y(x \sin x + \cos x) + \sin x$  d).  $y' = \frac{-y}{3x - xy - 2}$ , e).  $xy' + y = x^4y^3$ .

4. Integrar la ecuación diferencial:  $\sin(2x)y' = 2(y + \cos x)$ . Estudiar la existencia y unicidad de solución pasando por cada punto del dominio  $D = (0, \frac{\pi}{2}) \times \mathbf{R}$ , así como el intervalo de definición de ésta. ¿Cuál de éstas soluciones está acotada cuando  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ?

## 1.6. Modelos diferenciales.

En esta sección damos una serie de ejemplos sobre cómo la teoría de ecuaciones diferenciales de primer orden tiene aplicación en la explicación algunos fenómeno que ocurren en la naturaleza. Tal es por ejemplo, la caída libre de un cuerpo en la atmósfera, modelos de crecimiento de poblaciones, la descomposición de materia radioactiva y el paso de corriente a través de un circuito eléctrico. A lo largo de toda esta sección la variable independiente  $x$  se denota por  $t$  debido a que va a tener el significado físico del tiempo.

Un modelo matemático es un problema matemático que intenta explicar algún fenómeno que ocurre en la naturaleza. Cuando el problema se reduce a una o varias ecuaciones diferenciales se denomina *Modelo Diferencial*. Los modelos diferenciales pueden estar gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales o sistemas de ecuaciones.

El proceso a seguir para llegar a un modelo diferencial es el siguiente: Se observa un fenómeno real que se quiere explicar o hacer predicciones. Se reduce el problema a una serie de fórmulas matemáticas, esto es, *se formula el modelo matemático* que se resuelve si se puede. Los resultados obtenidos matemáticamente deben ser interpretados viendo cuál es su significado físico y contrastándolos con los obtenidos experimentalmente, es decir, *se valida el modelo*. Si la aproximación obtenida

es de nuestro agrado podemos usar el modelo para explicar, predecir, decidir o corregir lo que fuese necesario.

A la hora de reducir el modelo a ecuaciones matemáticas es conveniente conocer las leyes que rigen la rama de la ciencia en que nos movemos. Así por ejemplo en Mecánica las Leyes de Newton, en circuitos las Leyes de Kirchoff, en Elasticidad la Ley de Hooke. Si no se conocen dichas leyes, es necesario hacer una serie de hipótesis y suposiciones sobre la forma en que ocurre el proceso para pequeñas variaciones de parámetros o variables para después, mediante un paso al límite, obtener la ecuación diferencial. En la validación del modelo hay que tener en cuenta las hipótesis simplificadoras que se hicieron a la hora de formular dicho modelo. Cuantas más hipótesis se hayan hecho peor aproximará el modelo a la realidad, pero si se hacen pocas hipótesis corremos el riesgo de llegar a un modelo matemático que no sepamos resolver. En general no debemos esperar una mejor aproximación que aquella que las hipótesis simplificadoras nos permitan.

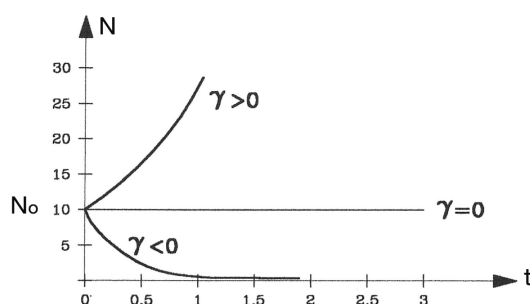
### 1.6.1. Crecimiento de poblaciones.

Por ejemplo, en el Siglo *XVIII*, en Estados Unidos se quería conocer el modo en que la población variaba para predecir posibles cambios. El economista inglés T. Malthus propone el siguiente modelo matemático: *Los nacimientos y las muertes, en un intervalo de tiempo pequeño, son proporcionales al tamaño de la población y al intervalo de tiempo.* Es decir,  $\text{nacimientos} = \alpha \Delta t N(t)$ ,  $\text{muertes} = \beta \Delta t N(t)$ , siendo  $N(t)$  el tamaño de la población en el tiempo  $t$ . La variación de la población en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $\Delta N(t) = \gamma N(t) \Delta t$  con  $\gamma = \alpha - \beta$ . Tomando límites cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  se tiene el modelo matemático:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N. \quad (1.18)$$

Resolviendo esta ecuación de variables separadas, junto con el hecho de que en el instante de tiempo en el que partimos ( $t = 0$ ) el tamaño de la población es  $N_0$ , obtenemos que la población en el instante  $t$  está dada por  $N(t) = N_0 \exp(\gamma t)$ . Observamos en la gráfica de la figura 11 que si  $\gamma$  es negativo la población va extinguiéndose, si  $\gamma = 0$ , la población se mantiene constante, y si es positivo, la población crece

exponencialmente. Los valores  $N_0$  y  $\gamma$  se calculan para cada población tomando dos medidas en dos instantes de tiempo distintos. Conviene observar, también, que un pequeño error en el recuento de los datos nos lleva a distintos valores de las constantes  $N_0$  ó  $\gamma$  que pueden ser significativos y cambiar considerablemente los resultados del modelo para tiempos grandes, es decir lejanos al instante en el que se cuenta la población (ver ejercicio 1).



**Figura 11** Crecimiento de la población  $N_0 \exp(\gamma t)$ .

Así, para la población en USA utilizamos la tabla 1 y obtenemos  $N(t) = 3,9 \times 10^6 \exp(0,307t)$ . En la tabla 2 se comparan los valores reales de la población de USA entre 1820 y 1930 con los obtenidos a través del modelo (1.18). Vemos cómo el modelo aproxima bien el crecimiento de la población durante unas décadas y después el modelo predice que la población va a crecer mucho más deprisa de lo que pasa en realidad. Así pues, el modelo propuesto por Malthus no aproxima bien al modelo real de crecimiento de esta población. Es necesario modificar las hipótesis si queremos obtener una mejor aproximación.

<b>Año</b>	<b>Población USA (<math>\times 10^6</math>)</b>
1790	3.9
1800	5.3
1810	7.2

**Figura 12** TABLA 1. Población real 1790 – 1810.

<b>AÑO</b>	<b>Población USA (x 10<sup>6</sup>)</b>	<b>Predicción del Valor (x 10<sup>6</sup>)</b>
1820	9.6	9.8
1830	12.9	13.3
1840	17.1	18.1
1850	23.2	24.6
1860	31.4	33.4
1870	38.6	45.5
1880	50.2	61.8
1890	62.9	84.0
1900	76.0	114.2
1910	92.0	155.2
1920	106.5	211.0
1930	123.2	286.8

**Figura 13** TABLA 2. Población 1820 – 1930. Modelo de Malthus.

En 1837 P.F. Verhulst propone unas modificaciones al modelo de Malthus: *la población no puede crecer ilimitadamente, sino que tiende a estabilizarse en un límite  $N_\infty$  y la variación de la población es proporcional a la población  $N$  y al factor  $(1 - \frac{N}{N_\infty})$* . Es decir, el modelo matemático es ahora:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) \quad (1.19)$$

y una simple integración nos da que el tamaño de la población es:

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 + (N_\infty - N_0) \exp(-\gamma t)}.$$

Para la población de USA, se calculan aproximadamente los valores tomados por Verhulst:  $N_0 = 3,9 \times 10^6$ ,  $N_\infty = 197 \times 10^6$  y  $\gamma = 0,3134$ . En la tabla 3 se comparan los resultados del censo con los que nos da el modelo de Verhulst (1.19). Vemos que la aproximación refleja bastante bien la realidad. En la actualidad, la población de USA supera ligeramente a la cantidad predicha por el modelo de Verhulst. "Posiblemente" sea necesario introducir algunos cambios en el modelo para poder predecir adecuadamente el tamaño de la población en tiempos

futuros. Un simple cálculo nos muestra que (1.19) no es un buen modelo para predecir el tamaño de la población en España durante el periodo 1860 – 1960.

La ecuación (1.18) es una ecuación de variables separadas utilizada con éxito para describir diversos fenómenos reales como crecimiento de determinadas poblaciones, desintegración de materia radioactiva y absorción de drogas en la sangre.

<b>AÑO</b>	<b>Población USA (x 10<sup>6</sup>)</b>	<b>Predicción del Valor (x 10<sup>6</sup>)</b>
1820	9.6	9.7
1830	12.9	13.0
1840	17.1	17.4
1850	23.2	23.0
1860	31.4	30.2
1870	38.6	39.1
1880	50.2	49.9
1890	62.9	62.4
1900	76.0	76.5
1910	92.0	91.5
1920	106.5	107.0
1930	123.2	121.9

Figura 14 TABLA 3. Población 1820 – 1930. Modelo de Verhulst.

### 1.6.2. Caída libre de cuerpos.

Si dejamos caer un cuerpo desde una altura  $H$ , el cuerpo se mueve siguiendo la segunda Ley de Newton: *fuerza = masa × aceleración*. Suponemos que la altura es suficientemente pequeña comparada con el radio de la tierra, de tal manera que el peso del cuerpo  $mg$  permanezca constante durante el descenso ( $m$  es la masa y  $g$  la constante de la Gravedad). Si lanzamos el cuerpo con una velocidad inicial  $v_0$ , y suponemos que no hay rozamiento, su velocidad  $v(t)$  en el instante  $t$  está dada por la ecuación:

$$mg = m \frac{dv}{dt}$$

$mg$  es la fuerza ejercida por la tierra sobre el cuerpo. Así,  $v(t) = v_0 + gt$ , mientras que la altura en cada tiempo  $t$  se obtiene mediante una simple

integración  $h(t) = H - v_0 t - g \frac{t^2}{2}$  ( $(H - h(t))' = v(t)$ ).

Con las suposiciones hechas anteriormente un cuerpo puede golpear a la tierra a una velocidad tan grande como queramos sin más que aumentar su altura y dejarlo caer. Sabemos que esto no pasa, y que hay otra fuerza que se opone al movimiento del cuerpo amortiguando por tanto la velocidad; dicha fuerza es la fuerza de rozamiento. Suponiendo que dicha fuerza es proporcional a su velocidad, se tiene la ecuación que modela la caída del cuerpo:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v(t).$$

Se trata de una ecuación lineal cuya solución está dada por:

$$v(t) = v_0 \exp(-at) + \frac{g}{a}(1 - \exp(-at)), \quad \text{con } a = \frac{\alpha}{m}.$$

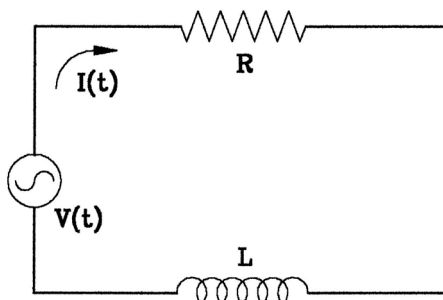
### 1.6.3. Paso de corriente eléctrica a través de circuitos.

La teoría de circuitos eléctricos se basa en las siguientes suposiciones:

- a). La fuerza electromotriz del generador  $V$  (medida en voltios) impulsa una carga eléctrica  $Q$  (medida en culombios) y produce una corriente  $I$  (medida en amperios). La corriente y la carga están relacionadas por  $I = \frac{dQ}{dt}$ .
- b). La resistencia  $R$  (medida en ohmios) se opone a la corriente disipando la energía en forma de calor. La caída de voltaje producida nos la da la Ley de Ohm:  $E_R = RI$ .
- c). La inductancia  $L$  (medida en henrios) produce una caída de voltaje dada por  $E_L = L \frac{dI}{dt}$ .
- d). Un condensador de capacidad  $C$  (medida en faradios) almacena una carga de manera que resiste al flujo de la carga produciendo una caída de voltaje  $E_C = \frac{Q}{C}$ .

- e). La caída de voltaje en un circuito sigue la ley de Kirchoff: *la suma de todas las caídas de voltaje a lo largo de un circuito cerrado es cero.*

Aplicamos estas suposiciones a la resolución del siguiente ejemplo: Se considera un circuito eléctrico que consiste de una resistencia  $R = 1$  ohmio conectada en serie a una bobina de autoinducción  $L = 0,5$  henrios. El circuito está alimentado por un generador que proporciona una fuerza electromotriz alterna  $V(t) = 1 \times \sin t$  (ver figura 15). Se pide calcular la intensidad de corriente que circula por el circuito, sabiendo que en el instante  $t = 0$  se ha medido una intensidad de 2 amperios.



**Figura 15** Circuito LR.

Para el circuito que hemos considerado, la ley de Kirchoff se expresa con la fórmula

$$E_R + E_L - V = 0.$$

Teniendo en cuenta las relaciones de b) y c), donde  $R$  y  $L$  pueden ser constantes o funciones del tiempo, se tiene la ecuación que modela la intensidad de la corriente en el circuito:

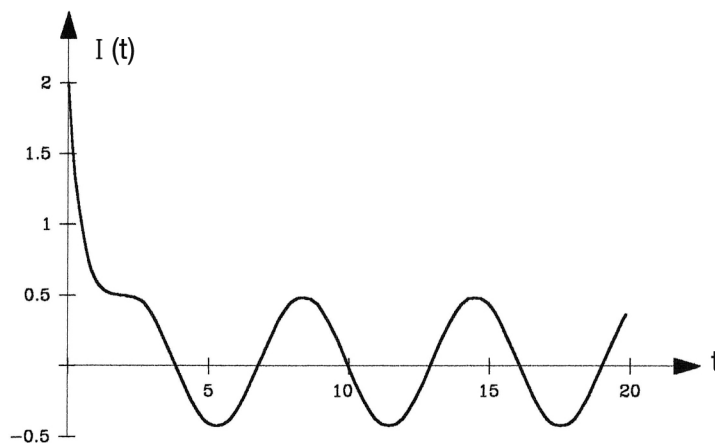
$$RI(t) + L \frac{dI}{dt} = V.$$

Se trata de una ecuación lineal no homogénea que se sabe resolver. Particularizando para los valores de las funciones  $R, L$  y  $V$  dados, y,

teniendo en cuenta que conocemos la intensidad en el instante  $t = 0$ , tendremos que resolver el problema de Cauchy:

$$0,5I'(t) + I(t) = \sin t, \quad I(0) = 2$$

Encontramos inmediatamente que la intensidad de corriente en el circuito está dada por la función  $I(t) = \frac{12}{5} \exp(-2t) + \frac{2}{5}(2 \sin t - \cos t)$ . Observamos, pues, (ver figura 16) que la intensidad de la corriente para  $t$  grande ( $t \rightarrow \infty$ ) se va atenuando rápidamente para dar lugar a un comportamiento sinusoidal que se mantiene indefinidamente.



**Figura 16** Gráfica de  $I(t)$ .

### EJERCICIOS.

1. Suponiendo que el modelo de Malthus nos da una buena aproximación del crecimiento de la población, determinar el error que se comete, para tiempos grandes, si se ha cometido un error al contar la población de USA en el año 1800, de tal manera que la población contada es de  $5,25 \times 10^6$  individuos en lugar de  $5,3 \times 10^6$ .
2. Un cultivo de bacterias de población  $x$  crece a un ritmo proporcional a  $x$ . Entre las 6 y las 7 de la tarde la población se triplica. ¿A qué hora será cien veces mayor a la que había a las 6?



3. La desintegración de la materia radioactiva es proporcional a la cantidad de materia que se tiene. Si la desintegración del 50 % de la materia radioactiva se produce en 30 días, ¿en cuánto tiempo se quedará un 1 % de la cantidad inicial?
4. Se supone que la resistencia del aire, que actúa sobre un cuerpo en caída de masa  $m$ , ejerce una fuerza retardadora proporcional al cuadrado de la velocidad. Si se lanza un cuerpo, desde una altura  $H$ , con velocidad inicial nula, calcular la velocidad con la que llegará al suelo.
5. En el interior de la tierra, la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia al centro. Si se perfora un orificio que atraviesa la tierra de polo a polo, y se deja caer una piedra por el orificio, ¿con qué velocidad llegará al centro?
6. Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 Km/h. en el momento en que se agota el combustible. Si el agua se opone a su movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad  $y$ , y si en 1 Km. de recorrido se reduce su velocidad a 30 Km/h, ¿a qué distancia se detendrá?
7. El ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura existente entre él y el medio que le rodea. Se calienta el cuerpo a  $110^{\circ}C$ , y se expone al aire libre a una temperatura de  $10^{\circ}C$ , que se mantiene constante. Al cabo de una hora su temperatura es de  $60^{\circ}C$ . ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que se enfríe a  $30^{\circ}C$ ?
8. Comenzó a nevar una mañana y la nieve siguió cayendo con la misma intensidad durante todo el día. Al mediodía una máquina quitanieves empezó a limpiar una carretera a ritmo constante en términos de volumen quitado cada hora. La máquina limpió 2 Kms. para las dos de la tarde y 1 Km. más para las 4 de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?
9. Una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de  $\frac{1}{4}$  cm. tiene, a la vuelta de un mes, uno de  $\frac{1}{8}$  cm.. Suponiendo que la

evaporación es proporcional a la superficie, ¿cuántos meses tardará en desaparecer por completo?

10. Un columna cónica de sección circular cuyo material tiene una densidad constante  $a$  soporta una carga  $L$ . Teniendo en cuenta que las áreas de las secciones transversales son proporcionales a la carga que soportan, y si el radio de la parte superior de la columna es  $r_0$ , encontrar el radio  $r(x)$  a una distancia  $x$  por debajo de la parte superior.
11. Un depósito contiene  $100\text{ l.}$  de agua pura. A partir de un tiempo,  $t = 0$ , se introduce salmuera conteniendo  $1\text{ gr.}$  de sal por litro, a razón de  $1\text{ l/m.}$ . La mezcla, que se mantiene uniforme revolviéndola adecuadamente, sale del depósito a razón de  $1\text{ l/m.}$ . ¿Cuándo habrá  $50\text{ gr.}$  de sal disuelta en el agua?
12. Una cuenta se encuentra situada en el punto más elevado de un círculo, en un plano vertical. Se une ese punto con otro punto inferior del círculo mediante un alambre recto. Si la cuenta desciende por el alambre sin fricción, probar que llegará al círculo en el mismo tiempo  $T$ , sea cual sea la posición del punto inferior.
13. Una clepsidra (antiguo reloj de agua) es un cuenco que deja salir el agua por un pequeño orificio hecho en el fondo. Encontrar la forma que debe tener el reloj para que el nivel de agua disminuya a velocidad constante. (De acuerdo con la *ley de Torricelli*, el agua saldrá de un depósito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el orificio.)

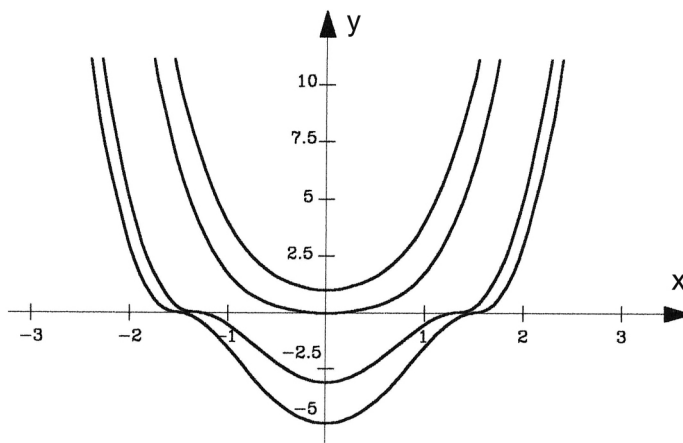
## 1.7. El problema de Cauchy.

A lo largo de las secciones anteriores hemos resuelto algunas ecuaciones diferenciales escritas en forma normal: entre otras, las ecuaciones de variables separadas, las diferenciales exactas, las lineales y cualquiera que se reduzca a una de estos tipos. Sin embargo, muy a menudo, nos aparecen ecuaciones diferenciales que no sabemos resolver,

es decir, encontrar su familia de curvas integrales. Es interesante poder decir algo de ellas, como que existe solución, que ésta es única y encontrar una aproximación de éstas. Comenzamos esta sección examinando mediante un ejemplo, que es ilustrativo, cuándo podemos garantizar que una ecuación admite solución única pasando por un punto.

**Ejemplo 12** La ecuación  $y' = 4x\sqrt{|y|}$  es de variables separadas y la familia de curvas integrales está dada por  $y = (x^2 + c)^2$  si  $x^2 + c > 0$  y por  $y = -(x^2 + c)^2$  si  $x^2 + c \leq 0$  (ver figura 17). Observamos que por cada punto  $(x_0, y_0)$ , con  $y_0 \neq 0$  pasa una sola solución de la ecuación definida en algún intervalo  $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ , mientras que por puntos  $(x_0, 0)$  pasan muchas soluciones: por ejemplo,  $y_1(x) = 0$  e  $y_2(x) = -(x^2 - x_0^2)^2$  si  $|x| \leq |x_0|$ ,  $y_2(x) = (x^2 - x_0^2)^2$  si  $|x| \geq |x_0|$ , son dos de ellas.

Observando la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$ , con  $f(x, y) = 4x\sqrt{|y|}$ , nos damos cuenta que  $f$  es una función continua en  $\mathbf{R}^2$ , y su derivada parcial con respecto a  $y$  es continua en  $\mathbf{R}^2 - \{(x, 0)/x \in \mathbf{R}\}$ . El siguiente teorema nos aclara que esta situación *puede ser general* para otras ecuaciones.  $\square$



**Figura 17** Curvas integrales de la ecuación  $y' = 4x\sqrt{|y|}$ .

**Teorema 3** Sea  $D$  el rectángulo abierto  $D = \{(x, y)/a < x < b, c < y < d\}$  y la función  $f, f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , continua en  $D$  y con derivada parcial con respecto a  $y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , continua en  $D$ . Entonces,  $\forall (x_0, y_0) \in D$ ,

existe un intervalo,  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ , en el cual la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.20)$$

existe y es única.

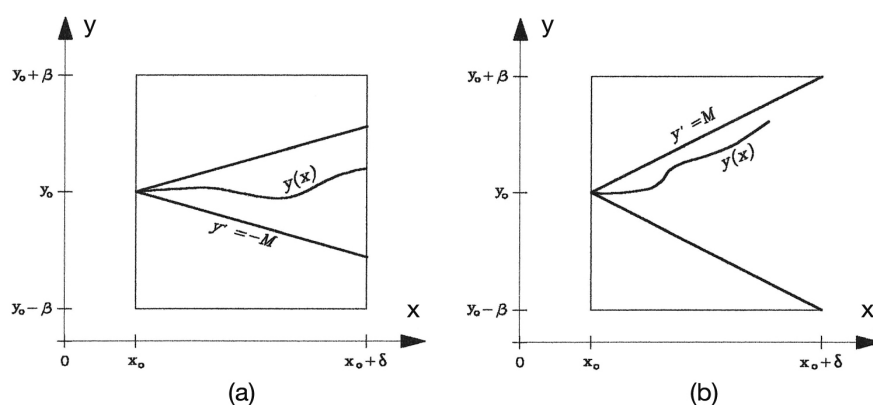


Figura 18 En (a):  $\delta = \alpha$ . En (b):  $\delta = \frac{\beta}{M}$ .

La demostración del teorema 3 puede encontrarse en [5] y [22], por ejemplo. Evidentemente,  $D$  puede ser cualquier dominio abierto de  $\mathbf{R}^2$ . Una primera estimación del valor  $\delta$  puede obtenerse:  $\delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$ , donde  $\alpha, \beta$  son tales que el rectángulo  $D_1 = \{(x, y) / |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\} \subset D$ , y,  $M = \max_{(x,y) \in D_1} |f(x, y)|$ . El teorema sólo nos dice que existe un valor  $\delta$  tal que en  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  la solución es única y su gráfica está contenida en  $D$  (ver figura 18). Fuera de este intervalo podría no haber solución o no ser única, pero por razones obvias la solución se puede prolongar y seguirá siendo única siempre que su gráfica esté contenida en  $D$ . En este sentido, el resultado en la siguiente observación es un poco más completo.

**Observación 1** Sean  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuas en el dominio  $D$ , abierto conexo de  $\mathbf{R}^2$ , y  $(x_0, y_0) \in D$ , existe una y sólo una solución  $y = \varphi(x)$  de (1.20) en  $(\omega^-, \omega^+)$  verificando:  $(x, \varphi(x)) \in D$ ,  $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ ,  $\forall x \in (\omega^-, \omega^+)$ ,  $\varphi(x_0) = y_0$ , y además, ó bien  $|x| + |\varphi(x)| \rightarrow \infty$ , o bien  $(x, \varphi(x))$  se aproxima la frontera de  $D$  cuando  $x \rightarrow \omega^-$  (y  $x \rightarrow \omega^+$ ).

El resultado enunciado en la observación 1 constituye un verdadero teorema y su demostración puede verse en [36]. En ocasiones la búsqueda del intervalo máximo ( $\omega^\pm$ ) donde la solución está definida y es única no es una cuestión fácil tal y como podemos ver en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 13** Las curvas integrales de la ecuación de Riccati  $y' = x^2 + y^2$  fueron bosquejadas en el ejemplo 4. Estudiamos aquí la existencia y unicidad de solución de dicha ecuación pasando por  $(0, 1)$ , así como el intervalo de definición de ésta. Primero observamos que la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , así como su derivada  $f_y = 2y$ , son funciones continuas en  $\mathbf{R}^2$ , por tanto, el teorema 3 nos garantiza que existe una única solución de la ecuación, verificando  $y(0) = 1$ , definida en  $(-\delta, \delta)$ , para algún  $\delta > 0$ . Ahora, probamos que el valor  $\omega^+$  de la observación 1 es un número que verifica  $\frac{\pi}{4} \leq \omega^+ \leq 1$ . Para ello consideramos las soluciones de los tres problemas de Cauchy:

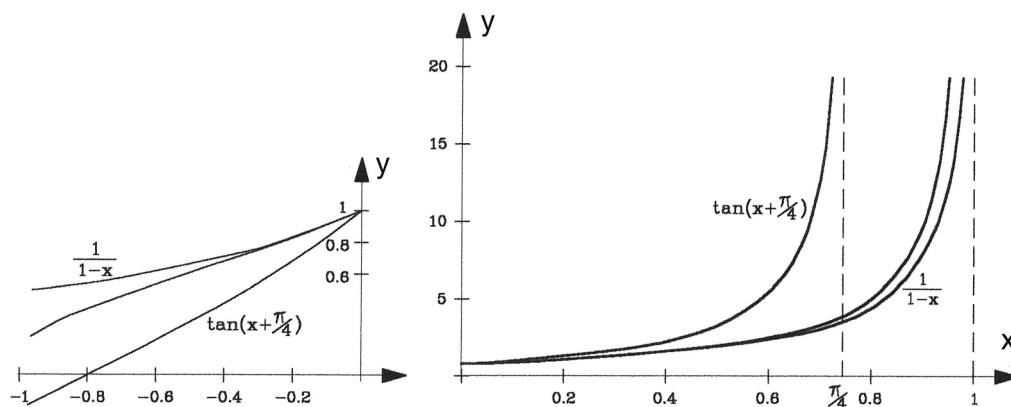
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Las tres soluciones pasan por el punto  $(0, 1)$  con pendientes 1, 1, 2 respectivamente. Como en un entorno de  $x = 0$  se verifica  $y^2 < x^2 + y^2 < 1 + y^2$ , la solución del segundo problema aquí considerado,  $\varphi(x)$ , se mantiene entre la del primero y tercero para  $x < 1$ , y no corta a ninguna de estas otras soluciones (ver figura 19). La solución del primer problema es  $y = \frac{1}{1-x}$ , estando, por tanto, definida en  $(-\infty, 1)$ . La solución del tercer problema es  $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$  definida en  $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ . Así pues deducimos que  $\frac{\pi}{4} \leq \omega^+ \leq 1$ .

Dado que no conocemos la solución  $\varphi(x)$ , numéricamente observamos (ver ejercicio 10) que, la solución del problema de Cauchy dado, crece considerablemente para valores mayores que 0,9, esto hace pensar que  $0,9 < \omega^+ \leq 1$ . Aún se podría afinar un poco más sobre este valor. Vemos, pues, que los métodos cualitativos y numéricos pueden ser complementarios.  $\square$



**Figura 19** Gráfica de la solución del problema  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 1$

Supuesto que se verifican las condiciones del teorema 3, y supuesto que  $f$  es "muy regular", cabe esperar que la solución  $\varphi(x)$  de (1.20) sea "muy regular", y nos podemos plantear, utilizar su desarrollo en serie de Taylor para calcularla a través de las derivadas de la función  $f$ :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Por ejemplo, si  $f$  admite derivadas parciales segundas continuas en  $D$ , tenemos garantizado que la solución admite al menos derivada tercera continua en  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , y,

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{\varphi'''(\zeta)}{3!}(x - x_0)^3,$$

para algún  $\zeta$  comprendido entre  $x_0$  y  $x$ . Estos tres primeros términos del desarrollo pueden ser una buena aproximación de la solución en  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  dependiendo de la acotación de  $\varphi'''(\zeta)$  en función de las derivadas de  $f$ , y del valor  $\delta$  (ver ejercicios 6, 19 y 18, y 3 - 5 de la sección 2.6).

Una cuestión interesante, que no queda reflejada en el enunciado del teorema 3, es la cuestión relativa al buen planteamiento del problema

(1.20). El problema de Cauchy se dice que es un *problema bien planteado* cuando existe solución, es única, y a pequeñas variaciones de los datos  $(f, (x_0, y_0))$ , se obtienen pequeñas variaciones de la solución. La noción de problema bien planteado es muy importante en ingeniería, dado que, la mayoría de los datos que se tienen provienen de una medida y esto, ya, involucra un error, haciéndose por tanto necesario saber en qué medida afecta este error a la solución del problema. No seremos rigurosos enunciando resultados, pero si mencionamos que bajo las condiciones del teorema 3 la solución depende continuamente de los datos del problema, esto es, a "pequeñas" variaciones de los datos se tienen "pequeñas" variaciones de la solución, siempre teniendo en cuenta que estas variaciones dependen del intervalo en el que se está considerando la solución: a medida que nos alejamos del punto  $x_0$  el error será mayor (ver ejercicio 13 y ejercicio 1 de la sección 1.6).

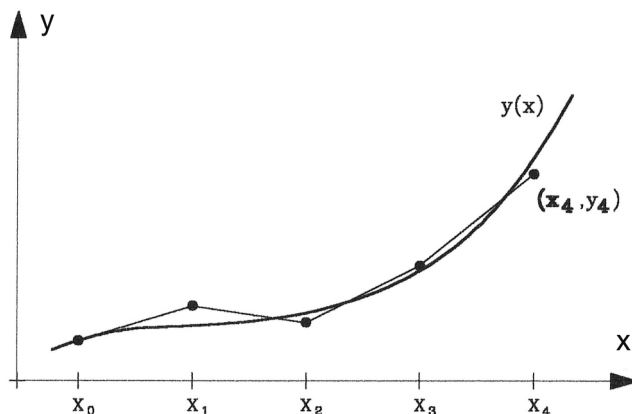
**Observación 2** Otra nota interesante a observar es que el teorema 3 y el resultado en la observación 1 nos dan condiciones suficientes para que la solución exista y sea única. Aunque las hipótesis de ambos resultados no se verificaran la tesis podría seguir siendo cierta (ver ejercicio 20). Por ejemplo, los resultados son ciertos si  $f$  es continua en  $D$  y *lipschitziana* con respecto a  $y$ , esto es, existe una constante  $L$  tal que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

(ver [1], [15] y [36] por ejemplo, para ejercicios y para un estudio más detallado).

### 1.7.1. Aproximación numérica de la solución.

Dado que, en general, no es posible conocer explícitamente la solución del problema de Cauchy (1.20), aún cuando sepamos que existe y es única, es conveniente poder construir una aproximación de ésta, así como saber en qué medida la función construida aproxima a la solución verdadera de nuestro problema. Un método sencillo, que nos permite construir una aproximación de la solución, es el *método de las poligonales* o *método de Euler*.



**Figura 20** Método de las poligonales.

Tratamos de construir una aproximación de la solución  $y = \varphi(x)$  de (1.20) que no conocemos. Lo que se conoce es la recta tangente a  $\varphi(x)$  en  $(x_0, y_0)$ , cuya pendiente es  $f(x_0, y_0) = \varphi'(x_0)$ . Para  $h$  muy pequeño, parece lógico pensar que una buena aproximación de la solución está dada en  $[x_0, x_0 + h]$  por la recta tangente  $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$  (ver figura 20). Denominando  $x_1 = x_0 + h$ , de nuevo en  $[x_1, x_1 + h]$  una aproximación de la solución estará dada por la recta tangente  $y = \varphi(x_1) + f(x_1, \varphi(x_1))(x - x_1)$ . Ahora no conocemos  $\varphi(x_1)$ , pero una aproximación suya es  $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ . De esta manera, postulamos que una buena aproximación de la solución en  $[x_1, x_1 + h]$  está dada por  $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$ . Así podemos continuar el proceso y construir una aproximación de  $\varphi(x)$  en un intervalo  $[x_0, x_0 + \delta]$ .

Construimos así una aproximación de la solución de (1.20) en el intervalo  $[x_0, x_0 + \delta]$  para el tamaño del paso  $h$  de la siguiente manera:

$$\text{Dados } (x_0, y_0), N = \frac{\delta}{h}, \text{ se calcula recursivamente} \\ x_i = x_0 + ih, y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), i = 1, 2, \dots, N.$$

La aproximación de la solución en  $[x_{i-1}, x_i]$  es

$$\varphi_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

El conjunto  $\{y_i\}_{i=0}^N$  se denomina *solución numérica*.



$x_i$	$y_i$	$\varphi(x_i)$	$f(x_i, y_i)$	$E_i = \varphi(x_i) - y_i$
0	1	1	2.5	0
0.1	1.25	1.271403	2.9	2.140272E-02
0.2	1.54	1.591825	3.38	5.182469E-02
0.3	1.878	1.972119	3.956	9.411871E-02
0.4	2.2736	2.425541	4.6472	0.1519408

Figura 21 TABLA 4.  $h=0.1$ .

**Ejemplo 14** La solución del problema

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2} - x + 2y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

es  $\varphi(x) = \exp(2x) + \frac{1}{2}x$  y está definida en  $(-\infty, \infty)$ . Mediante un simple algoritmo calculamos la aproximación numérica de la solución en  $[0, 0.4]$  para los pasos  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$ . Los resultados, así como *el error*, esto es la diferencia entre dichas aproximaciones y la solución ( $\varphi - \varphi_h$ ), quedan reflejados en las tablas 4 y 5 respectivamente (en ambas se ha utilizado simple precisión).

$x_i$	$y_i$	$\varphi(x_i)$	$f(x_i, y_i)$	$E_i = \varphi(x_i) - y_i$
0	1	1	2.5	0
0.05	1.125	1.130171	2.7	5.170942E-03
0.1	1.26	1.271403	2.92	1.140273E-02
0.15	1.406	1.424859	3.162	1.885879E-02
0.2	1.5641	1.591825	3.4282	2.772462E-02
0.25	1.73551	1.773721	3.72102	3.821123E-02
0.3	1.921561	1.972119	4.043122	5.055774E-02
0.35	2.123717	2.188753	4.397434	6.503582E-02
0.4	2.343589	2.425541	4.787178	8.195233E-02

Figura 22 TABLA 5.  $h=0.05$ .

Observamos que a medida que disminuye el paso  $h$  el error disminuye. En este caso, evidentemente, hemos podido calcular el error porque conocemos explícitamente la solución del problema. En general, esto no va a poder hacerse, pero se puede demostrar que este error no supera a  $Ch$ , donde  $C$  es una constante que depende de los datos del problema  $x_0, y_0$  y  $f$ . Construimos aquí la aproximación de la solución para el paso  $h = 0,1$ . Dados  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ , calculamos  $x_i = 0,1 \times i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Mediante la fórmula  $y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2} - x_i + 2y_i)h$ , calculamos recursivamente los valores aproximados de la solución en  $x_{i+1}$ , para  $i = 0, 1, 2, 3$  respectivamente:

$$y_1 = 1,25, y_2 = 1,54, y_3 = 1,878, y_4 = 2,2736$$

La aproximación de la solución que nos da el método de Euler es:

$$\varphi_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 + 2,5(x - 0) & \text{si } x \in [0, 0,1] \\ 1,25 + 2,9(x - 0,1) & \text{si } x \in [0,1, 0,2] \\ 1,54 + 3,38(x - 0,2) & \text{si } x \in [0,2, 0,3] \\ 1,878 + 3,956(x - 0,3) & \text{si } x \in [0,3, 0,4] \end{cases}$$

□

Nos damos cuenta de que la aproximación numérica de  $\varphi$  en  $x$  cambia con el paso  $h$ , pero parece lógico pensar que a medida que  $h$  se hace más pequeño más cerca estamos de  $\varphi(x)$ . Se dice que las soluciones aproximadas convergen en  $x$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0.$$

Es decir: cuando el tamaño del paso  $h$  tiende a cero, las aproximaciones tienden al valor exacto  $\varphi(x)$ . El siguiente resultado (ver [22] y [27], por ejemplo, para su demostración) nos garantiza que el método de Euler nos proporciona una buena aproximación de la solución cuando  $h \rightarrow 0$ .

**Proposición 1** *Con las notaciones anteriores, si  $f$  es continua y acotada y sus derivadas parciales primeras son continuas en  $[a, b] \times \mathbf{R}$ . Entonces,  $\forall x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in \mathbf{R}$  se tiene:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \subset [a, b].$$

No entraremos en detalles sobre los errores que se cometen al tomar  $y_i$  por el valor exacto de la solución  $\varphi(x_i)$ , pero si mencionamos que hay dos tipos de errores: el error del método y el error de redondeo. Observamos que en la iteración  $i$ , el método de Euler nos da un valor  $y_i$  aproximado de la solución  $\varphi(x_i)$ , mientras que el ordenador nos da el valor  $\tilde{y}_i$ . El error que tendremos es:

$$E_i = \varphi(x_i) - \tilde{y}_i = \varphi(x_i) - y_i + y_i - \tilde{y}_i. \quad (1.21)$$

La segunda diferencia  $y_i - \tilde{y}_i$  es el *error de redondeo* que evidentemente depende del ordenador que estamos utilizando (ver ejercicios 11-13 para hacerse una idea de cómo influyen los errores de redondeo sobre la solución encontrada). La diferencia  $\varphi(x_i) - y_i$ , en la fórmula (1.21), es el *error del método*, que diremos *de orden  $p$*  si este error, en valor absoluto, no supera nunca a una constante por  $h^p$ . Observamos que en la primera iteración (i.e. para calcular  $y_1$ ) partimos del valor exacto de  $\varphi(x_0)$ . El error que se comete en la iteración  $i$  supuesto que  $y_{i-1}$  es exacto ( $y_{i-1} = \varphi(x_{i-1})$ ) se denomina *error local de truncamiento*. Evidentemente, este error, en general, sólo le tendremos en el primer paso, para calcular el error que se comete al hallar  $y_2$  hay que tener en cuenta el que se cometió para calcular  $y_1$ , y así sucesivamente. La suma de todos los errores locales que se cometen se denomina *error global* y lo denotamos por  $e_N$ .

El método de Euler es de orden 1, y el error depende de la amplitud ( $2\delta$ ) del intervalo en el que estamos haciendo la aproximación y de la función  $f$ . Más concretamente escribimos sin demostración (ver [5], por ejemplo, para su demostración):

$$|e_N| \leq \frac{Ch}{2L}(e^{\delta L} - 1)$$

donde  $C = \max_{(x,y) \in D_1} |f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}|$ ,  $L = \max_{(x,y) \in D_1} |\frac{\partial f}{\partial y}|$ , siendo  $D_1$  el rectángulo cerrado en el que  $f$  y sus derivadas parciales primeras son continuas,  $\delta = \min \{ \alpha, \frac{\beta}{M} \}$  (ver figura 18). El error total  $E_N$  (ver (1.21)) se obtiene sumando a  $e_N$  el error de redondeo.

A raíz de la fórmula para el error, se puede pensar que, si se disminuye el paso  $h$  suficientemente, vamos a obtener una aproximación tan buena como queramos. Esto, en general, no es así, dado que al disminuir

el paso aumentan los errores de redondeo y se puede demostrar que hay un  $h^*$  tal que si  $h < h^*$ , los errores de redondeo superan a los del método. Una buena idea para obtener mejores aproximaciones con menor coste es considerar el paso  $h$  variable en cada iteración, es decir, considerar que los puntos  $x_i$  no están igualmente espaciados. Hacer variar el paso en cada iteración puede ser conveniente e incluso obligatorio a la hora de resolver ecuaciones cuyas soluciones varían muy rápidamente en intervalos muy pequeños (ver ejemplo 13), de manera que se ahorren cálculos cuando la solución varía lentamente (paso  $h$  más largo), y se tenga idea del comportamiento singular de la solución.

Observamos que la fórmula  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$  se puede obtener fácilmente sin más que reemplazar en la ecuación integral (ver (1.8)),

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds.$$

$f(s, \varphi(s))$  por su valor aproximado  $f(x_i, y_i)$ . Una forma sencilla de mejorar la aproximación que nos da el método de Euler, es considerar en cada paso una mejor aproximación de la integral  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds$ . Nosotros no consideramos aquí estos casos, pero sí debemos observar que un método un poco más complicado que el de Euler, pero de los más utilizados por su precisión y simplicidad, es el método de Runge-Kutta de orden 4 (ver ejercicios 10, 16 y 21). Para otros métodos numéricos y para algunos problemas que pueden surgir utilizando estos métodos recomendamos ver los interesantes ejemplos de [3] y [5] (ver también ejercicios 17, 18 y 21).

### EJERCICIOS.

1. Utilizar el resultado enunciado en la observación 1 para demostrar que si  $p$  y  $q$  son funciones continuas en  $(a, b)$ , el problema de Cauchy (1.17) admite una única solución definida en  $(a, b)$  (ver teorema 2).
2. Resolver el problema de valor inicial:

$$y' = \frac{3x^2}{3y^2 - 4}, \quad y(1) = 0$$

determinando el intervalo en el que la solución es válida.

3. Resolver la ecuación  $y^2\sqrt{1-x^2}y' = \arcsin(x)$  en  $(-1, 1)$ . Encontrar la solución verificando  $y(0) = 1$  así como el intervalo de definición de ésta.
4. Demostrar que resolver el problema de Cauchy (1.20) es equivalente a resolver la ecuación integral (1.8).
5. Se considera la sucesión de funciones:  $\phi_0(x) = y_0$ ,  $\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_0(s)) ds$ ,  $\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_{n-1}(s)) ds$  para  $n \geq 1$ , que se demuestra "aproximan" bajo ciertas hipótesis sobre  $f$  a la solución de (1.8) cuando  $n \rightarrow \infty$ . Las funciones  $\phi_n$  se denominan las *iteradas de Picard*. Demostrar que para los problemas de Cauchy

$$y' = x \exp(-x^2), \quad y(0) = 0 \quad \text{y}$$

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

las iteradas de Picard nos proporcionan las sumas parciales del desarrollo en serie de Taylor de la solución exacta.

6. Comprobar que las iteradas de Picard no nos proporcionan mucha información sobre la solución del problema

$$y' = \exp(-x^2), \quad y(0) = 0.$$

Comparar con la solución aproximada que nos proporciona el método de Euler, así como con la aproximación que nos proporcionan los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución.

7. Estudiar la existencia, unicidad de solución e intervalo de definición de ésta de los siguientes problemas de Cauchy

$$a). \begin{cases} y' = 2|y|^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} y' = 2|y|^{\frac{1}{2}} \\ y(2) = 3, \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} y' = \sin(y^3 - 1) \exp(-x^2) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

$$d). \begin{cases} y' &= (y-1)^{\frac{1}{3}} \\ y(x_0) &= y_0, \forall (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

$$e). \begin{cases} y' &= \sin(x^2 - 1) + \exp(-y^2) \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

8. Encontrar el valor numérico de la solución en  $[0, 1]$  del problema e). del ejercicio 7, para los pasos  $h = 0,1$  y  $h = 0,05$ . Comparar los resultados obtenidos para los distintos pasos en los puntos  $x_i = 0,1 \times i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Construir la aproximación  $\varphi_h(x)$  de la solución en el intervalo  $[0, 0,5]$  para  $h = 0,1$ .

9. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} yy' &= x \exp(-y^2) \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

a). Resolver la ecuación diferencial. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema dado, así como el intervalo de definición de ésta.

b). Usando el método de Euler calcular el valor aproximado de la solución en los puntos del intervalo  $x_i = i \times h \in [-0,3, 0,3]$ ,  $i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , para los pasos  $h = 0,1$ ,  $h = 0,05$ . Comparar estos valores con los valores exactos de la solución en esos puntos.

10. Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= x^2 + y^2 \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

a). Encontrar, mediante el método de Euler, los valores aproximados de la solución en los puntos  $x = i \times h$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  para los valores del paso  $h = 0,1$  y  $h = 0,05$

b). Intentar encontrar la aproximación numérica de la solución para los pasos  $h = 0,1$ ,  $h = 0,05$ , en el intervalo  $[0, 1]$ . ¿Qué se observa cerca del punto  $x = 1$ ?. Encontrar el tamaño del paso tal que  $|\varphi_h(0,9) - 14,3| \leq 0,05$ .

- c). Utilizando como valor inicial el valor aproximado de la solución en  $x = 0,9$ , obtenido en el apartado anterior (puede, por ejemplo, tomarse el valor  $y(0,9) \approx 14,27$ , obtenido mediante el método de Runge-Kutta para el paso  $h = 0,05$ ), aplicar el método de Euler para los pasos  $h = 0,01$  y  $h = 0,005$ , para intentar aproximar la solución del problema dado, en el intervalo  $[0,9, 1]$ . Utilizando los resultados obtenidos, dar un valor aproximado de  $\omega^+$  (ver ejemplo 13).
11. Usando el paso  $h = 0,05$  y el método de Euler, pero reteniendo sólo 2 decimales en cada valor aproximado de la solución, determinar los valores aproximados de la solución del problema de Cauchy del ejemplo 14. Debido a los errores de redondeo, ¿qué se observa con respecto a las aproximaciones calculadas para el mismo paso  $h$ ?
12. Para hacerse idea de cómo los errores de redondeo pueden afectar a los cálculos numéricos, evaluar el determinante:

$$1000 \times \begin{vmatrix} 6,010 & 2,004 \\ 18,04 & 6,000 \end{vmatrix}$$

tomando sólo el primer decimal de cada número. Lo mismo tomando los dos primeros decimales y luego los tres.

13. Considerar el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x + y - 3 \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

cuya solución exacta es  $\varphi(x) = 2 - x$  en  $(-\infty, \infty)$ . Tomar como condición inicial  $y(0) = 2,001$  y calcular la solución exacta  $\varphi_1(x)$ . Comparar los valores de  $\varphi(x)$  y  $\varphi_1(x)$  para  $x = 1$ , para  $x = \log 10^6$ , y en general para  $x \rightarrow \infty$ . ¿Qué se puede decir, en general, sobre el buen planteamiento de un problema de Cauchy?

14. Estudiar la existencia y unicidad de solución de los siguientes problemas:

$$\begin{cases} y' = \exp(x)y^2 - 2y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= y + \exp(-y) + 2x \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= \exp(-y)x + \frac{x}{(x^2+1)} \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Encontrar el valor aproximado de la solución en  $x = 0,1$  y  $x = 1$  para los pasos  $h = 0,1$ ,  $h = 0,05$ ,  $h = 0,01$ .

15. La ecuación  $y' = 2|y|^{\frac{1}{2}}$  admite al menos las soluciones  $y = 0$  e  $y = x|x|$  soluciones pasando por  $(0,0)$  definidas en  $(-\infty, \infty)$ . Comprobar que con el método de Euler sólo encontramos una aproximación de la primera para cualquier paso  $h$ .
16. ¿Qué se puede decir sobre la unicidad de solución del problema

$$\begin{cases} y' &= y|y|^{-3/4} + x \sin \frac{\pi}{x} \\ y(0) &= 0 \end{cases} ?.$$

Aplicar el método de Euler para encontrar la aproximación de la solución en  $[0, 0,2]$ : Encontrar dos valores del tamaño del paso  $h$ , tal que la solución numérica en  $x = 0,2$  sea positiva y dos valores de  $h$  tales que sea negativa. ¿A qué se debe este resultado?. Aplicar el método de Runge-Kutta para aproximar numéricamente la solución en  $[0, 1]$  para los valores de los pasos  $h = \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{27}$ , respectivamente. Hacer una gráfica de la solución. ¿Qué se observa?.

17. El método de Euler mejorado, para aproximar la solución de (1.20), consiste en calcular  $y_{i+1}$  por el método de Euler y mejorar luego este valor substituyéndole por el que se obtiene aproximando la integral  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds$  por el valor medio:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Dicho método es de orden 2. Comparar los resultados obtenidos utilizando este método para los pasos  $h = 0,1$ ,  $h = 0,05$  con los de las tablas 4 y 5 respectivamente.



18. El método de Taylor de orden  $n$  para la aproximación numérica de la solución de (1.20) consiste en utilizar en cada iteración los  $n + 1$  primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución en  $x_i$ . Esto es, para  $n = 2$ :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i))h^2.$$

Utilizar los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor para encontrar una aproximación de la solución del problema de Cauchy del ejercicio 9 en los puntos  $x_i$ . ¿Se podría razonar cuál es el orden de este método?. ¿Qué ventajas e inconvenientes se encuentran con respecto al método de Euler?. Hacer lo mismo en el ejercicio 17.

19. Estudiar la existencia y unicidad de solución pasando por cada punto del plano de la ecuación  $y' = \sqrt{|1 - x^2 - y^2|}$ . Utilizar los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución, para hacer una gráfica aproximada de la solución que pasa por  $(0, 0)$ , en el intervalo  $(-1, 1)$ .
20. Sea  $f(x, y)$  una función continua en  $\mathbf{R}^2$  tal que,  $f(x, y) < 0$  si  $xy > 0$ , y,  $f(x, y) > 0$  si  $xy < 0$ . Demostrar que existe una única solución de  $y' = f(x, y)$  verificando  $y(0) = 0$ .
21. El método de Runge-Kutta, para aproximar la solución de (1.20), consiste en calcular  $y_{i+1}$  mediante la fórmula:

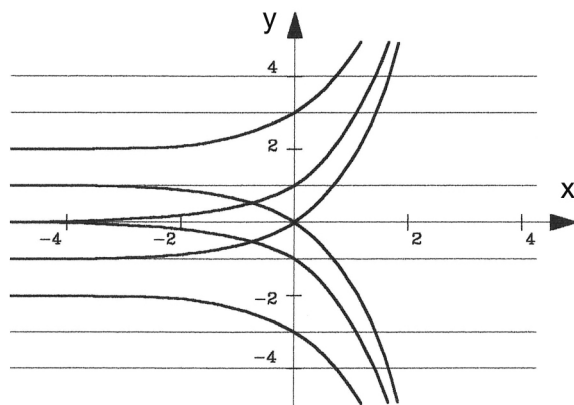
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$$

donde

$$L_{i,1} = f(x_i, y_i), \quad L_{i,2} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,1}\right),$$

$$L_{i,3} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,2}\right), \quad L_{i,4} = f(x_i + h, y_i + hL_{i,3}).$$

Dicho método es de orden 4, y la fórmula  $\frac{1}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$  puede ser interpretada como una "pendiente media". Comparar los resultados obtenidos utilizando este método para los pasos  $h = 0,1$ ,  $h = 0,05$  con los de las tablas 4 y 5 respectivamente.



**Figura 23** Curvas integrales de la ecuación  $y^3 - y' \exp(2x) = 0$ .

## 1.8. Ecuaciones no resueltas en $y'$ .

En las secciones anteriores se han resuelto y dado métodos de aproximación de soluciones de ecuaciones escritas en forma normal  $y' = f(x, y)$ . Algo común a estas soluciones es que en cada punto del plano definen una sola dirección. Esto no tiene por que ser cierto para ecuaciones más generales  $F(x, y, y') = 0$ . Así ocurre en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 15** La ecuación  $y'^3 = y' \exp(2x)$  define en cada punto del plano  $(x, y)$  tres direcciones:  $y' = 0$ ,  $y' = \exp(x)$ ,  $y' = -\exp(x)$ . Las familias de soluciones están dadas por  $y = c_1$ ,  $y = \exp(x) + c_2$ ,  $y = -\exp(x) + c_3$  ( $c_i$  constantes), cuyas gráficas son las de la figura 23. Observamos que por cada punto del plano pasan tres soluciones de la ecuación, una por cada dirección.  $\square$

Lo más normal es que por cada punto  $(x, y)$  pasen tantas soluciones como valores de  $p_i$  verifican  $F(x, y, p_i) = 0$ , dado que cada uno de estos puede ser un valor posible para la derivada de la solución. Los puntos  $(x, y)$  en los que en cualquier entorno hay más soluciones pasando por ellos que valores de  $p_i$ , tales que  $F(x, y, p_i) = 0$ , se denominan *puntos singulares*. Así, por ejemplo, los puntos  $x = 0$  son puntos singulares

de la ecuación  $y'^3 - y'x^2y^2 = 0$  (ver ejercicio 1). Una curva solución formada por puntos singulares se denomina *solución singular*. Un caso particular, y el único que tratamos aquí a modo ilustrativo, es la envolvente de una familia uniparamétrica de soluciones (ver [13] y [14]) para un estudio más detallado de otro tipo de curvas singulares).

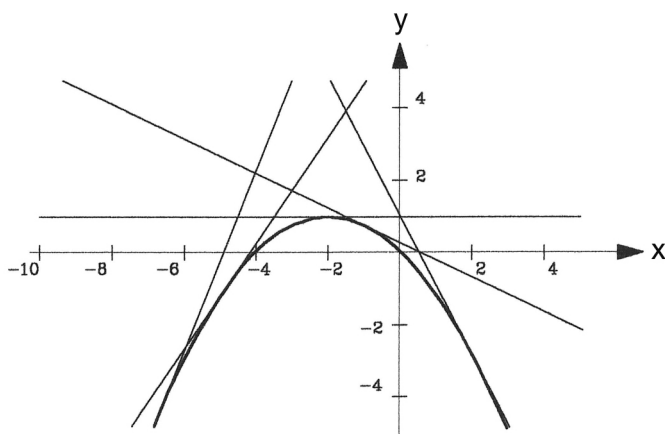
Tal como se definió en el ejercicio 3, sección 1.3, una curva  $\gamma$  es *curva envolvente* de una familia  $\phi(x, y, c) = 0$  de soluciones de  $F(x, y, y') = 0$  cuando en cada punto de  $\gamma$  hay una curva de la familia tangente a ella mientras que en cada trozo de curva hay infinitas curvas de la familia tangentes a  $\gamma$ . La envolvente de la familia, si existe, hay que buscarla en el llamado *c-discriminante*, esto es, entre las curvas obtenidas al eliminar  $c$  en las ecuaciones

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial c}(x, y, c) = 0. \quad (1.22)$$

Curvas envolventes aparecen al resolver las *ecuaciones de Clairaut*:  $y = xy' + g(y')$  con  $g(y') \not\equiv my' + n$ . Haciendo el cambio  $y' = p$  en la ecuación, se deriva implícitamente con respecto a  $x$  y se obtiene:  $(x + g'(p))\frac{dp}{dx} = 0$ . Es decir, ó  $\frac{dp}{dx} = 0$  ó  $(x + g'(p)) = 0$ . Integrando  $\frac{dp}{dx} = 0$ , se tiene  $p = c$ , y substituyendo en la ecuación diferencial se obtiene que  $y = xc + g(c)$  es una familia uniparamétrica de rectas solución. La candidata a envolvente de esta familia se obtiene eliminando  $c$  entre  $y = xc + g(c)$  y  $x + g'(c) = 0$  (esto es lo mismo que eliminar  $p = y'$  entre  $y = xp + g(p)$  y  $x + g'(p) = 0$  y este conjunto de puntos es el *p-discriminante*). En este caso, se tiene asegurado que esta curva es efectivamente la curva envolvente de la familia de rectas. Nosotros lo comprobamos en el siguiente ejemplo. Observamos que en el caso en que no sepamos eliminar  $c$  entre  $y = xc + g(c)$  y  $x + g'(c) = 0$ , estas dos ecuaciones definen también la curva envolvente en paramétricas.

**Ejemplo 16** Resolvemos la ecuación de Clairaut  $y = xy' + (y' + 1)^2$ . Despejando  $y'$  se demuestra que la ecuación define dos direcciones en los puntos situados por encima de la parábola  $y = -\frac{x^2}{4} - x$ , una en los puntos de esta curva y ninguna por debajo de ella (ver figura 24). La familia de rectas solución está dada por  $y = xc + (c + 1)^2$ . Despejando  $c$ , observamos que por los puntos situados encima de la parábola pasan dos rectas (dos valores de  $c$  distintos) de la familia, una recta (un solo

valor de  $c$ ) por los puntos de la parábola y ninguno por los puntos de debajo (ningun valor real de  $c$ ). Se comprueba fácilmente que la recta que corta a la parábola es tangente a ella. La curva envolvente es precisamente esta parábola:  $y = -\frac{x^2}{4} - x$ , y se obtiene eliminando  $c$  entre  $y = xc + (c + 1)^2$  y  $x + 2(c + 1) = 0$ , tal como se deduce de las relaciones (1.22).  $\square$



**Figura 24** Curvas integrales de la ecuación  $y = xy' + (y' + 1)^2$ .

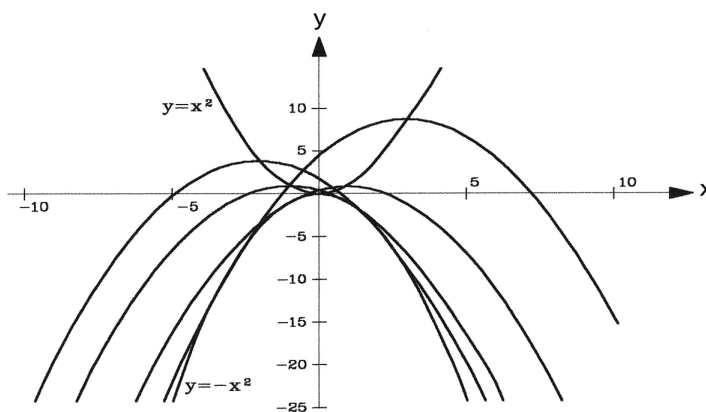
Otro ejemplo de ecuaciones *no resueltas en la primera derivada* (i.e. la  $y'$  no aparece despejada) son las *ecuaciones de Lagrange*. Tienen la forma:  $y = f(y')x + g(y')$  con  $f(y') \not\equiv y'$ .

Las ecuaciones de Clairaut y Lagrange son un tipo particular de *ecuaciones resolubles en  $y$* . Esto es de la forma  $y = f(x, y')$ . Todas ellas se resuelven haciendo el cambio  $y' = p$  en la ecuación:  $y = f(x, p)$ . Derivando implícitamente con respecto a  $x$ , se llega a una ecuación diferencial, siendo ahora  $p = p(x)$  la variable dependiente:  $p = f_x + f_p \frac{dp}{dx}$ . Se resuelve si se puede, y la familia de curvas integrales de ésta  $\phi(x, p, c) = 0$  junto con la ecuación diferencial  $y = f(x, p)$  definen paramétricamente una familia de curvas integrales de la ecuación  $y = f(x, y')$ . En el caso en que se pueda eliminar  $p$  entre las ecuaciones  $\phi(x, p, c) = 0$ ,  $y = f(x, p)$  se obtiene la familia de curvas integrales en forma implícita (o explícita).

**Ejemplo 17** La ecuación  $y = x^2 + 2xy' + \frac{y'^2}{2}$  es una ecuación resoluble en  $y$ . Se procede como acabamos de decir, en el párrafo anterior, para

obtener la ecuación  $p'(2x + p) = -(2x + p)$  (con  $p = y'$ ). Supuesto que  $p + 2x \neq 0$ ,  $p' = -1$  e integrando  $x = -p + c$ . Ahora eliminando  $p$  entre las ecuaciones  $x = -p + c$  e  $y = x^2 + 2xp + \frac{p^2}{2}$  nos da la familia de curvas integrales de la ecuación:  $y = -\frac{x^2}{2} + xc + \frac{c^2}{2}$ . Se deduce fácilmente que las curvas de la familia encontrada son parábolas con el vértice en la parábola  $y = x^2$ . Concretamente, para  $c = c_0$ , la parábola  $y = -\frac{x^2}{2} + xc_0 + \frac{c_0^2}{2}$  tiene vértice en  $(c_0, c_0^2)$  y es tangente a la parábola  $y = -x^2$  en el punto  $(-c_0, -c_0^2)$ . Se comprueba fácilmente que  $y = -x^2$  es una curva envolvente de la familia de parábolas. La figura 25 nos da idea de la situación de las curvas integrales, notando que en los puntos situados debajo de la parábola  $y = -x^2$  la ecuación diferencial no define ninguna dirección.  $\square$

El proceso anterior es válido para las ecuaciones de Lagrange, y la única particularidad es que la ecuación diferencial en  $p, x$  es una ecuación lineal con función incógnita  $x(p)$ :  $p = f(p) + (f'(p)x + g'(p))\frac{dp}{dx}$ . En el caso en que  $f(p) - p = 0$  tenga alguna raíz  $p = p_i$ , la recta  $y = xp_i + g(p_i)$  es también una solución de la ecuación diferencial que no tiene por qué ser singular.



**Figura 25** Curvas integrales de la ecuación  $y = x^2 + 2xy' + \frac{y'^2}{2}$ .

**Ejemplo 18** Consideramos la ecuación de Lagrange  $y = 2xy' - y'^2$ . Haciendo  $y' = p$ , derivando con respecto a  $x$  se tiene  $-p = (2x - 2p)\frac{dp}{dx}$ , de donde dividiendo por  $p$  y  $\frac{dp}{dx}$ , se llega a la ecuación lineal  $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2$ .

Integrando esta ecuación  $x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}$ . Así la familia de curvas integrales de la ecuación está dada por las ecuaciones en paramétricas:

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}, \quad y = 2xp - p^2$$

es decir

$$x = \frac{2}{3}p + \frac{c}{p^2}, \quad y = \frac{1}{3}p^2 + \frac{2c}{p}$$

(ver ejercicio 3). Evidentemente, en los cálculos realizados  $p \neq 0$ . Sin embargo, identificando términos  $f(p) = 2p$  y  $g(p) = -p^2$ ,  $f(p) - p = 0$  tiene por raíz  $p = 0$ . Observamos que  $y = f(0)x + g(0) = 0$  es también una solución de la ecuación.  $\square$

Las ecuaciones resolubles en  $x$  son de la forma  $x = f(y, y')$ . Su resolución es totalmente análoga a las resolubles en  $y$ , con la particularidad de que la  $y$  juega ahora el papel de variable independiente. Hacemos  $y' = p$  en la ecuación y derivamos con respecto a  $y$ :  $\frac{1}{p} = f_y + f_p \frac{dp}{dy}$ . Resolviendo esta última ecuación, su familia de curvas integrales  $\phi(p, y, c) = 0$  junto con  $x = f(y, p)$  nos definen la solución en paramétricas de la ecuación  $x = f(y, y')$ .

### EJERCICIOS.

1. Resolver las siguientes ecuaciones dibujando las curvas integrales:  
 $y^3 - y'x^2y^2 = 0$ ,  $y'^2 + (x+1)y' + x = 0$ ,  $y'^2 - (x+y)y' + xy = 0$
2. Resolver las siguientes ecuaciones dibujando las curvas integrales, así como posibles envolventes o curvas solución singulares:  $x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3$ ,  $x = y - \log y'$ ,  $y = xy' + y'^2$ ,  $(xy' + y)^2 = x^2y'$ .
3. Comprobar que la familia de curvas hallada en el ejemplo 18 es efectivamente la solución paramétrica de la ecuación de Lagrange  $y = 2xy' - y'^2$ . Demostrar que por cada punto  $(x_0, y_0)$  no pasa ninguna curva de la familia si  $x_0^2 < y_0$ , pasa una sola curva si  $x_0^2 = y_0$  y pasan dos curvas si  $x_0^2 > y_0$ . Dicha curva se obtiene eliminando  $p$  entre la ecuación  $y = 2xp - p^2$  y la derivada parcial de esta ecuación con respecto a  $p$ ,  $0 = 2x - 2p$  ( $p$ -discriminante) y, sin embargo, no es una curva envolvente de la familia solución.

4. Resolver las ecuaciones de Clairaut  $y = xy' + \frac{1}{y'}$ ,  $(xy' - y)^2 = 1 + y'^2$ ,  $y = xy' + (y' - 1)^3$ .
5. A raíz de los resultados de la sección 1.7, razonar si hay algún motivo por el cual la curva envolvente está contenida en el  $p$ -discriminante de la ecuación. ¿Y en el  $c$ -discriminante de la familia solución?
6. Deducir la ecuación diferencial que deben satisfacer las curvas tales que sus tangentes forman con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $2a^2$ . Resolver la ecuación y encontrar las curvas que satisfacen la condición anterior.
7. Resolver las siguientes ecuaciones: a).  $y^2y'^2 + 3xy' - y = 0$ , b).  $3x^4y'^2 - xy' - y = 0$ , c).  $y'^2 - 4y^3 = 0$ , d).  $y = 2xy' - y'^3$ , e).  $(2y')^3 = 27y$ , f).  $y = x(1 + y') + y'^2$ , g).  $y = 2xy' + \sin y'$ .

### Referencias Bibliográficas

Es extensa la bibliografía que se puede recomendar para consultar y profundizar en tópicos relacionados con este capítulo. Citemos, por ejemplo, los libros [3], [19] y [31] como libros de consulta para todo el capítulo en los cuales se pueden encontrar numerosos problemas. Libros clásicos con multitud de problemas planteados y resueltos son [2], [20], [21]. Otros libros muy interesantes, relacionados con algunas de las secciones, son los siguientes: [13], [26] y [27] para las secciones 1.3 y 1.8; [5], [6], [9] y [36] para la sección 1.6; [1], [14], [15] y [36] para la sección 1.7; [3], [5], [11], [17] y [22], para la sección 1.7.1

## Capítulo 2

# Ecuaciones diferenciales de orden $n$ , $n > 1$ .

### 2.1. Introducción.

Se vió, en el capítulo anterior, que las ecuaciones diferenciales de primer orden son expresiones matemáticas en las que se relaciona una función  $y(x)$  y su derivada primera con otras funciones conocidas de la variable independiente  $x$ . Cuando en esta expresión aparece también la derivada segunda  $y''(x)$ , se dice que la ecuación es de segundo orden.

En este capítulo nos ocupamos fundamentalmente de las ecuaciones lineales de segundo orden. La teoría para éstas se generaliza en la sección 2.4 a las ecuaciones lineales de orden  $n$ . La sección 2.5 nos da idea de algunos problemas de la Física y la Técnica donde intervienen ecuaciones de este tipo. En la sección 2.2 un simple ejemplo nos pone de manifiesto la importancia de las ecuaciones lineales para aproximar, en determinados casos, a las no lineales. Las ecuaciones no lineales aparecen a menudo en problemas que modelan fenómenos de la naturaleza, sin embargo, la dificultad general de abordar estas ecuaciones hace que las excluyamos aquí. Serán consideradas en el capítulo 4, en el contexto del estudio cualitativo de las soluciones de *sistemas autónomos*. En la sección 2.3 se resuelven, principalmente, ecuaciones lineales de coeficientes constantes, así como ecuaciones que se pueden reducir de orden. Para coeficientes no constantes la sección 2.6 intenta ser ilustrativa en



el tipo de técnicas a seguir: buscar las soluciones en forma de series de potencias. Finalmente en la sección 2.7 introducimos la transformada de Laplace y las propiedades de ésta que nos permiten aplicarla para la resolución de las ecuaciones diferenciales. Debemos destacar la importancia de usar la transformada de Laplace cuando en los problemas aparecen por ejemplo cargas puntuales o fuerzas instantáneas.

## 2.2. Primeras definiciones y ejemplos.

Una ecuación diferencial de segundo orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con sus derivadas primera y segunda. Es decir, una expresión del tipo:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2.1)$$

donde  $F$  es una función dependiente de cuatro variables definida en un dominio  $D \subset \mathbf{R}^4$ ,  $y = y(x)$  es la *función incógnita*,  $y'(x), y''(x)$  sus derivadas primera y segunda respectivamente y  $x$  es la *variable independiente*.

Una función  $y = \varphi(x)$  se dice que es una *solución* de la ecuación (2.1) en un intervalo  $(\alpha, \beta)$  cuando  $\varphi$  es continua, admite derivadas primera y segunda en  $(\alpha, \beta)$ ,  $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \in D$ , y,

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

**Ejemplo 19** Integrando dos veces en la ecuación  $y'' = x$  obtenemos familia de soluciones que depende de dos parámetros  $y = \frac{x^3}{6} + Cx + D$ . Particularizamos el valor de  $C$  y  $D$  imponiendo a las soluciones, por ejemplo,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . La única solución que satisface estas condiciones iniciales es  $y = \frac{x^3}{6} + x$  está definida en  $(-\infty, \infty)$ .  $\square$

En general, al integrar una ecuación de segundo orden se obtiene una familia biparamétrica de curvas integrales  $\phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ , que denominaremos solución general. Una solución particular se obtiene para valores fijos de  $c_1$  y  $c_2$ . La ecuación se dice que está escrita en *forma normal* cuando tenemos  $y'' = f(x, y, y')$ . Como para las ecuaciones de primer orden no todas las ecuaciones se pueden escribir en forma normal.

La teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden se reduce como se verá más adelante a la de ecuaciones de primer orden cuyas incógnitas son pares de funciones, esto es, a sistemas de primer orden con dos incógnitas: Haciendo  $y' = z$  en la ecuación  $y'' = f(x, y, y')$  se tiene el *sistema diferencial de primer orden con dos ecuaciones*:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z). \end{cases} \quad (2.2)$$

La forma más general de un sistema de primer orden escrito en forma normal es

$$\begin{cases} y' = r(x, y, z) \\ z' = s(x, y, z), \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $r$  y  $s$  funciones definidas en algún dominio de  $\mathbf{R}^3$ , y  $y(x), z(x)$  son las funciones incógnitas. Bajo "condiciones de regularidad" de  $r$  y  $s$  se puede asegurar que existe una única solución del sistema definido en algún intervalo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  verificando unas *condiciones iniciales*:  $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$ , para  $x_0, y_0, z_0$  convenientemente elegidos. Más adelante, enunciamos de forma precisa este resultado para ecuaciones de segundo orden (ver teorema 4 para ecuaciones, teorema 10 del capítulo 3 para sistemas). A continuación esbozamos sin ningún tipo de comentario (se pueden añadir los ya hechos para las ecuaciones de primer orden) el método de Euler para aproximar numéricamente la solución de un sistema de dos ecuaciones y como consecuencia de una ecuación de segundo orden.

Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = r(x, y, z) & , & z' = s(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0 & , & z(x_0) = z_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

la aproximación numérica, para el tamaño del paso  $h$ , de la solución  $(y(x), z(x))$  en  $x_i = x_0 + i \times h$  está dada por:

$$y_i = y_{i-1} + hr(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), \quad z_i = z_{i-1} + hs(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}),$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ .

También en este caso es posible definir el campo de direcciones asociado al sistema 2.4, bien entendido que se trata de un campo de

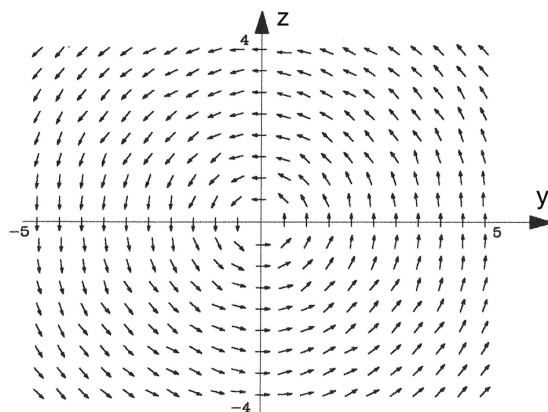
vectores en dimensión 3 con las dificultades adicionales que esto lleva consigo. Cuando la ecuación (ó sistema) es *autónoma*, es decir, en ella no aparece una dependencia explícita de la variable independiente, el problema se puede simplificar dibujando el campo de direcciones de las *trayectorias*, como nos muestra el siguiente ejemplo (ver capítulo 4 para más detalles).

**Ejemplo 20** La ecuación diferencial de segundo orden  $y'' + y = 0$  tiene por familia de soluciones  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ . El sistema asociado es:

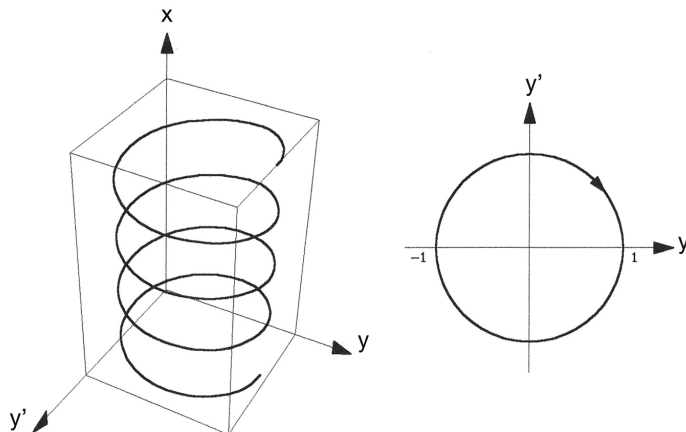
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y, \end{cases}$$

donde  $y' = z$ . Una solución de este sistema es  $y = \cos x, z = -\sin x$ , y , se representa en el espacio  $xyz$  mediante una hélice, mientras que la trayectoria es la curva del plano  $yz$  cuya ecuación paramétrica es  $(\cos x, -\sin x), x \in \mathbf{R}$  , es decir, la gráfica es una circunferencia (ver figura 27).

La ecuación diferencial de las trayectorias de la ecuación  $y'' + y = 0$  es  $\frac{dz}{dy} = \frac{-y}{z}$ . El campo de direcciones de esta ecuación es el de la figura 26, donde es fácil deducir que las trayectorias son circunferencias.  $\square$



**Figura 26** Campo de direcciones de las trayectorias de la ecuación  $y'' + y = 0$ .



**Figura 27** Gráficas de una solución y la correspondiente trayectoria del sistema asociado a  $y'' + y = 0$ .

Dada una función  $f$  definida en un cubo u otro dominio abierto  $D$  de  $\mathbf{R}^3$ , y un punto cualquiera  $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$ . El problema de valor inicial o de Cauchy consiste en encontrar una solución de  $y'' = f(x, y, y')$ , verificando  $y(x_0) = y_0^1$ ,  $y'(x_0) = y_0^2$ , esto es, del problema:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0^1, \quad y'(x_0) = y_0^2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Una función  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  es una solución de (2.5) en  $(a, b)$  si  $\varphi$  es continua y dos veces derivable en  $(a, b)$ ,  $\forall x \in (a, b)$  se verifica  $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$  y  $\varphi''(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x))$  y, además,  $\varphi(x_0) = y_0^1$ , y  $\varphi'(x_0) = y_0^2$ .

El siguiente teorema nos asegura bajo qué condiciones podemos esperar encontrar una solución única de (2.5). La demostración del teorema 4 puede considerarse como un caso particular de la del teorema 10 del capítulo 3 (ver [14], por ejemplo, para la demostración).

**Teorema 4** Sea  $D$  el cubo  $D = \{(x, y, z) / a < x < b, c < y < d, e < z < f\}$  y la función  $f$ ,  $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , continua en  $D$  y con derivadas  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  continuas en  $D$ . Entonces,  $\forall (x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$ , existe un intervalo,  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ , en el cual la solución del problema de Cauchy (2.5) existe y es única.

La ecuación (2.1) se dice lineal cuando tiene la forma  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ . Estas ecuaciones van a ser el objeto de estudio de los siguientes apartados. Las ecuaciones no lineales, en general, son difíciles de resolver. En algunos casos, como los que se reflejan en los ejemplos siguientes, se pueden reducir fácilmente a una ecuación de primer orden mediante un cambio de variable (por ejemplo si  $y'' = f(x, y')$  se hace  $y' = u$ ) o multiplicando la ecuación por alguna función convenientemente elegida (ver [13], por ejemplo, para otros métodos).

**Ejemplo 21** En la ecuación no lineal  $y'' = 2y^3$ , la función  $f(x, y, y') = 2y^3$  es regular en  $\mathbf{R}^3$ . Por tanto, existe una única solución del problema de Cauchy:

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Para buscarla, multiplicamos la ecuación por  $y'$  y se observa que tenemos:  $(\frac{y'^2}{2})' = (\frac{y^4}{2})'$ . Integrando esta ecuación e imponiendo las condiciones iniciales  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ , se tiene:  $\frac{y'^2}{2} = \frac{y^4}{2}$ . Es decir,  $y' = \pm y^2$ . Integrando de nuevo, e imponiendo la condición inicial  $y(0) = 1$ , se tienen dos soluciones  $y = \frac{1}{1 \pm x}$ . Evidentemente, a raíz del teorema 4, sólo una es solución del problema de Cauchy considerado. Un simple cálculo nos demuestra que la función  $y = \frac{1}{1+x}$  no verifica  $y'(0) = 1$ , mientras que  $y = \frac{1}{1-x}$  satisface todas las ecuaciones del problema. Así pues  $y = \frac{1}{1-x}$  es la solución del problema en  $(-\infty, 1)$ .  $\square$

**Ejemplo 22** Un péndulo simple consta de una masa  $m$  suspendida por un cable de longitud  $l$  y masa despreciable (ver figura 28). Suponiendo que el cable se mantiene recto y la masa queda libre de oscilar en un plano vertical, en ausencia de amortiguación, las leyes de Newton nos permiten deducir que la ecuación que modela los desplazamientos del péndulo es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \tag{2.6}$$

donde  $\theta(t)$  es el ángulo que forma el péndulo con la vertical. El péndulo empezará a oscilar si por ejemplo le desplazamos de su posición de equilibrio y le soltamos ( $\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$ ) u otras situaciones similares pasan en el instante  $t=0$ , o bien si está sometido a una fuerza externa  $p(t)$  (en este caso la ecuación que modela el desplazamiento está dada por  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = p(t)$ ).

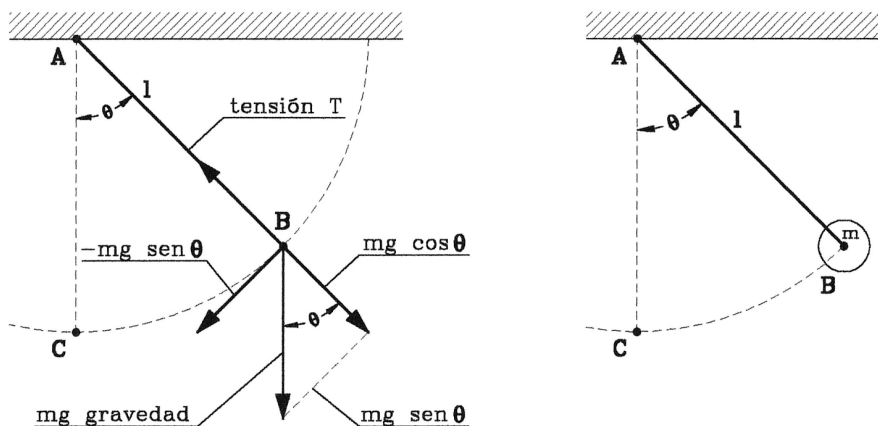


Figura 28 Movimiento de un péndulo simple .

La ecuación (2.6) se puede resolver de manera análoga a como se hizo en el ejemplo 21: Se multiplica la ecuación por  $\theta'$  y se integra obteniéndose:  $\frac{\pm\theta'}{\sqrt{2\frac{g}{l}\cos\theta+k}} = 1$ . De nuevo, integrando se tiene la solución en forma implícita:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{l}\cos\theta+k}} d\theta = \pm t + c,$$

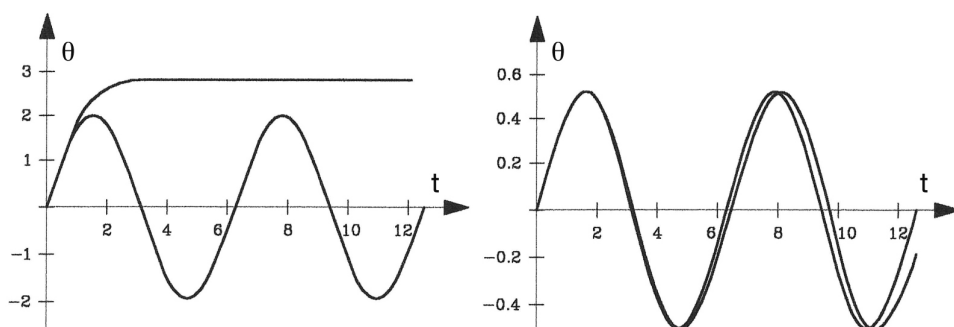
que no nos proporciona demasiada información sobre la posición del péndulo en el instante  $t$ . Así pues esta forma de resolver la ecuación diferencial no nos sirve para estudiar el comportamiento del péndulo. Aplicando el método de Euler para sistemas podemos tener una aproximación numérica de la solución para determinados datos iniciales  $\theta(0) = y_0^1$ ,  $\theta'(0) = y_0^2$ . Otro método que se suele emplear a menudo es linealizar la ecuación, es decir, substituir la ecuación (2.6) por una lineal.

En este caso observamos que para valores de  $\theta$  pequeños,  $\sin\theta \approx \theta$ . Utilizando esta aproximación tenemos la ecuación:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (2.7)$$

La solución general de (2.7) es  $\theta(t) = A \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + B \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t$ . Esta solución nos permite calcular una aproximación del periodo de oscilación:

$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . La primera gráfica de la figura 29 nos muestra la diferencia entre la solución de la ecuación (2.7) y la solución numérica de (2.6) para valores iniciales  $(y_0^1, y_0^2) = (0, 2)$ , mientras que la segunda gráfica nos muestra la misma diferencia para valores  $(y_0^1, y_0^2) = (0, 0,5)$ . Se ha tomado  $\frac{g}{l} = 1$ . Observamos el parecido de ambas soluciones para valores de  $\theta$  cercanos a  $\theta = 0$ .



**Figura 29** Gráficas de soluciones de  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0$  y  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0$ .

Si se quiere aproximar la ecuación del péndulo por una lineal para valores de  $\theta$  cercanos a  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  por ejemplo, deberemos cambiar la aproximación hecha,

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots,$$

por el desarrollo en serie de Taylor de la función seno en torno al punto  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\sin\theta = 1 - \frac{(\theta - \frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(\theta - \frac{\pi}{2})^4}{4!} + \dots.$$

La ecuación linealizada es en este caso:

$$\theta'' + 1 = 0.$$

De esta manera la ecuación linealizada nos proporciona una buena aproximación de la ecuación siempre que estemos "cerca" del punto  $\theta = y_0^1$  del que nos estemos moviendo (en un entorno del cual se hace

la aproximación del término no lineal de la ecuación). Como se verá en el capítulo 4, la idea de substituir una ecuación por otra "próxima" a ella que sea lineal, es una de las más importantes de cara al estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones. Su empleo justifica el estudio detallado de las ecuaciones lineales.  $\square$

## 2.3. Ecuaciones lineales de segundo orden.

Una *ecuación lineal homogénea* es una ecuación de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2.8)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones reales definidas en un intervalo  $(a, b)$  y que supondremos continuas en dicho intervalo. Los extremos del intervalo  $(a, b)$  pueden ser  $\pm\infty$ . En el caso de tener la ecuación de la forma  $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$  con  $a_i$  funciones definidas en  $(a, b)$  se supondrá  $a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ . Cuando los coeficientes  $a_i(x)$  son funciones constantes se dice que se trata de una *ecuación lineal con coeficientes constantes*. Como en el caso de ecuaciones de primer orden, una propiedad fundamental de estas ecuaciones es la de la linealidad del conjunto de las soluciones: cualquier combinación lineal de soluciones sigue siendo solución. El estudio de esta sección es totalmente análogo al de la sección 1.5 del capítulo 1.

La *ecuación lineal no homogénea* tiene la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (2.9)$$

donde  $r$  es otra función real definida en  $(a, b)$ . Al igual que para las ecuaciones de primer orden la solución general de (2.9) es de la forma:

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_p(x), \quad (2.10)$$

donde  $y_{GH}(x)$  es la solución general de (2.8) e  $y_p(x)$  es una solución particular de (2.9).

Así pues, en adelante estudiamos cómo encontrar la solución de la ecuación homogénea y veremos también cómo conociendo ésta podemos calcular la particular de la no homogénea. Para ello necesitamos, primero, un resultado de existencia y unicidad de solución análogo al teorema



2 del capítulo 1, que podría considerarse como un caso particular de resultados del tipo del enunciado en el teorema 4.

**Teorema 5** Sean  $p, q, r$  funciones reales continuas en  $(a, b)$ . Sea  $x_0 \in (a, b)$  e  $y_0^1, y_0^2 \in \mathbf{R}$ . Entonces existe una única solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0^1, \quad y'(x_0) = y_0^2, \end{cases} \quad (2.11)$$

definida en todo el intervalo  $(a, b)$ .

**Ejemplo 23** El problema de Cauchy

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

admite solución única definida en  $(-1, 1)$ , dado que los coeficientes  $p = \frac{-2x}{1-x^2}$ ,  $q = \frac{3}{1-x^2}$  presentan una discontinuidad en  $x = \pm 1$  y  $x_0 = 0 \in (-1, 1)$ .  $\square$

### 2.3.1. Ecuación lineal homogénea.

Exponemos a continuación una serie de propiedades que verifican las soluciones de la ecuación (2.8) y que nos llevarán a deducir la forma de la solución general de dicha ecuación. A lo largo de toda la sección supondremos que  $p$  y  $q$  son funciones continuas en el intervalo  $I = (a, b)$ . Las demostraciones de estas propiedades, todas ellas proposiciones o teoremas, es sencilla y puede encontrarse en cualquiera de los libros de la bibliografía recomendada [3], [19] y [31]. Antes de pasar a enunciar dichas propiedades damos una definición que será útil en lo que sigue.

Se dice que dos funciones  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  son *linealmente independientes* en el intervalo  $I$  cuando se verifica:

$$\text{Si } \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Se dice que las funciones son *linealmente dependientes* cuando no son linealmente independientes.

Supuesto que las funciones  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  son continuas y derivables en  $I$  se define la función *Wronskiano* de  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  en el punto  $x$  como:

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

### Propiedades de la ecuación lineal homogénea

1. Si  $y_1(x), y_2(x)$  son soluciones de (2.8) en  $I$  entonces cualquier combinación lineal de ellas  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$  es también solución de (2.8) en  $I$  ( $\alpha_1, \alpha_2$  son constantes cualesquiera).
2. Dos soluciones  $y_1(x), y_2(x)$  de (2.8), son linealmente independientes en  $I$  si y sólo si  $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0, \forall x_0 \in I$ .
3. Dadas dos soluciones  $y_1(x), y_2(x)$  de (2.8) linealmente independientes en  $I$ , cualquier otra solución  $y(x)$  se escribe de la forma:

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x), \forall x \in I,$$

para algunas constantes  $\alpha_1, \alpha_2$ . Se dice que  $\{y_1, y_2\}$  forman un *conjunto* o *sistema fundamental de soluciones de (2.8) en I*.

4. Sean  $y_1(x), y_2(x)$  dos soluciones de (2.8) en  $I$ , entonces

$$W[y_1, y_2](x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^x p(s) ds\right), \forall x \in I,$$

siendo  $C$  una constante que depende de  $y_1$  e  $y_2$  pero no de  $x$ . Esta fórmula es conocida como *identidad de Abel*.

5. El Wronskiano de dos soluciones de (2.8) en  $I$ , o bien, es idénticamente cero en  $I$ , o bien, no se anula en ningún punto de  $I$  (esta propiedad es evidente a partir de la propiedad anterior).
6. Sean  $y_1(x), y_2(x)$  dos soluciones de (2.8) en  $I$ , son linealmente independientes si y sólo si  $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ , siendo  $x_0$  un punto fijo, cualquiera, de  $I$ . Esta propiedad es consecuencia de las propiedades 2 y 5.

Así pues, se deduce de estas propiedades que si tenemos dos soluciones de una ecuación lineal homogénea en un intervalo y se comprueba que su Wronskiano es no nulo en un punto cualquiera del intervalo  $I$ , entonces se pueden expresar todas las demás soluciones como combinación lineal de éstas dos. Una cuestión que queda pendiente es si siempre existen dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal; basándonos en el teorema 5, y en la teoría para sistemas (ver propiedad 7 y ejercicio 1 de las secciones 3.2 y 3.3 respectivamente, del capítulo 3), se demuestra fácilmente que esta afirmación es cierta. Desafortunadamente es difícil, en general, calcular dos soluciones de la ecuación, a no ser que ésta sea de coeficientes constantes o se conozca una solución particular. En este último caso, veremos, a continuación, que la ecuación se reduce a una de primer orden. La demostración de una de las implicaciones de la propiedad 2 es puramente algebraica; vemos mediante un ejemplo como esta propiedad implica la propiedad 3. Esta demostración se puede extender para la ecuación más general (2.8).

**Ejemplo 24** Se considera la ecuación de coeficientes constantes  $y'' + 2y' + 2y = 0$ . Se busca una solución de la forma  $e^{\lambda x}$ . Substituyendo en la ecuación se llega a que  $\lambda$  debe ser raíz del polinomio  $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ , es decir, los números complejos  $\lambda = -1 \pm i$ . Por tanto  $e^{\lambda x} = e^{-x} \cos x \pm i e^{-x} \sin x$  es una solución, para cada valor del signo, en el campo de los números complejos. Separando parte real e imaginaria, demostramos fácilmente que  $y_1(x) = e^{-x} \cos x$ ,  $y_2(x) = e^{-x} \sin x$  son dos soluciones reales de la ecuación.

Se comprueba  $W[e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x](x) = e^{-2x} \neq 0$ . Por lo tanto las soluciones  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes en  $(-\infty, +\infty)$ . Supongamos que tenemos una solución cualquiera  $\varphi(x)$  de la ecuación. Evidentemente,  $\varphi(x)$  y  $\phi(x) = \varphi(0)e^{-x} \cos x + (\varphi'(0) + \varphi(0))e^{-x} \sin x$  son soluciones en  $(-\infty, \infty)$  del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = \varphi(0) \quad , \quad y'(0) = \varphi'(0). \end{cases}$$

Como los coeficientes de la ecuación son funciones constantes, el teorema 5 nos asegura que ambas soluciones deben coincidir. Es decir,

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{-x} \cos x + (\varphi'(0) + \varphi(0))e^{-x} \sin x,$$

y por tanto la propiedad 3 queda demostrada.  $\square$

### Reducción del orden.

Supongamos que tenemos una solución  $y_1(x)$  de la ecuación (2.8) en el intervalo  $I$ , que no se anula en  $I$ . Calculamos otra solución  $y_2(x)$  linealmente independiente de ésta, aplicando el *método de variación de parámetros*. Es decir, buscamos  $y_2(x) = y_1(x)c(x)$  donde  $c(x)$  se determina sin más que derivar  $y_2$  y substituir en (2.8) teniendo en cuenta que  $y_1$  es solución de esta ecuación. Así obtenemos que  $c(x)$  satisface la ecuación:

$$c''(x)y_1(x) + (2y_1'(x) + p(x)y_1(x))c'(x) = 0$$

que se reduce a una lineal de primer orden mediante el cambio  $c' = u$ . Integrando se tiene:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx. \quad (2.12)$$

Observamos que se han despreciado las constantes de integración. Obviamente, también se obtiene la solución  $y_2$  tomando integrales definidas. Se puede comprobar que  $y_1(x)$  e  $y_2(x) = y_1c(x)$  son linealmente independientes comprobando que su Wronskiano no se anula en el intervalo considerado.

**Ejemplo 25** La ecuación de Euler de segundo orden es de la forma

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ constantes.}$$

una manera de resolver esta ecuación es reduciéndola a una lineal de coeficientes constantes mediante el cambio  $x = e^t$  para  $x > 0$ . Así sabremos resolver (como veremos más adelante) todas las ecuaciones de Euler. A continuación resolvemos de otra forma, una ecuación de Euler en particular, de manera que podamos aplicar el método de variación de parámetros.

Se considera la ecuación  $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ . Se sabe que una solución particular es de la forma  $y_1(x) = x^r$ . Derivando y substituyendo en la ecuación, se tiene que  $r$  debe ser raíz del polinomio

$r(r-1) + 3r + 1 = 0$ , es decir,  $r = -1$ . Aplicando la fórmula (2.12) con  $y_1 = \frac{1}{x}$ ,  $p(x) = \frac{3}{x}$  se tiene  $c(x) = \log x$ , y por tanto  $y_2(x) = \frac{1}{x} \log x$ .

Evidentemente,  $W[\frac{1}{x}, \frac{1}{x} \log x] \neq 0, \forall x \in (0, \infty)$ , luego las dos soluciones son linealmente independientes en  $(0, \infty)$ .  $\square$

### Solución general de la ecuación lineal de coeficientes constantes.

Se considera la forma más general de una ecuación lineal de coeficientes constantes:

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0. \quad (2.13)$$

Un caso particular de esta ecuación se consideró en el ejemplo 24. Como en este ejemplo, si buscamos la solución de la forma  $y = e^{\lambda x}$ , se demuestra que  $\lambda$  debe ser raíz del *polinomio característico*  $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ , es decir,  $\lambda$  debe verificar la llamada *ecuación característica*:

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0.$$

Esta ecuación tiene por raíces  $\lambda_1, \lambda_2$ , y las posibilidades que pueden ocurrir son

- a). Las raíces son reales distintas, en cuyo caso el sistema fundamental de soluciones en  $(-\infty, \infty)$  de la ecuación está dado por:

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}.$$

- b). Las raíces son reales y coinciden, en cuyo caso el sistema fundamental de soluciones de la ecuación está dado por:

$$\{e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}\},$$

como se demuestra aplicando el método de variación de parámetros.

- c). Las raíces son complejas conjugadas:  $\lambda = p \pm qi$ . Se demuestra que un sistema fundamental de soluciones de la ecuación está dado por:

$$\{e^{px} \cos qx, e^{px} \sin qx\}.$$

Así pues para una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes siempre se conoce la solución general.

### 2.3.2. Ecuación lineal no homogénea.

Sea  $\{y_1, y_2\}$  un sistema fundamental de soluciones de (2.8). De acuerdo con la fórmula (2.10), la solución general de (2.9) es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

siendo  $c_i$  constantes e  $y_p$  una solución particular de (2.9). De manera análoga a como se hizo para la ecuación lineal de primer orden, buscamos  $y_p$  a partir de  $y_1$  e  $y_2$  utilizando el *método de variación de parámetros*.

Se busca  $y_p(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x)$  donde las funciones  $K_i(x)$  se determinan derivando  $y_p$  y substituyendo en la ecuación (2.9) teniendo en cuenta que  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones de (2.8). Así, de  $y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$ ,  $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$  e  $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$ , se obtiene:

$$K_1' y_1 + K_2' y_2 = 0,$$

$$K_1' y_1' + K_2' y_2' = r(x),$$

en donde la primera ecuación se ha obtenido a la hora de calcular  $y_p''$ , imponiéndole la condición de que no aparezcan las derivadas segundas de  $K_i$ . Resolviendo el sistema cuyas incógnitas son  $K_1', K_2'$  (y tiene solución, dado que el determinante del sistema es  $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ ) se obtienen los valores de  $K_1$  y  $K_2$  mediante una simple integración. Escribimos directamente las fórmulas:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx. \quad (2.14)$$

Desde luego, el método de variación de parámetros no es el único para buscar una solución particular. En la próxima sección veremos cómo el método de coeficientes indeterminados nos proporciona una solución particular cuando la ecuación es de coeficientes constantes y el término no homogéneo  $r(x)$  es de una determinada forma. A continuación, en un ejemplo, aplicamos el método de variación de parámetros, primero para reducir el orden de la ecuación homogénea, y luego para encontrar la solución particular de la no homogénea.

**Ejemplo 26** Se sabe que una solución particular de la ecuación homogénea asociada a  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = \exp(-x^2)$  es un polinomio de grado 1. Calcular la solución general de esta ecuación.

Primero buscamos  $y_1(x) = \alpha x + \beta$ , derivando y substituyendo en  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$  obtenemos  $y_1 = x$ . La otra solución linealmente independiente se busca de la forma  $y_2(x) = xc(x)$  donde  $c(x)$  está dado por la fórmula (2.12),  $c(x) = \frac{-1}{x} + \log \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$ , y por tanto  $y_2 = -1 + x \log \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$ .

Calculando el Wronskiano:  $W[y_1, y_2](x) = \frac{1}{1-x^2}$  comprobamos que las dos soluciones son linealmente independientes en los intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ , y  $(1, \infty)$ . Observemos que en  $x = \pm 1$  el coeficiente de  $y''$  se anula y, por tanto, la ecuación no está definida en esos puntos.

Ahora la solución general de la ecuación no homogénea dada es:

$$y(x) = c_1x + c_2(-1 + x \log \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}) + y_p(x)$$

donde  $y_p$  se calcula por el método de variación de parámetros:  $y_p(x) = K_1(x)x + K_2(x)(-1 + x \log \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|})$ . De la fórmula (2.14), una vez dividida la ecuación por  $(1-x^2)$ , deducimos

$$K_1(x) = - \int y_2(x) \exp(-x^2) dx \quad , \quad K_2(x) = \frac{-\exp(-x^2)}{2}.$$

□

## 2.4. Ecuaciones lineales de orden $n$ , $n > 2$ .

La ecuación lineal homogénea de orden  $n$  tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (2.15)$$

donde los coeficientes  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son funciones reales definidas en un intervalo  $(a, b)$  y que supondremos continuas en dicho intervalo. La teoría general para ecuaciones lineales de segundo orden se generaliza a las de orden  $n$ , superior a dos, y las demostraciones son análogas al caso  $n = 2$ .

La ecuación lineal no homogénea de orden  $n$  tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x), \quad (2.16)$$

donde  $r$  es otra función real continua definida en  $(a, b)$ . La solución general de (2.16) es de la forma:

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_p(x), \quad (2.17)$$

donde  $y_{GH}(x)$  es la solución general de (2.15) e  $y_p(x)$  es una solución particular de (2.16). Más concretamente podemos escribir:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

donde  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  son  $n$  soluciones de (2.15) linealmente independientes.

El resultado de existencia y unicidad de solución satisfaciendo unas condiciones iniciales nos lo da el teorema siguiente:

**Teorema 6** Sean  $a_i, r$  funciones reales continuas en  $(a, b)$ . Sea  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n \in \mathbf{R}$ . Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0^1, y'(x_0) = y_0^2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^n \end{cases} \quad (2.18)$$

definida en todo el intervalo  $(a, b)$ .

La noción de dos funciones linealmente independientes se extiende a  $n$ : Se dice que  $n$  funciones  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  son *linealmente independientes* en el intervalo  $I$  cuando

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Se dice que las funciones son *linealmente dependientes* cuando no son linealmente independientes, es decir, una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras  $(n - 1)$ .

Supuesto que las funciones  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  son continuas y  $(n - 1)$  veces derivables en  $I$  se define la función *Wronskiano* de  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ , como:



$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

### Propiedades de la ecuación lineal homogénea

1. Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$  son soluciones de (2.15) en  $I$  entonces cualquier combinación lineal de ellas  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_k y_k(x)$  es también solución de (2.15) en  $I$  ( $\alpha_i$  son constantes cualesquiera).
2.  $n$  soluciones  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de (2.15) son linealmente independientes en  $I$  si y sólo si  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0, \forall x_0 \in I$ .
3. Dadas  $n$  soluciones  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de (2.15) linealmente independientes en  $I$ , cualquier otra solución  $y(x)$  se escribe de la forma:

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x), \forall x \in I,$$

para algunas constantes  $\alpha_i$ . Se dice que  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  forman un *sistema fundamental de soluciones de (2.15) en  $I$* .

4. El Wronskiano de  $n$  soluciones de (2.15) en  $I$ , o bien, es idénticamente cero en  $I$ , o bien, no se anula en ningún punto de  $I$  (esta propiedad es una consecuencia de la fórmula de Abel para sistemas, que se verá en el capítulo 3).
5. Sean  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$   $n$  soluciones de (2.15) en  $I$ , son linealmente independientes si y sólo si  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$  siendo  $x_0$  un punto fijo, cualquiera, de  $I$ . Esta propiedad es consecuencia de las propiedades 2 y 4.
6. Hay  $n$  soluciones linealmente independientes de (2.15).

También, como en el caso de ecuaciones de segundo orden, si se conoce una solución  $y_1(x)$  la ecuación (2.15) se reduce a una lineal de orden  $(n - 1)$  haciendo  $y(x) = c(x)y_1(x)$  ( $c$  es la función incógnita en la nueva ecuación).

### Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes.

Se considera la ecuación:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

donde los coeficientes  $a_i$  son constantes. Si se busca una solución de la forma  $y = e^{\lambda x}$  se demuestra que  $\lambda$  debe ser solución de la *ecuación característica*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Es decir,  $\lambda$  es una raíz del llamado *polinomio característico*:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (2.19)$$

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , las raíces de este polinomio en el cuerpo de los complejos, las posibilidades que pueden ocurrir son:

- a). Todas las raíces son reales distintas, en cuyo caso el sistema fundamental de soluciones, en  $(-\infty, \infty)$ , de la ecuación está dado por:

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}.$$

- b). Todas las raíces son reales y algunas de ellas coincidentes. Entonces, por cada raíz  $\lambda_k$ , de multiplicidad  $n_k$ , hay  $n_k$  soluciones de la ecuación linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$  asociadas a esta raíz:

$$\{e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, x^2 e^{\lambda_k x}, \dots, x^{n_k-1} e^{\lambda_k x}\}$$

- c). Hay al menos una raíz compleja  $\lambda_k = p + qi$  de multiplicidad  $n_k$ . Obviamente, el conjugado de  $\lambda_k$ ,  $p - qi$ , es también una raíz de multiplicidad  $n_k$ . Entonces, hay  $2n_k$  soluciones reales, linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$ , de la ecuación asociadas a ambas raíces:

$$\{e^{px} \cos qx, e^{px} \sin qx, x e^{px} \cos qx, x e^{px} \sin qx, x^2 e^{px} \cos qx, x^2 e^{px} \sin qx, \dots, x^{n_k-1} e^{px} \cos qx, x^{n_k-1} e^{px} \sin qx\}.$$

Así pues para una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes siempre se conoce la solución general.

En cuanto a la función  $y_p(x)$  de la fórmula (2.17), que nos da la solución general de (2.16), una vez conocidas  $n$  soluciones linealmente independientes de (2.15), debemos observar que una solución particular de (2.16) se puede, también, calcular por el método de variación de parámetros, es decir, buscando

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x),$$

tal como se hizo para  $n = 2$ . La demostración y las fórmulas de los  $c_i(x)$  pueden encontrarse en [19], capítulo 6. Nosotros no lo hacemos en esta sección, y para su cálculo, una vez reducida la ecuación a un sistema, referimos al método de variación de parámetros para sistemas que expondremos en el capítulo siguiente.

### Método de coeficientes indeterminados.

Exponemos aquí, sin demostración, el *método de los coeficientes indeterminados* para buscar solución de una ecuación lineal de coeficientes constantes, cuando el término no homogéneo  $r(x)$  es de una forma determinada. La justificación de este método puede encontrarse en [19], capítulo 5.

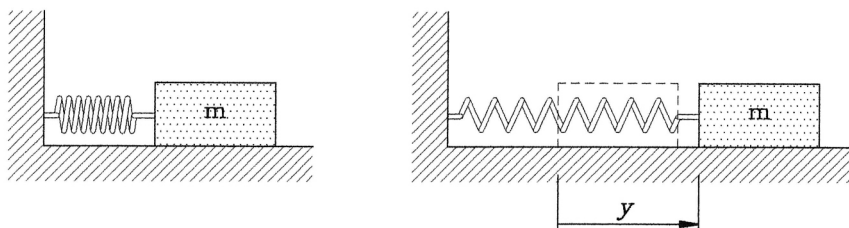
Se considera la ecuación:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = r(x). \quad (2.20)$$

Se denotará por  $p_k(x)$ ,  $P_k(x)$  y  $Q_k(x)$  a polinomios de grado  $k$ ,  $P_k(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$ ,  $Q_k(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ .

- Si  $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$ , se busca la solución particular como  $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$ , donde los coeficientes de  $P_k$  (los  $b_i$ ) se obtienen derivando, substituyendo en la ecuación diferencial (2.20) e igualando coeficientes de potencias de  $x$ .  $s$  es un número, que toma el valor  $s = 0$  si  $\alpha$  no es raíz del polinomio característico (2.19), y toma el valor  $s = n_i$  en el caso de que  $\alpha$  sea raíz de (2.19) de multiplicidad  $n_i$ .
- Si  $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$  ó  $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ , se busca la solución particular como  $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,

donde los coeficientes de  $P_k$  y  $Q_k$  ( $b_i$  y  $c_i$ , respectivamente) se obtienen derivando, substituyendo en la ecuación diferencial e igualando coeficientes de potencias de  $x$ .  $s$  es un número, que toma el valor  $s = 0$  si  $\alpha + i\beta$  no es raíz del polinomio característico (2.19), y toma el valor  $s = n_i$  en el caso de que  $\alpha + i\beta$  sea raíz de (2.19) de multiplicidad  $n_i$ .



**Figura 30** Representación esquemática del resorte que se mueve en línea recta en el plano horizontal .

## 2.5. Modelos diferenciales.

Algunos de los modelos matemáticos más típicos gobernados por ecuaciones diferenciales lineales (y sistemas) son los relacionados con el estudio de las vibraciones mecánicas.

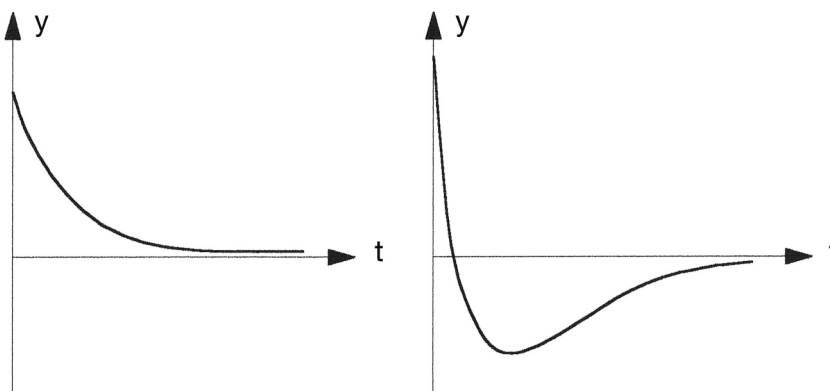
Un ejemplo típico de uso de ecuaciones lineales de segundo orden nos lo proporciona el estudio de *sistemas resorte-masa*, es decir, el estudio de las vibraciones de un resorte en espiral suspendido de un soporte rígido del que pende un cuerpo de masa  $m$  sujeto al extremo libre (ver figura 30). Supuesto que el resorte tiene masa despreciable, las leyes de Newton (segunda ley de Newton del movimiento), y Hooke (la fuerza de restitución que ejerce un resorte elástico es proporcional al alargamiento del resorte  $y(t)$  y de sentido contrario a dicho alargamiento:  $-cy$  ( $c > 0$  es la constante del resorte)) nos permiten obtener el modelo matemático. Así, suponiendo que no hay amortiguación, la ecuación

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -cy(t)$$

modela el alargamiento del resorte. En el caso de que haya amortiguación o fuerzas externas  $f(t)$  actuando sobre el resorte, habrá que añadir términos en la ecuación. En un resorte lineal, se supone que la fuerza de amortiguación es proporcional a la la velocidad del cuerpo:  $-ky'(t)$ , con  $k > 0$  la constante de amortiguación. Así, la ecuación más completa que nos da el alargamiento del resorte es

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -cy(t) - k \frac{dy}{dt} + f(t).$$

Si se supone que el resorte en el instante inicial se desplaza de su posición de equilibrio a una posición  $y = y_0$  y se suelta con una velocidad inicial  $v_0$ , estamos imponiendo condiciones iniciales a la solución de la ecuación:  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = v_0$ .

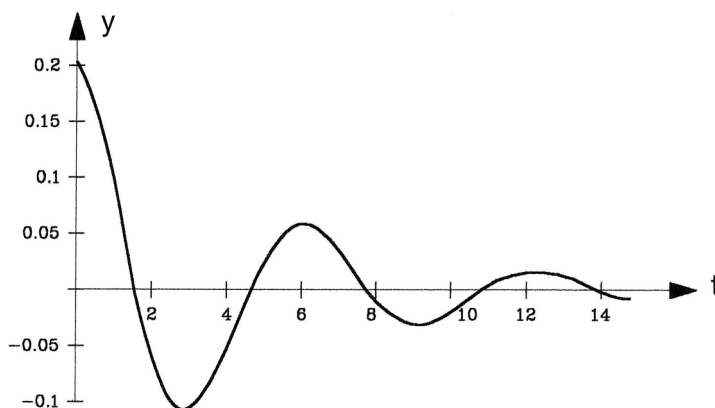


**Figura 31** *Movimiento fuertemente amortiguado.*

Estudiamos el movimiento del resorte que oscila libremente, es decir, la ecuación  $my'' + ky' + cy = 0$ , dependiendo de las relaciones entre las constantes  $m$ ,  $k$  y  $c$ . La ecuación característica es  $m\lambda^2 + k\lambda + c = 0$ . Puede ocurrir:

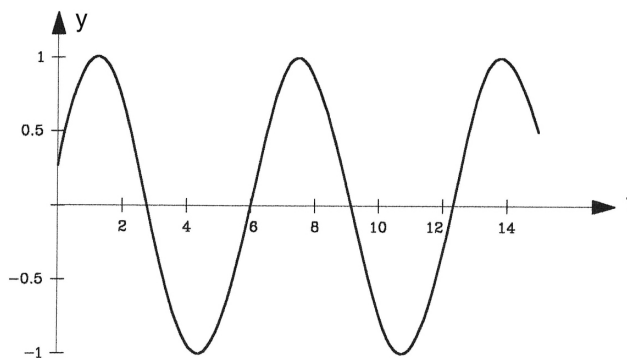
- Si  $k^2 > 4mc$ , la solución general de la ecuación es  $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$  con  $r_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m}$ ,  $r_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m}$ , es decir, los exponentes  $r_1, r_2 < 0$ . El resorte tiende a la posición de equilibrio rápidamente. La gráfica de la solución  $y$  es de la forma indicada en figuras 31. El movimiento se dice que es fuertemente amortiguado.

- Si  $k^2 = 4mc$ , la solución general de la ecuación es  $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$  con  $r_1 = \frac{-k}{2m}$ . La situación no es muy diferente de la del apartado anterior (ver figuras 31).
- Si  $k^2 < 4mc$ , la solución general de la ecuación es  $y(t) = c_1 e^{s_1 t} \cos s_2 t + c_2 e^{s_1 t} \sin s_2 t$  con  $s_1 = \frac{-k}{2m}$ ,  $s_2 = \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m}$ . El resorte tiende a la posición de equilibrio oscilando. La gráfica de la solución  $y$  es de la forma indicada en la figura 32. El movimiento se dice que es débilmente amortiguado.



**Figura 32** *Movimiento débilmente amortiguado.*

- En ausencia de amortiguación,  $k = 0$ , la solución general es  $y(t) = c_1 \cos s_2 t + c_2 \sin s_2 t$  con  $s_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ . Es decir, el resorte vuelve a la posición inicial y el movimiento se repite. El movimiento se denomina oscilatorio no amortiguado (ver gráfica 33). La solución también puede expresarse de la forma  $y(t) = A \cos(\sqrt{\frac{c}{m}}(t + B))$ , de donde se deduce que el periodo de la oscilación es  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ , la frecuencia es  $\frac{1}{T}$ . Las constantes  $A, B$  se denominan amplitud de la oscilación y fase de la oscilación respectivamente. Para una determinada fuerza  $f(t)$  puede ocurrir el conocido fenómeno de la resonancia (ver ejemplo 27 y figura 34).



**Figura 33** *Movimiento no amortiguado.*

**Ejemplo 27** Tomemos  $c = m = 1$ ,  $k = 0$  y  $f(t) = \cos t$  en la ecuación. La solución general de

$$y'' + y = \cos t$$

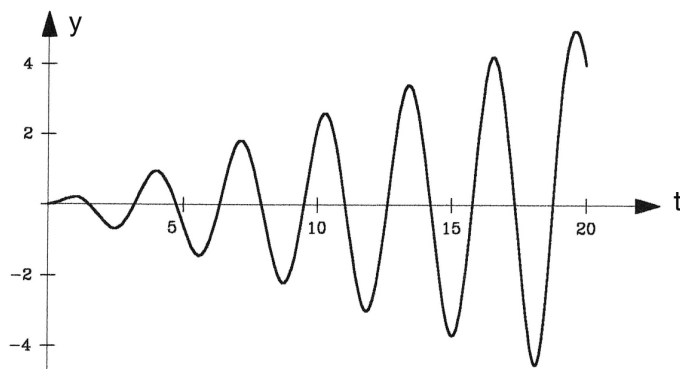
es

$$y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + y_p(t).$$

Calculamos  $y_p(t)$  por el método de los coeficientes indeterminados, es decir:  $y_p = b_0 t \sin t + c_0 t \cos t$ , dado que  $f(t)$  es de la forma de un polinomio de grado 0 multiplicado por  $\cos t$ , y  $0+i$  es raíz de la ecuación característica  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Se calculan las constantes  $b_0$  y  $c_0$  derivando en  $y_p$  y substituyendo en la ecuación diferencial. Así se tiene:

$$2b_0 \cos t - 2c_0 \sin t = \cos t$$

de donde  $b_0 = \frac{1}{2}$ ,  $c_0 = 0$ , es decir, la solución es  $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}t \sin t$ . Evidentemente para cualesquiera valores de  $c_1, c_2$  la función toma valores oscilando entre 0, y muy grandes para  $t \rightarrow \infty$  (ver figura 34). Este fenómeno, de efectos tan útiles en electricidad y peligrosos en mecánica, se conoce con el nombre de resonancia.  $\square$



**Figura 34** *Movimiento oscilatorio para la fuerza  $f(t) = \cos t$ ,  $c = m = 1, k = 0$ .*

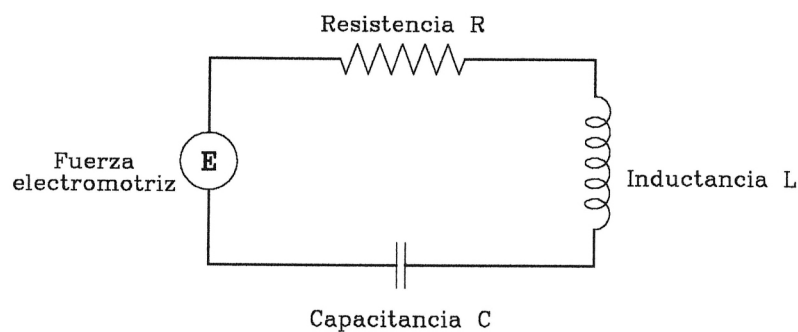
Otro ejemplo de modelos matemáticos, en los que aparecen ecuaciones lineales de segundo orden, nos lo proporciona la teoría de circuitos. La figura 35 representa un circuito denominado *RLC en serie*, que consta de una fuente de fuerza electromotriz (por ejemplo una batería o generador), una resistencia, un inductor y un capacitor en serie. Las leyes de Kirchoff nos proporcionan la ecuación que modela el paso de corriente a través del circuito (ver sección 1.6.3 del capítulo 1). Así la carga  $q(t)$  está dada por la solución de

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t),$$

mientras que la intensidad de la corriente  $I(t)$  ( $I = \frac{dq}{dt}$ ) nos la da la ecuación:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}.$$





**Figura 35** Representación esquemática de un circuito RLC en serie.

### EJERCICIOS.

1. Encontrar las ecuaciones diferenciales de que son soluciones las siguientes familias de curvas: a) las circunferencias de radio 1, b) las circunferencias centradas en el eje  $x$ .
2. a.) Encontrar el periodo de oscilación del péndulo simple no amortiguado suponiendo que su movimiento está descrito por la ecuación linealizada:  $y'' + \frac{g}{l}y = 0$ .  
b). Se consideran los problemas de Cauchy para la ecuación del péndulo:

$$\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0,2, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0,2. \end{cases}$$

Calcular la solución numérica en  $[0, 1]$  para los valores del paso  $h = 0,1$  y  $h = 0,05$ . Comparar cada una de ellas con la obtenida substituyendo la ecuación por la ecuación linealizada  $y'' + y = 0$ . Hacerlo primero con la solución numérica de la ecuación linealizada y luego con los valores de la solución

exacta. ¿En qué caso la ecuación linealizada es una buena aproximación de la ecuación no lineal?

3. Intentar bosquejar el campo de direcciones asociado a la ecuación de las trayectorias de la ecuación del péndulo  $y'' + \sin y = 0$ .
4. Se consideran las funciones  $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ ,  $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$  que se sabe son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Determinar el intervalo en que son soluciones linealmente independientes, así como la ecuación.
5. ¿Qué se puede decir sobre la existencia, unicidad e intervalo de definición de solución de los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = \frac{x}{x+2} \\ y(-3) = 0 \quad , \quad y'(-3) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \\ y(5) = 0 \quad , \quad y'(5) = 1, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x-3}y' + \sqrt{x}y = \log x \\ y(1) = 3 \quad , \quad y'(1) = -2?. \end{cases}$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones: a).  $y'' + 2y' + y = x \operatorname{sh}(x)$ , b).  $y'' + y = \operatorname{sec}(x)$ , c).  $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 1$ , d).  $y'' + 4y = x \sin 2x$ , e).  $y'' + y' + y = 1 + x + x^2$ , f).  $y'' + y = |x|$ , g).  $y''' + y'' - 2y = -2$ , h).  $y''' + y'' - 2y' = -e^x - 2$ , i).  $y^v + y''' = 0$ , j).  $y^{iv} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$ .

7. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

$$y''' + y'' + 2y' + 2y = 0, y(0) = 0 = y'(0), y''(0) = 1,$$

$$y'' + 5y' + 4y = e^x, y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

$$y'' + y' = 2 \cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

8. Resolver la ecuación de Euler de segundo orden  $\alpha x^2 y'' + \beta xy' + \gamma y = 0$ , en  $(0, \infty)$ , para cualesquiera valores de las constantes  $\alpha, \beta, \gamma$ . Demostrar que el resultado es el mismo si se reduce la ecuación a una lineal de coeficientes constantes mediante el cambio  $x = e^t$ , o si se busca la solución de la forma  $y = x^r$ .
9. Resolver la ecuación de tipo Euler:  $(x+1)^2 y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0$ .
10. Resolver la ecuación  $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0$  sabiendo que una solución es  $y = x + 1$ . ¿Dónde son las soluciones encontradas linealmente independientes?
11. Resolver la ecuación  $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = \exp(-x^2)$  sabiendo que la ecuación homogénea asociada admite una solución de la forma  $y = \exp(-ax^2)$  para alguna constante  $a$ .
12. Resolver la ecuación  $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$  en  $(a, b) \subset (0, \infty)$ , sabiendo que la ecuación que admite dos soluciones linealmente independientes tales que su cociente es  $e^x$ . Comprobar que las soluciones buscadas son efectivamente linealmente independientes.
13. Resolver la ecuación de Euler  $x^3 y''' + xy' - y = 1$ , sabiendo que una solución de la homogénea asociada es de la forma  $y = x^a$  para alguna constante  $a$ .
14. Resolver para  $n = 1$  y  $n = 2$  la ecuación  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = x^3 \exp(-x^2)$  sabiendo que una solución particular de la ecuación homogénea (Ecuación de Legendre) es un polinomio de grado  $n$ .
15. Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución general de la ecuación de Euler de tercer orden:  $x^3 y''' + ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$ .
16. Dadas dos soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  linealmente independientes en un intervalo  $I$ , determinar dicha ecuación.

17. Estudiar las vibraciones que se producen en un resorte cuyo movimiento está descrito por los problemas de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos 2t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \cos t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 100y = 36 \cos 8t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

Hacer una gráfica aproximada de las soluciones, explicando cuáles son las diferencias fundamentales en el comportamiento del resorte para valores de  $t$  grandes.

18. ¿Cuál es el mínimo orden de la ecuación diferencial lineal homogénea que admite en  $(-1, 1)$  las soluciones particulares:

$$y_1 = x^2 - 2x + 2, \quad y_2 = (x - 2)^2, \quad y_3 = x^2 + x + 1, \quad y_4 = 1 - x?.$$

Encontrar dicha ecuación diferencial.

19. Encontrar la solución general de la ecuación

$$y'''(1 - 2x \cot g(2x)) - 4xy'' + 4y' = 0$$

sabiendo que una solución de dicha ecuación es  $y = \cos(2x)$ .

## 2.6. Solución por desarrollos en serie.

En los apartados anteriores hemos visto métodos de resolver ecuaciones lineales de coeficientes constantes, y algunas de coeficientes no constantes, como la ecuación de Euler, cuyos coeficientes son determinados polinomios. Cuando los coeficientes de la ecuación son polinomios, se puede pensar en buscar una solución polinómica, aunque no es seguro que se pueda encontrar. La pregunta inmediata a hacerse es,

qué pasa cuando los coeficientes son otra función cualquiera de  $x$ , y no es fácil imaginarse una solución particular de la ecuación para reducir el orden. La idea general en esta sección es aproximar, "si se puede", los coeficientes, de una ecuación lineal de segundo orden, por su desarrollo en una serie de potencias y ensayar una solución de este tipo (un desarrollo en serie de potencias), para deducir recursivamente los coeficientes. Damos unos teoremas que nos proporcionan las condiciones bajo las cuales esto se puede hacer.

Comenzamos con un ejemplo. En el ejercicio 14, sección 2.5 relativo a la ecuación de Legendre proponíamos buscar la solución general de la ecuación sabiendo que una de ellas es un polinomio de grado  $n$ . Observamos que los coeficientes de la ecuación son polinomios y, es fácil comprobar, que si buscamos las dos soluciones en forma de polinomios sólo encontramos una (el polinomio de Legendre de grado  $n$ ). No obstante, si la solución es regular ("analítica" en algún intervalo que no contenga a  $x = \pm 1$ ) admitirá un desarrollo en serie de potencias

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k. \quad (2.21)$$

Obtenemos los coeficientes  $a_k$ , formalmente, derivando  $y(x)$  en (2.21), substituyendo en la ecuación e igualando coeficientes de distintas potencias de  $x^k$ . Así para el valor particular  $n = 2$  se tiene la ecuación:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0.$$

Substituimos en la ecuación  $y$  de (2.21),  $y'$  e  $y''$  dadas respectivamente por

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots,$$

y agrupamos los coeficientes de las distintas potencias de  $x$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} &2a_2 + 6a_0 + (3,2a_3 - 2a_1 + 6a_1)x + (4,3a_4 - 2a_2 - 4a_2 + 6a_2)x^2 + \\ &\quad (5,4a_5 - 3,2a_3 - 2,3a_3 + 6a_3)x^3 + \cdots + \\ &+ ((k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + 6a_k)x^k + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Igualamos a cero los coeficientes de  $1, x, x^2, \dots, x^k$ , respectivamente, y obtenemos:

$$a_2 = -\frac{6a_0}{2}, a_3 = \frac{-4a_1}{6}, a_4 = 0, a_5 = a_{3+2} = \frac{6,1a_3}{5,4}$$

$$a_{k+2} = \frac{(k+3)(k-2)}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad a_{2k} = 0, \forall k \geq 2,$$

Para los  $k$  impares, escribimos  $a_k$  en función de  $a_{k-2}$  y éste en función de  $a_{k-4}$  y así recursivamente hasta llegar a  $a_1$  y tenemos la fórmula:

$$a_{2k+1} = \frac{4,6,8 \dots (2k+2)(2-1)(2-3) \dots (2-2k+1)}{(2k+1)!} (-1)^k a_1.$$

Es decir, la solución general está dada por:

$$\begin{aligned} y = & a_0(1 - 3x^2) + a_1\left(x - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{6,4}{5!}x^5 + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{4,6,8 \dots (2k+2)(2-1)(2-3) \dots (2-2k+1)}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1} + \dots\right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

dependiente de dos constantes. En el supuesto de que la serie que acompaña al coeficiente  $a_1$  sea convergente y defina una función regular, las funciones que acompañan a  $a_0$  y  $a_1$  son linealmente independientes. Imponiendo condiciones iniciales  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = z_0$ , por ejemplo, podríamos determinar la única solución del correspondiente problema de valores iniciales, en el intervalo  $(-1, 1)$ .

La ecuación de Legendre,  $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ , está definida para  $\alpha$  no necesariamente un entero. En este caso, las dos soluciones que acompañan a los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  son series de potencias, una conteniendo sólo potencias impares de  $x$  y la otra pares. En el caso  $\alpha = n$  un número natural, el polinomio de grado  $n$  se denomina *polinomio de Legendre de grado  $n$*  y sólo contiene potencias impares (pares, respectivamente) de  $x$  si  $n$  es impar (par, respectivamente). La fórmula general de estos polinomios puede escribirse como:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

y numerosas y útiles propiedades de ellos pueden ser encontradas, por ejemplo, en [7].

Otro ejemplo sencillo de ecuación con coeficientes polinómicos es la ecuación de Airy:

$$y'' - xy = 0$$

con coeficientes continuos en  $(-\infty, \infty)$ . Mediante un proceso análogo al utilizado para resolver la ecuación de Legendre encontramos que la solución general en dicho intervalo está dada por

$$y = a_0 \left( 1 + \frac{1}{3,2} x^3 + \dots + \frac{1}{3n(3n-1) \cdot (3n-3)(3n-4) \cdot \dots \cdot (6,5)(3,2)} x^{3n} + \dots \right) + a_1 \left( x + \frac{1}{4,3} x^4 + \dots + \frac{1}{(3n+1)(3n) \cdot (3n-2)(3n-3) \cdot \dots \cdot (7,6)(4,3)} x^{3n+1} + \dots \right).$$

En ambos casos de ecuaciones los coeficientes eran polinómicos, pero para la ecuación

$$y'' + e^x y' + (1 + x^2)y = 0,$$

con coeficientes continuos en  $(-\infty, \infty)$ , el proceso anterior no serviría a no ser que tengamos en cuenta que el desarrollo en serie de  $e^x$  está dado por

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

y la serie converge en  $(-\infty, \infty)$ . En este caso, en la resolución de la ecuación, buscando la solución de la forma (2.21), se añade la dificultad de tener que obtener el término general del producto

$$y' e^x = \left( \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right).$$

Más generalmente, el término general  $c_n$  del producto de dos series

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)$$

está dado por  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

De esta manera, si además imponemos a la ecuación las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ , es fácil obtener recursivamente los

coeficientes  $a_i$  de la única solución que hay del problema de Cauchy planteado:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{11}{720}x^6 + \dots$$

Observamos que no siempre podemos esperar obtener una forma explícita del término general de la serie  $a_i$ , y en general, nos tendremos que conformar con calcular un número finito de coeficientes. Evidentemente, todo lo que hemos hecho hasta ahora es formal, pero aunque no entremos en detalles de demostrar convergencias podemos dar un teorema que nos garantiza bajo qué condiciones de los coeficientes de la ecuación el método empleado está justificado, es decir, la función (2.21) nos define una serie solución convergente. Para ello, empezamos definiendo lo que entenderemos por función analítica en un punto  $x = x_0$ . La demostración del teorema, así como la justificación de todos los cálculos formales aquí presentados, puede encontrarse por ejemplo en [7].

Se dice que una función  $f(x)$  es *analítica en el punto*  $x = x_0$  cuando admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

convergente en algún entorno del punto  $x_0$ , con un *radio de convergencia*  $\rho$ ,  $\rho > 0$ . Así, la serie es convergente en  $|x - x_0| < \rho$ , y los  $a_n$  son los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de  $f$ ,  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ .

Observemos que el hecho de que la función sea regular en todo  $\mathbf{R}$  no significa que la función sea analítica con radio de convergencia  $\infty$ . Así, por ejemplo, la función  $\frac{1}{1+x^2}$  admite el desarrollo  $1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$ , convergente en  $|x| < 1$ , como se deduce del hecho de que  $x = \pm i$  son raíces de  $x^2 + 1 = 0$  y la distancia de 0 a  $\pm i$  en el plano complejo es 1.

Un test de convergencia de series de potencias, que puede ser de utilidad, es el conocido *criterio del cociente*. Una versión de dicho criterio es: supuesto que  $a_i \neq 0$  para  $i$  suficientemente grande, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ , entonces, el radio de convergencia de la serie (2.21) (ó  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ) es  $\rho = \frac{1}{r}$ .



**Teorema 7** Sean  $p, q$  funciones analíticas en el punto  $x = x_0$ . Sea  $\rho$  el mínimo de los radios de convergencia de las series de  $p$  y  $q$ ,  $\rho > 0$ . Entonces, la solución general de la ecuación  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

donde  $a_0$  y  $a_1$  son constantes arbitrarias, y  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones linealmente independientes, analíticas en  $x_0$ , y cuyos desarrollos en serie de potencias tienen radio de convergencia al menos  $\rho$ . Los coeficientes de las series solución se calculan recursivamente substituyendo la serie y sus derivadas en la ecuación diferencial.

De acuerdo con el teorema, observamos que los coeficientes de la ecuación de Legendre,  $p(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ ,  $q(x) = \frac{6}{1-x^2}$ , son funciones analíticas en el punto 0 con radio de convergencia de las correspondientes series de potencias  $\rho = 1$ . Así pues, la solución que acompaña a  $a_1$  en (2.22) es una función analítica en  $x_0 = 0$  con radio de convergencia 1. En este caso, y en general en el caso del teorema 7, se dice que el punto  $x_0$  es un *punto ordinario* de la ecuación. En otro caso, se dice que el punto  $x_0$  es *singular*.

Por ejemplo, tomando  $x_0 = 0$ , el teorema 7 no se puede aplicar para resolver la ecuación de Euler:  $x^2 y'' + axy' + by = 0$ , y el punto  $x = 0$  es un punto singular de dicha ecuación. En este caso se dice que el punto  $x = 0$  es un *punto singular regular* de la ecuación de Euler. Esta definición se extiende a una ecuación más general. Un punto  $x = x_0$  se dice que es un punto singular regular de una ecuación  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$  cuando la ecuación se puede escribir de la forma:

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0,$$

donde  $p(x), q(x)$  son funciones analíticas en  $x_0$ . Para este tipo de ecuaciones, la forma de buscar soluciones es:

$$y = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(x - x_0)^n.$$

Desde luego, a raíz del ejemplo 25 para la ecuación de Euler, cabe esperar que al menos exista una solución de esta forma, y ésta sea convergente en  $0 < |x - x_0| < \rho$ , siendo  $\rho$  el mínimo de los radios de

convergencia de las series de  $p$  y  $q$ . No entraremos en detalles en esta teoría conocida usualmente como *el método de Frobenius*; tan sólo enunciamos el resultado principal, teorema 8, para  $x_0 = 0$ , cuya demostración puede encontrarse en [7], así como un amplio tratamiento de esta teoría. Como ejemplo de aplicación de estas técnicas se obtienen las conocidas *funciones de Bessel de primera clase*, soluciones de la ecuación de Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

y las *funciones de Bessel de segunda clase* (en ocasiones, como combinación lineal de las de primera clase).

Observamos que son muchas las ecuaciones que aparecen en problemas de la Física y de la Técnica que se resuelven mediante los desarrollos en series de potencias. Por ejemplo las ecuaciones de Legendre y Bessel aparecen como consecuencia de intentar resolver ecuaciones de propagación de ondas y del calor, utilizando el *método de separación de variables* (ver el capítulo 6 relativo a Ecuaciones en Derivadas Parciales). Propiedades de las soluciones de dichas ecuaciones, y otras como las de Hermite, Laguerre, Tchevichev, etc., pueden ser encontrados en [7]. Vemos así que los puntos singulares regulares aparecen, de una manera natural, en la teoría de las ecuaciones diferenciales. El siguiente teorema nos da una idea sobre cómo buscar dos soluciones linealmente independientes de una ecuación que tiene un punto singular regular en  $x = 0$ . Quizás, para la mejor comprensión del enunciado, es conveniente recordar el estudio previo hecho para encontrar la solución de la ecuación de Euler (ver ejemplo 25 y ejercicio 8 de la sección 2.5).

**Teorema 8** *Sea la ecuación:*

$$x^2 y'' + x(xp(x))y' + (x^2 q(x))y = 0, \quad (2.23)$$

donde  $p, q$  son tales que las funciones  $xp(x), x^2 q(x)$  son analíticas en el punto  $x = 0$ , con  $\rho > 0$  el mínimo radio de convergencia de las series de  $xp$  y  $x^2 q$ . Sean  $p_0, q_0$  los primeros términos de los desarrollos en serie de potencias de las funciones  $xp$  y  $x^2 q$  respectivamente. Sea  $r_1 \geq r_2$ ,  $r_1$  y  $r_2$  las raíces reales de la ecuación polinómica (ecuación indicial):

$$r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0. \quad (2.24)$$

Entonces, la ecuación (2.23) admite dos soluciones  $y_1(x), y_2(x)$ , linealmente independientes en  $0 < |x| < \rho$ , dadas de la forma:

1. Si  $r_1 - r_2$  no es un número entero o cero, entonces

$$y_1 = |x|^{r_1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right),$$

$$y_2 = |x|^{r_2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right).$$

2. Si  $r_1 = r_2$ , entonces

$$y_1 = |x|^{r_1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right),$$

$$y_2 = y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n.$$

3. Si  $r_1 - r_2 \in \mathbf{N}$ , entonces

$$y_1 = |x|^{r_1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right),$$

$$y_2 = a y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_2} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n \right).$$

donde los coeficientes de las series  $a_i, b_i, c_i$  y la constante  $a$  se determinan por sustitución en la ecuación (2.23), y las series de potencias que aparecen tienen radio de convergencia al menos  $\rho$ .

Si en el teorema las raíces  $r_1, r_2$  son complejas conjugadas, habría que proceder separando las partes reales e imaginarias de la serie solución, tal como se hace para la ecuación de Euler. Una aplicación directa de éste teorema es la resolución de la ecuación de Bessel antes citada (ver ejercicios 7 y 10). Las funciones de Bessel juegan un papel primordial en la teoría de la propagación de ondas en dimensión 3, así como en otros campos de la Física y de la Técnica. Un estudio detallado de propiedades de estas funciones puede encontrarse en [3] o [7], por ejemplo.

Finalmente, observemos que las técnicas desarrolladas en esta sección pueden ser generalizadas al estudio de soluciones de ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales (ver ejercicios 9 y 11). El método de desarrollo en series de potencias también puede ser aplicado para resolver ecuaciones no lineales (ver ejercicio 4), pero un inconveniente o desventaja a tener en cuenta es que, en general, no se conoce el radio de convergencia de la serie solución.

### EJERCICIOS.

1. Encontrar los 10 primeros términos de los desarrollos en serie de potencias de las soluciones de los problemas de Cauchy:

$$y'' + 2xy' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

$$xy'' + y \sin x = x, y(0) = y'(0) = 1,$$

$$y'' + y = 1, y(0) = y'(0) = 1,$$

2. Comparar los resultados obtenidos para los problemas segundo y tercero del ejercicio anterior, teniendo en cuenta que en un entorno de  $x = 0$ ,  $\sin x \approx x$ .
3. Encontrar los 5 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución de las ecuaciones:

$$e^x y'' + xy = 0,$$

$$y'' + y \sin x = 0,$$

$$y' = e^{x^2} y,$$

$$y' - y = x^2$$

Comparar la solución obtenida en las dos últimas ecuaciones con la obtenida integrando directamente.

4. Se considera el problema de Cauchy:  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 1$ , del que no se conoce solución explícita. Encontrar  $y'(0)$ ,  $y''(0)$ ,  $y'''(0)$ .

Buscar los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Comparar con la solución obtenida numéricamente en  $[0, 0,3]$  en el ejercicio 10 de la sección 1.7, capítulo 1.

5. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para la solución de  $y' - y = x^2$ ,  $y(0) = 0$ . Comparar con la solución exacta del problema.
6. Encontrar los 10 primeros términos de la solución de la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0$$

para  $\nu = 1$ .

7. Encontrar los 10 primeros términos de la solución de la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

para  $\nu = \frac{1}{3}$  en  $x > 0$  (esto podría hacerse de la misma manera para  $\nu \neq \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .)

8. Resolver  $y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 0$ , buscando un desarrollo en serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$  de la solución.
9. Encontrar los 5 primeros términos del desarrollo en serie,  $\sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k t^k$ , de la solución del problema de Cauchy para un sistema:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{1}{1-t} y \\ y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo  $(-1, 1)$  (evidentemente los coeficientes  $\bar{c}_k$  son ahora vectores de dos componentes). Comprobar que el resultado es el mismo si se calculan los 5 primeros términos del desarrollo en serie de la solución de

$$y'' - \frac{1}{1-t} y = 0,$$

en el intervalo  $(-1, 1)$ .

10. Encontrar la solución general de la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

para cualquier valor real de  $\nu$ .

11. Resolver el problema de Cauchy:

$$z'' + xz' = 0, \quad y''' + xy'' - 2y' + z = 0$$

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

12. Encontrar los 10 primeros términos de los desarrollos en serie de potencias de los problemas de Cauchy:

$$y'' + e^x y' + (1 + x^2)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' + x^5 y = 0, \quad y(0) = 0,3, \quad y'(0) = 0$$

13. Encontrar los 10 primeros términos de los desarrollos en serie de potencias de la solución de las ecuaciones:

$$a). y'' - xy' - y = \sin x, \quad b). y'' - y \sin x = \cos x.$$

## 2.7. La Transformada de Laplace.

Problemas que aparecen muy a menudo en la Ingeniería son los relativos al cálculo de deformaciones de vigas que están sometidas a cargas puntuales, es decir, cargas que actúan en intervalos "muy, muy pequeños". Para expresar estas cargas se suele utilizar la *función Delta de Dirac*, y para resolver las ecuaciones que se plantean la *transformada de Laplace*. Las funciones Delta, también, se utilizan para expresar fuerzas que actúan sobre un cuerpo en periodos de tiempo muy pequeños: Por ejemplo, resortes a los que en un instante,  $t = t_0$ , se les da un martillazo y vibran bajo la acción de esta fuerza.

La particularidad fundamental de la transformada de Laplace es que transforma ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas, así como ecuaciones diferenciales lineales

de coeficientes polinómicos en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. La importancia de su uso radica en un teorema de inversión que nos permite, una vez resuelta la ecuación a la que redujimos el problema, recuperar la solución de la ecuación de partida. La transformada de Laplace es también una herramienta útil para la resolución de ecuaciones integrales e integro-diferenciales, así como de sistemas lineales. Comenzamos la sección con una serie de definiciones.

Una función  $f(t)$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  se dice *continua a trozos*, o *continua por segmentos*, cuando  $f$  es continua en todo punto de  $[a, b]$  excepto, a lo más, en un número finito de puntos,  $t_1, t_2, \dots, t_k \in (a, b)$ , donde tiene una discontinuidad de salto, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t) \text{ y } \lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t) \text{ existen y son finitos, } i = 1, 2, \dots, k.$$

Se dice que la función  $f$  es continua por segmentos en  $[0, \infty)$ , cuando lo es en cada intervalo  $[0, N]$  para cualquier  $N > 0$ .

La función  $f$ ,  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  es *de orden exponencial*  $\alpha$  si existen constantes positivas  $T$  y  $M$  tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t \geq T.$$

**Ejemplo 28** Evidentemente, funciones tan sencillas como senos, cosenos, funciones exponenciales y productos de ellas son de orden exponencial. La función  $e^{7t} \sin 8t$  es de orden exponencial 7, pues  $|e^{7t} \sin 8t| \leq e^{7t}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

La función  $e^{t^2}$  no es de orden exponencial para ningún  $\alpha$ , pues  $\frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} \rightarrow \infty$ , para  $t \rightarrow \infty$  y para cualquier  $\alpha$ .  $\square$

Dada una función  $f$ ,  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , se denomina *Transformada de Laplace* de  $f$  en el punto  $\lambda$  al valor:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt. \quad (2.25)$$

**Ejemplo 29** Demostramos que la transformada de Laplace de  $e^{7t} \sin 8t$  es:

$$\mathcal{L}[e^{7t} \sin 8t](\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{7t} \sin 8t dt = \frac{8}{(\lambda - 7)^2 + 8^2}, \forall \lambda > 7,$$

comprobando que este valor es el límite de  $\int_0^R e^{-\lambda t} e^{7t} \sin 8t dt$  cuando  $R \rightarrow \infty$ . También se puede comprobar que la integral converge, comprobando que

$$\int_0^{\infty} |e^{-\lambda t} e^{7t} \sin 8t| dt < \infty, \forall \lambda > 7,$$

dado que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |e^{-\lambda t} e^{7t} \sin 8t| dt \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{(7-\lambda)t} dt = \frac{1}{7-\lambda} < \infty, \forall \lambda > 7. \square$$

La definición de la transformada de Laplace está ligada a que la integral impropia de (2.25):

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

sea convergente. Si la función  $f$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$  es fácil de probar que la integral converge para  $\lambda > \alpha$  o más exactamente para  $Re(\lambda) > \alpha$ . De esta manera, la transformada de Laplace  $\mathcal{L}[f](\lambda)$  es una función con valores complejos, de variable compleja, definida para  $Re(\lambda) > \alpha$ ; nosotros sólo utilizaremos su restricción a los  $\lambda$  reales.

A continuación exponemos, sin demostración, algunas propiedades de la transformada de Laplace que nos permitirán resolver algunas ecuaciones diferenciales. La demostración de dichas propiedades, así como la resolución con ésta de ecuaciones diferenciales, puede encontrarse en [3] y [24] por ejemplo. Interesantes ejemplos de aplicación a la teoría de la elasticidad, vibraciones y a otros problemas de la Física y la Técnica pueden encontrarse en [32] (ver también en relación con el uso de otras transformadas: Fourier, Mellin, etc...), así como en [29].

Una función que nos será de utilidad para enunciar las propiedades de la transformación de Laplace es la *función escalón*: se trata de una función continua a trozos, definida como

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

Considerando combinaciones lineales de estas funciones se pueden obtener funciones que toman valores cero fuera de un intervalo muy pequeño



y cuya integral en  $(-\infty, \infty)$  tenga siempre el valor 1. La función

$$s_N(t - a) = \frac{N}{2} \left( u\left(t - a - \frac{1}{N}\right) - u\left(t - a + \frac{1}{N}\right) \right)$$

toma el valor  $\frac{N}{2}$  en  $[a - \frac{1}{N}, a + \frac{1}{N})$  y cero fuera de este intervalo (ver figura 36). Si hacemos tender  $N$  a  $\infty$  parece lógico pensar en que el límite de la *función impulso*  $s_N(t - a)$  es una "función",  $\delta(t - a)$ , tal que:

$$\delta(t - a) = \begin{cases} \text{"muy grande"} & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

y

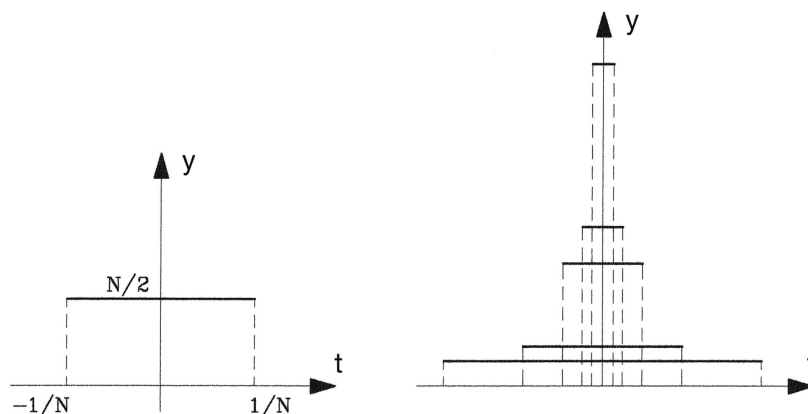
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1.$$

Esta función (que desde un punto de vista matemático no es propiamente una función) se denomina *función generalizada* o *distribución Delta de Dirac* y el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  debe ser entendido en el sentido:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_N(t - a) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) \phi(t) dt = \phi(a),$$

para cualquier función  $\phi$  continua en  $\mathbf{R}$ .

Obviamente,  $\mathcal{L}[u(t - a)](\lambda) = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}$  y  $\mathcal{L}[\delta(t - a)](\lambda) = e^{-\lambda a}$ , para  $a > 0$ . El resultado se extiende para  $a = 0$  mediante un proceso de paso al límite.



**Figura 36** Aproximaciones de la Distribución Delta.

**Propiedades de la transformada de Laplace.**

1. Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que su transformada de Laplace existe para  $\lambda > \alpha$ , y  $c_1, c_2$  constantes cualesquiera. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1f + c_2g](\lambda) = c_1\mathcal{L}[f](\lambda) + c_2\mathcal{L}[g](\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

2. Si la transformada de Laplace de  $f$  existe para  $\lambda > \alpha$ , entonces:

$$\mathcal{L}[e^{at}f](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda - a), \forall \lambda > \alpha + a.$$

3. Si  $f$  es continua en  $[0, \infty)$ , y de orden exponencial  $\alpha$ , y  $f'$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$ , entonces:

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda\mathcal{L}[f](\lambda) - f(0), \forall \lambda > \alpha.$$

4. Si  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  son continuas en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$  y  $f^{(n)}$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$ , entonces:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](\lambda) = \lambda^n\mathcal{L}[f](\lambda) - \lambda^{n-1}f(0) - \lambda^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \forall \lambda > \alpha.$$

5. Sea  $f$  continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ . Entonces:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right](\lambda) = \frac{\mathcal{L}[f](\lambda)}{\lambda}, \forall \lambda > \max(\alpha, 0).$$

6. Sea  $f$  continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ . Entonces:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](\lambda) = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[f]}{d^n \lambda}(\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

7. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ . Entonces:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-u)g(u)du\right](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda) \cdot \mathcal{L}[g](\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

La función  $f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$  se denomina *convolución de  $f$  y  $g$* .

8. Si la transformada de Laplace de  $f$  existe para  $\lambda > \alpha$ , y  $a \geq 0$ , entonces:

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t)](\lambda) = e^{-\lambda a} \mathcal{L}[f(t+a)](\lambda), \quad \forall \lambda > \alpha,$$

o lo que es equivalente

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)](\lambda) = e^{-\lambda a} \mathcal{L}[f(t)](\lambda), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

9. Sea  $f$  continua a trozos en  $[0, \infty)$  y periódica de periodo  $T$  (es decir,  $f(t) = f(T+t)$ ,  $\forall t$ ). Entonces,

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \frac{\int_0^T e^{-\lambda t} f(t) dt}{1 - e^{-\lambda T}}, \quad \forall \lambda > 0.$$

10. Sea  $f$  continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial. Entonces,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](\lambda) = 0$$

Notemos la importancia fundamental de las propiedades 1, 3 y 4 para la resolución de ecuaciones diferenciales. Además de todas estas propiedades de la transformada de Laplace, necesitamos un teorema de inversión. Damos un resultado que es consecuencia de dicho teorema.

Se llama *transformada inversa de Laplace* de una función  $F(\lambda)$ , a la función  $f(t)$  continua a trozos en  $[0, \infty)$  que verifica:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = F(\lambda).$$

El resultado de existencia de transformada inversa para una función dada tiene un enunciado un tanto complejo, pero para lo que nosotros utilizaremos es suficiente el resultado de inversión que nos proporciona el llamado teorema de Lerch que enunciamos a continuación. La demostración de dicho teorema queda fuera del alcance del curso (ver [33], por ejemplo).

**Teorema 9** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas a trozos en  $[0, \infty)$ , de orden exponencial  $\alpha$ , y tales que  $\mathcal{L}[f](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda)$ ,  $\forall \lambda > \alpha$ . Entonces,  $f(t) = g(t)$  salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de  $f$  y  $g$ .

**Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales.**

Dada una ecuación diferencial lineal, la manera de proceder es como sigue (para ser más explícitos aplicaremos la transformada de Laplace en un ejemplo muy sencillo:  $y' - y = 1$ ):

1. Se aplica la transformada de Laplace en la ecuación diferencial con variable dependiente  $y(t)$ , usando las propiedades que se necesiten de dicha transformada (propiedades 1 y 3 en este caso,

$$\mathcal{L}[y' - y](\lambda) = \mathcal{L}[1](\lambda) \Rightarrow \lambda \mathcal{L}[y](\lambda) - y(0) - \mathcal{L}[y](\lambda) = \mathcal{L}[1](\lambda).$$

2. Como se tiene una ecuación algebraica con incógnita  $\mathcal{L}[y](\lambda)$ , se despeja  $\mathcal{L}[y](\lambda)$  (calculamos  $\mathcal{L}[1](\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ , entonces

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)} + \frac{y(0)}{\lambda - 1}.$$

3. Se escribe el lado derecho de la igualdad como suma de funciones de  $\lambda$ , que sean transformadas de Laplace de funciones conocidas. Para esto, puede ayudarnos una tabla de transformadas de Laplace, así como el conocimiento de las propiedades de ésta. Cuantas más propiedades y más transformadas conozcamos, más fácil tendremos el problema. La tabla que incluimos aquí es suficiente para los problemas que se estudian en el curso. Una amplia tabla de transformadas de Laplace puede encontrarse en [34], por ejemplo. (Sabemos que la transformada de Laplace de  $e^t$  es  $\frac{1}{\lambda - 1}$ . Así escribimos:

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{y(0)}{\lambda - 1},$$

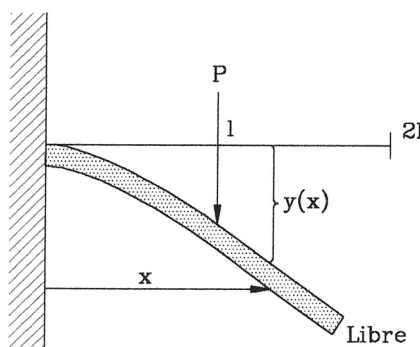
$$\mathcal{L}[y](\lambda) = -\mathcal{L}[1](\lambda) + \mathcal{L}[e^t](\lambda) + y(0)\mathcal{L}[e^t](\lambda),$$

4. Finalmente, utilizando de nuevo las propiedades y el teorema 9, obtenemos  $y(t)$  la solución de la ecuación considerada. Las constantes que hayan aparecido  $y(0)$ ,  $y'(0)$ , etc. dependiendo del orden de la ecuación diferencial, se determinan imponiendo, por ejemplo, condiciones iniciales. (Así, en el ejemplo considerado, la solución es  $y(t) = e^t(1 + y(0)) - 1$ , que es una función continua en todo  $\mathbf{R}$ .)

**Ejemplo 30** La figura 37 nos muestra una viga de longitud  $2l$  que está empotrada en un soporte del lado izquierdo y libre en el derecho. Se supone que la viga está situada en el eje de las  $x$  y el desplazamiento  $y(x)$  se mide en el eje de las  $y$ . Si cada punto  $x$  la viga está sometida a una carga  $p(x)$ , el desplazamiento,  $y(x)$ , es la solución del problema que modela las deformaciones de la viga:

$$EIy^{(4)} = p(x), y(0) = y'(0) = 0, y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

donde  $E$  e  $I$  son constantes.  $E$  es el módulo de Young e  $I$  es un momento de inercia, y la constante  $EI$  se denomina rigidez a flexión. Observemos que los esfuerzos horizontales se consideran nulos. Se trata de un *problema de contorno* que tiene solución única (se verá en el capítulo 5). Si  $p(x)$  es una función continua la ecuación se puede intentar resolver utilizando los métodos vistos en las secciones anteriores (coeficientes indeterminados ó variación de parámetros, dependiendo de cuál sea la función  $p$ ), y las constantes que aparezcan se determinan imponiendo las *condiciones de contorno*:  $y(0) = y'(0) = 0, y''(2l) = y'''(2l) = 0$ .



**Figura 37** Viga empotrada en un soporte sometida a una carga concentrada.

Supongamos que la viga tiene una carga concentrada  $P$  que actúa sobre su centro  $x = l$ . El problema entonces es:

$$EIy^{(4)} = P\delta(x - l), y(0) = y'(0) = 0, y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

que podemos resolver utilizando la transformada de Laplace.

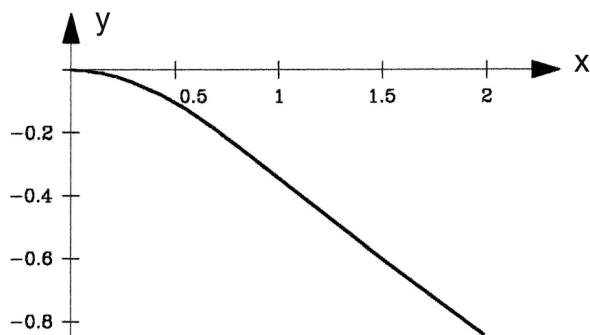
$$EI\mathcal{L}[y](\lambda) = \frac{Pe^{-\lambda l}}{\lambda^4} + \frac{y''(0)}{\lambda^3} + \frac{y'''(0)}{\lambda^4}$$

Utilizando la tabla y las propiedades de la transformada de Laplace:

$$EI\mathcal{L}[y](\lambda) = P\frac{1}{3!}\mathcal{L}[u(x-l)(x-l)^3](\lambda) + y''(0)\frac{1}{2!}\mathcal{L}[x^2](\lambda) + y'''(0)\frac{1}{3!}\mathcal{L}[x^3](\lambda)$$

Utilizando el teorema de Lerch, tenemos que la solución depende de las constantes  $a = y''(0)$ ,  $b = y'''(0)$ . Dichas constantes se determinan imponiendo las condiciones que aún no hemos utilizado  $y''(2l) = y'''(2l) = 0$ . Así, el desplazamiento está dado por:

$$y(x) = \frac{P}{6EI}(3lx^2 - x^3 + (x-l)^3u(x-l)). \square$$



**Figura 38** Deformación de la viga.

## Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](\lambda)$
$c$ una constante	$\frac{c}{\lambda}$
$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{\lambda^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{\lambda - a}$
$te^{at}$	$\frac{1}{(\lambda - a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\lambda^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{\lambda^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{\lambda}{\lambda^2 - \omega^2}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(\lambda - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{\lambda - a}{(\lambda - a)^2 + \omega^2}$
$\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$\frac{a}{\lambda\sqrt{\lambda + a^2}}$
$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{\lambda}}}{\lambda}$
$t^{\kappa-1}, \kappa > 0$	$\frac{\Gamma(\kappa)}{\lambda^\kappa}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + a^2}}$
$I_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}$
$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\tan^{-1} \frac{\omega}{\lambda}$
$t \sinh \omega t$	$\frac{2\omega\lambda}{(\lambda^2 - \omega^2)^2}$
$t \cosh \omega t$	$\frac{\lambda^2 + \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2}$

En el ejemplo 30 observamos que la solución  $y(x)$  es continua (ver figura 38), así como lo son  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ , pero no lo es su derivada tercera. Para este tipo de problemas se admitirá que una función continua, y con derivada  $n - 1$  continua, es solución de una ecuación diferencial de orden  $n$ , con coeficientes constantes, cuando satisface la ecuación, salvo en los puntos de discontinuidad del término no homogéneo de la ecuación. Por otro lado, debemos observar que si este término no homogéneo es una función continua a trozos y de orden exponencial, la solución de la ecuación diferencial también es de orden exponencial y, por lo tanto, podemos aplicar la transformada de Laplace (véase [36] en relación con este resultado).

### EJERCICIOS.

1. Encontrar la transformada de Laplace de las funciones:

$$ch(pt), sh(pt), t^n, \frac{1}{\sqrt{t}}, t^2 e^{pt}, ch(at) \cdot \cos(bt), |\sin t|.$$

2. Encontrar la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  sabiendo que su derivada existe para  $t \neq \frac{T}{4} + \frac{nT}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y la función es periódica de periodo  $T$ :

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \\ 0 & \text{si } \frac{3T}{4} < t \leq T. \end{cases}$$

3. Encontrar las transformadas inversas de Laplace de las funciones:

$$\frac{1}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, \frac{3\lambda + 2}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda^4 - 1}, \frac{e^{-2\lambda}}{\lambda^4 - 1}, \frac{e^{-2\lambda}(\lambda + 1)}{\lambda^2 + 2\lambda + 2}, \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1)}.$$

4. Encontrar la transformada de Laplace *funciones de Bessel de primera clase*  $J_i(t)$ , sabiendo que verifican  $J_0(0) = 1$ ,  $J_n(0) = 0 \forall n > 1$ , y que están definidas:

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) d\theta, \quad J_1(t) = -J_0'(t),$$



$$J_{n+1}(t) = J_{n-1}(t) - 2J'_n(t), \forall n > 1.$$

(Demostrar que la transformada de Laplace de  $J_0$  está dada por  $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ , y la de  $J_n$  por  $\frac{(\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda)^n}{\sqrt{\lambda^2+1}}$ , para  $n > 0$ .)

5. Una masa, sujeta a un resorte, se suelta a partir del reposo  $1m$ . por debajo de la posición de equilibrio del sistema masa-resorte, y empieza a vibrar. Después de  $\pi$  segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. Encontrar el desplazamiento  $y(t)$  de la masa, siendo el problema que rige las vibraciones del resorte:

$$y'' + 9y = 3\delta(t - \pi), y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

6. Se considera la ecuación del resorte en ausencia de fuerza de amortiguación. Resolver dicha ecuación, si se tienen las condiciones iniciales  $y(0) = 3, y'(0) = 0$ , y se conoce la fuerza  $p(t)$  que está actuando sobre la masa  $m$ :

$$a). p_0 e^{-5t}, \quad b). p_0 u(t - \pi), \quad c). \cos t.$$

7. Resolver el problema que modela el paso de corriente en un circuito en el que un impulso de voltaje es aplicado en el instante  $\pi$ :

$$y'' + 2y' + 2y = 3\delta(t - \pi), y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

8. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

siendo la función  $f$  definida:

a).

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ ó } t > 2, \end{cases}$$

b).

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9. Resolver los problemas de Cauchy:

$$y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$y'' + y = e^{-2t} \sin t, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$y'' + y = t \sin t, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$y'' - 2y' + 2y = te^t \sin t, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

10. Resolver los problemas de Cauchy para sistemas:

a).

$$\begin{cases} y + z' = e^{-t} \\ 3y + y' = z - 3z' \\ y(0) = 1, z(0) = 1. \end{cases}$$

b).

$$\begin{cases} y'' - z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \\ y(0) = 3, y'(0) = -2, z(0) = 3. \end{cases}$$

11. Resolver la ecuación integrodiferencial:

$$5 \int_0^t e^u \cos 2(t-u) Y(u) du = e^t (Y'(t) + Y(t)) - 1, Y(0) = 0.$$

12. Resolver las ecuaciones integrales:

$$Y(t) = t + \int_0^t \cos(t-u) Y(u) du.$$

$$Y(t) = e^t - \int_0^t (t-u)^2 Y(u) du.$$

13. Resolver: a). El problema de Cauchy:

$$t^2 y'' + t(2t + 1)y' + (2t^2 + t - 1)y = 0, y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

b). La ecuación de Bessel:

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

(Indicación: Utilizar para ello las *funciones de Bessel de primera clase*  $J_i(t)$ , problema 4, y la propiedad 10 de la transformación de Laplace).

### Referencias Bibliográficas

Al igual que en el capítulo 1, es extensa la bibliografía que se puede recomendar para consultar y profundizar en tópicos relacionados con este capítulo. Citamos, de nuevo, los libros [3], [19] y [31] como libros de consulta para todo el capítulo y [2], [20] y [21] como libros típicos de problemas. Otro libro de consulta a un nivel sencillo para las secciones 2.3-2.4 es [24]. Sobre resultados de existencia y unicidad de solución (i.e., en relación a la sección 2.2) puede profundizarse en [14], [15] y [26], y, sobre métodos numéricos en [11] y [17], por ejemplo. [5], [9] y [36] nos proporcionan multitud de interesantes modelos matemáticos en los que intervienen ecuaciones del tipo de las estudiadas a lo largo del capítulo y abordados con las técnicas del mismo. La sección 2.6 está ampliamente abordada en [7], y la sección 2.7 en [34].

## Capítulo 3

# Sistemas diferenciales de ecuaciones lineales.

### 3.1. Introducción.

Se ha visto en el capítulo 2 que cuando se tienen varias ecuaciones diferenciales relacionadas entre sí, y en ellas aparecen *varias funciones incógnitas*,  $y_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , en lugar de una sólo, se tiene un *sistema diferencial de primer orden*. Se trata de un *sistema diferencial de primer orden* cuando sólo aparecen las derivadas primeras,  $y'_i$ , de las funciones incógnitas, y de un *sistema diferencial de orden  $k$*  si aparecen las derivadas de  $y_i$  hasta el orden  $k$ . También se vió en la sección 2.2 como reducir una ecuación de segundo orden a un sistema de primer orden con dos ecuaciones. Esto se puede generalizar a ecuaciones de orden  $n$ : Una ecuación escrita en forma normal,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

se reduce a un sistema de  $n$  ecuaciones haciendo el cambio:  $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ . Tenemos así

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right.$$

Evidentemente, este método de pasar ecuaciones de orden  $n$  a sistemas de primer orden, nos permite también reducir sistemas de orden  $k$  a sistemas de primer orden con un número superior de ecuaciones. Por tanto, nos ocupamos aquí de los de primer orden. Un sistema de primer orden con  $n$  ecuaciones en *forma normal* es:

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

El problema de Cauchy asociado, es el problema de encontrar una solución de (3.1) que verifique

$$y_1(x_0) = y_0^1, y_2(x_0) = y_0^2, \dots, y_n(x_0) = y_0^n, \quad (3.2)$$

siendo  $(x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$  un punto perteneciente al dominio  $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$  de definición de las funciones  $f_i$ . Cuando las funciones  $f_i$  son de la forma  $f_i = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \dots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$  se dice que el sistema es *lineal*:

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

Evidentemente, la solución general de un sistema dependerá de  $n$  constantes. Si los coeficientes de (3.3),  $a_{ij}$ , son constantes  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , se denomina *sistema lineal con coeficientes constantes*.

El conjunto de funciones  $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$  se dice que es una *solución* del problema (3.1)-(3.2) en un intervalo  $(\alpha, \beta)$  cuando  $\varphi_i$  son continuas y derivables en  $(\alpha, \beta)$  y satisfacen las ecuaciones (3.1) en  $(\alpha, \beta)$  y además

$$\varphi_1(x_0) = y_0^1, \varphi_2(x_0) = y_0^2, \dots, \varphi_n(x_0) = y_0^n.$$

A raíz de la conversión de una ecuación de orden  $n$  en un sistema diferencial de primer orden con  $n$  ecuaciones, es evidente que un sistema diferencial de orden  $k$  se puede reducir a uno de primer orden

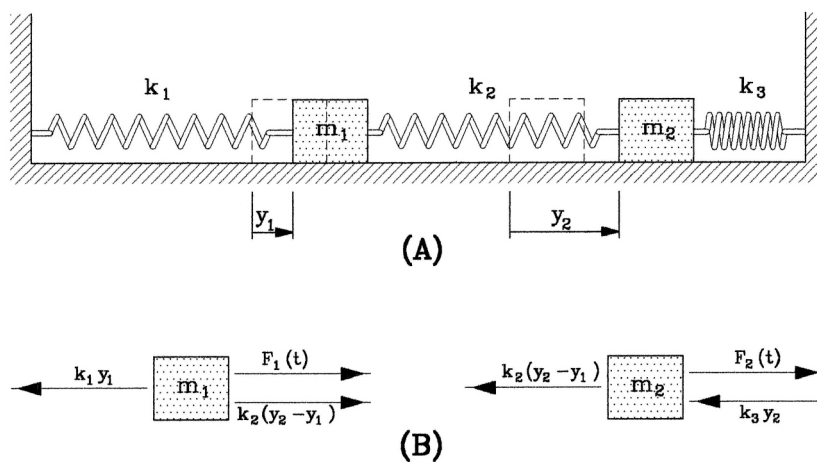
con un número superior de ecuaciones (ver ejemplo 31). Así pues, por abuso de notación, si no hay lugar a dudas, los sistemas diferenciales lineales de primer orden con  $n$  ecuaciones serán denominados sistemas diferenciales con  $n$  ecuaciones (también, sistemas con  $n$  ecuaciones). Los principales resultados de existencia y unicidad para sistemas los damos a continuación:

**Teorema 10** *Cuando todas las funciones  $f_i$  de (3.1) son continuas en  $D$ , así como sus derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , y se considera  $(x_0, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n) \in D$ , entonces, existe un intervalo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  en el que la solución del problema de Cauchy (3.1)-(3.2) es única.*

**Teorema 11** *Cuando todas las funciones  $a_{ij}, b_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , de (3.3) son continuas en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ ,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $y, (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$  es cualquier punto de  $\mathbf{R}^n$ , entonces, existe una única solución de (3.3)-(3.2) definida en  $(\alpha, \beta)$ .*

Ejemplos de modelos matemáticos gobernados por sistemas de ecuaciones lineales son, por ejemplo, los que modelan el paso de la corriente a través de varios circuitos acoplados en serie, las vibraciones de dos o más resortes enganchados entre sí y los modelos de crecimiento de poblaciones presa-depredador.

**Ejemplo 31** Se consideran dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, sujetos a tres muelles, tal como indica la figura 39, de constantes de recuperación  $k_1, k_2, k_3$  respectivamente. Los cuerpos se mueven en un plano horizontal y están sometidos a fuerzas  $F_1(t), F_2(t)$ , respectivamente, y se supone que la fuerza de amortiguación es despreciable. Aplicamos la ley de Newton para deducir las ecuaciones que rigen el movimiento de los dos cuerpos.



**Figura 39** *Movimiento del sistema masas-resortes acoplados.*

Si denotamos por  $y_1(t)$  el desplazamiento del primer bloque y por  $y_2(t)$  el del segundo (ver figura 39), observamos que, sobre el primer cuerpo, las fuerzas que actúan son la fuerza de recuperación del primer muelle,  $-k_1 y_1$ , la fuerza de recuperación del segundo  $k_2(y_2 - y_1)$  y  $F_1(t)$ . Sobre el segundo cuerpo actúan la fuerza de recuperación del segundo muelle  $-k_2(y_2 - y_1)$ ,  $F_2(t)$ , y la fuerza de recuperación del tercer muelle  $-k_3 y_2$ . Así las ecuaciones buscadas son:

$$m_1 y_1'' = k_2(y_2 - y_1) - k_1 y_1 + F_1(t)$$

$$m_2 y_2'' = -k_3 y_2 - k_2(y_2 - y_1) + F_2(t)$$

y sacando factor común a  $y_1$  e  $y_2$  en el lado derecho de la ecuación, y haciendo los cambios  $z_1 = y_1$ ,  $z_2 = y_1'$ ,  $z_3 = y_2$ ,  $z_4 = y_2'$ , tenemos un sistema del tipo (3.3) con cuatro ecuaciones y coeficientes constantes:

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -\frac{k_2 + k_1}{m_1} z_1 + \frac{k_2}{m_1} z_3 + \frac{F_1(t)}{m_1}$$

$$z_3' = z_4$$

$$z_4' = \frac{k_2}{m_2} z_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} z_3 + \frac{F_2(t)}{m_2}.$$

□

### 3.2. Sistemas diferenciales lineales con $n$ ecuaciones.

La teoría general para sistemas lineales es totalmente análoga a la expuesta en el capítulo 2 para ecuaciones lineales. Damos aquí las propiedades de las soluciones sin demostración: Una demostración de éstas, a un nivel sencillo, puede encontrarse en [24], por ejemplo. La exposición que hacemos aquí es alterada en muchos libros, donde la teoría para ecuaciones es una consecuencia de la teoría para sistemas. En cuanto a los sistemas lineales de coeficientes constantes una exposición, más amplia y quizás más rigurosa, alternativa a la que damos aquí puede encontrarse en [5], [24] y [36], por ejemplo, basada, en los dos últimos, en la reducción de una matriz en su forma canónica de Jordan. El resto de la bibliografía recomendada es la del capítulo 2.

Por conveniencia, escribiremos el sistema (3.3) en forma matricial:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x), \quad (3.4)$$

siendo  $A(x)$  la matriz definida:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

y por  $\bar{y}, \bar{b}$  denotamos los vectores columna:

$$\bar{y}(x) = (y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x))^T, \text{ y } \bar{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))^T,$$

respectivamente. A lo largo de este capítulo supondremos que todos los coeficientes  $a_{i,j}, b_j$  son funciones continuas definidas en el intervalo  $I = (\alpha, \beta)$ . El problema de Cauchy correspondiente a (3.4) es:

$$\begin{cases} \bar{y}' &= A(x)\bar{y} + \bar{b}(x), \\ \bar{y}(x_0) &= \bar{y}_0, \end{cases}$$

con  $x_0 \in I, \bar{y}_0 \in \mathbf{R}^n$ .



Como para las ecuaciones lineales, se demuestra fácilmente que la solución general de (3.4) es de la forma:

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_{GH}(x) + \bar{y}_p(x), \quad (3.6)$$

donde  $\bar{y}_p(x)$  es una solución particular de (3.4), mientras que  $\bar{y}_{GH}(x)$  es la solución general del sistema homogéneo asociado:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y}. \quad (3.7)$$

Así pues, estudiamos a partir de ahora la estructura de la solución general de este sistema. Exponemos a continuación, sin demostración, las propiedades. Antes, para poner de manifiesto la analogía con las ecuaciones lineales, comenzamos con un ejemplo del que ya nos ocupamos en el capítulo anterior.

**Ejemplo 32** La ecuación diferencial de segundo orden  $y'' + y = 0$  tiene por familia de soluciones  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$  (ver también ejemplo 20, del capítulo 2). El sistema asociado es:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y, \end{cases}$$

donde  $y' = z$ , y por tanto, la solución del sistema es  $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ,  $z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$ . A esta misma solución llegamos si buscamos la solución del sistema de la forma:  $\bar{y} = e^{\lambda x} \bar{c}$ , con  $\bar{c}$  un vector constante  $(a_1, a_2)^T$ . Derivando  $e^{\lambda x} \bar{c}$  y reemplazando en el sistema se llega a que  $\lambda$  y  $\bar{c}$  deben verificar la relación

$$(A - \lambda \mathcal{I})\bar{c} = 0,$$

donde  $A$  es la matriz del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e  $\mathcal{I}$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Es decir,  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $\bar{c}$  es el vector propio asociado.

Se demuestra  $\lambda = \pm i$ , y  $\bar{c}$ , por ejemplo,  $(1, \pm i)^T$ . Así, considerando una de las raíces  $\lambda = i$ ,  $\bar{c} = (1, i)^T$ , separamos parte real e imaginaria

en  $e^{\lambda x} \bar{c}$  y se tienen las soluciones del sistema:  $\bar{y}_1 = (\cos x, -\sin x)^T$  y  $\bar{y}_2 = (\sin x, \cos x)^T$  que verifican

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2](x) = W[y_1^1, y_2^1](x) = W[\cos x, \sin x](x) = 1 \neq 0.$$

La solución general del sistema es  $\bar{y}(x) = c_1 \bar{y}_1(x) + c_2 \bar{y}_2(x)$ . Se demuestra (como se hizo para una ecuación diferencial en el ejemplo 24), utilizando el teorema 11, que cualquier otra solución es combinación lineal de las dos soluciones encontradas  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$ :

Sea  $\bar{\varphi}$  otra solución, que en el punto  $x = 0$  tomará el valor  $\bar{\varphi}(0) = (\varphi^1(0), \varphi^2(0))^T$ . Se considera la solución  $\bar{y}(x) = c_1 \bar{y}_1(x) + c_2 \bar{y}_2(x)$  que en  $x = 0$  toma el valor  $c_1 \bar{y}_1(0) + c_2 \bar{y}_2(0)$ . Tomando  $c_1, c_2$  tales que  $c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \varphi^1(0)$  y  $c_1(-\sin 0) + c_2 \cos 0 = \varphi^2(0)$  (en este caso,  $c_1 = \varphi^1(0)$  y  $c_2 = \varphi^2(0)$ ), se tiene que  $\bar{y}(x)$  y  $\bar{\varphi}(x)$  son la solución del mismo problema de Cauchy. Por tanto, el teorema 11 nos garantiza que ambas soluciones coinciden en  $(-\infty, \infty)$ . Se dice que  $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2\}$  forman un *conjunto fundamental de soluciones* en  $(-\infty, \infty)$ .  $\square$

La noción de  $n$  funciones linealmente independientes se extiende sin dificultad a  $n$  funciones vectoriales: Se dice que  $k$  funciones  $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_k(x)$  son *linealmente independientes* en el intervalo  $I$  cuando

$$\text{Si } \alpha_1 \bar{\varphi}_1(x) + \alpha_2 \bar{\varphi}_2(x) + \dots + \alpha_k \bar{\varphi}_k(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Se dice que las funciones son *linealmente dependientes* cuando no son linealmente independientes, es decir una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras.

Dadas  $n$  funciones definidas en  $I$ ,  $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_n(x)$ , se define la función *Wronskiano* de  $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_n(x)$  como:

$$W[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \varphi_2^1(x) & \dots & \varphi_n^1(x) \\ \varphi_1^2(x) & \varphi_2^2(x) & \dots & \varphi_n^2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(x) & \varphi_2^n(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix}.$$

A continuación enunciamos las propiedades fundamentales de las soluciones de los sistemas lineales. Todas estas propiedades podrían enunciarse como una proposición o un teorema; algunas de ellas son consecuencia inmediata de las otras. Omitimos aquí la demostración de todas ellas.

### Propiedades de la solución del sistema homogéneo

1. Si  $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_k(x)$  son soluciones de (3.7) en  $I$ , entonces cualquier combinación lineal de ellas  $\alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \dots + \alpha_k\bar{y}_k(x)$  es también solución de (3.7) en  $I$  ( $\alpha_i$  son constantes cualesquiera).
2.  $n$  soluciones  $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$  de (3.7) son linealmente independientes en  $I$  si y sólo si  $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0, \forall x_0 \in I$ .
3. Dadas  $n$  soluciones  $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$  de (3.7) linealmente independientes en  $I$ , cualquier otra solución  $\bar{y}(x)$  se escribe de la forma:

$$\bar{y}(x) = \alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \dots + \alpha_n\bar{y}_n(x), \forall x \in I,$$

para algunas constantes  $\alpha_i$ . Se dice que  $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$  forman un *conjunto fundamental de soluciones de (3.7) en  $I$* . Esta propiedad, así como la anterior, son consecuencia inmediata del teorema 11.

4.  $n$  soluciones  $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$  de (3.7) son linealmente independientes en  $I$  cuando para cualquier punto  $x_0 \in I$ , los vectores  $\bar{y}_1(x_0), \bar{y}_2(x_0), \dots, \bar{y}_n(x_0)$  de  $\mathbf{R}^n$  son linealmente independientes.
5. Dado un punto cualquiera  $x_0 \in I$ , y  $n$  soluciones de (3.7) se tiene, para  $x \in I$ , la identidad:

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) = \exp\left(\int_{x_0}^x \text{Traza}(A(s))ds\right)W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x_0).$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de *Identidad de Abel* y nos permite deducir que el Wronskiano de  $n$  soluciones de (3.7), o bien es idénticamente cero en  $I$ , o bien no se anula en ningún punto de  $I$ .

6. Sean  $\{\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)\}$   $n$  soluciones de (3.7) en  $I$ , son linealmente independientes si y sólo si  $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$ , siendo  $x_0$  un punto fijo, cualquiera, de  $I$ . Esta propiedad es consecuencia de las propiedades 4 y 5.

7. Hay  $n$  soluciones linealmente independientes de (3.7) en  $I$ , y no más. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad 4 y de que en  $\mathbf{R}^n$  hay  $n$  vectores linealmente independientes,  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ ; basta con tomar  $n$  soluciones del sistema homogéneo (3.7),  $x_0 \in I$ , e  $\bar{y}_i$  verificando cada una de ellas la condición inicial  $\bar{y}_i(x_0) = \bar{e}_i$ , es decir solución de (3.7) con condición inicial  $\bar{y}_0 = \bar{e}_i$ .

**Observación 3** Se observa que el conjunto de soluciones del sistema (3.7) forman un espacio vectorial, de dimensión  $n$ , con las operaciones usuales de suma de vectores y multiplicación por escalares.  $n$  soluciones linealmente independientes forman una base de este espacio.  $\square$

### 3.3. Sistema homogéneo con coeficientes constantes.

A continuación encontramos la solución general de un sistema lineal de coeficientes constantes. Esbozamos la demostración para un sistema de dos ecuaciones y escribimos, sin más, cómo encontrar la solución para un sistema con  $n$  ecuaciones.

#### Sistema homogéneo con dos ecuaciones.

Se considera el sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{cases}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  son constantes. El sistema escrito en forma matricial es:

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

donde  $A$  es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & , & a_{12} \\ a_{21} & , & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se busca la solución de la forma  $e^{\lambda x}\bar{c}$ . Substituyendo en el sistema, tal como se hizo en el ejemplo 31, se tiene que  $\lambda$  debe ser un valor propio de  $A$  y  $\bar{c}$  un vector propio asociado. Las posibilidades son:

1. Hay dos valores propios de  $A$ , reales y distintos,  $\lambda_1, \lambda_2$ . Sean  $\bar{c}_1$  un vector propio asociado a  $\lambda_1$  y  $\bar{c}_2$  un vector propio asociado a  $\lambda_2$ . Se sabe, de la teoría de valores y vectores propios para matrices, que  $\bar{c}_1$  y  $\bar{c}_2$  son vectores linealmente independientes. Por tanto, la propiedad 4 nos permite asegurar que las soluciones  $\bar{y}_1 = e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1$ ,  $\bar{y}_2 = e^{\lambda_2 x} \bar{c}_2$  son linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$ . Así pues,  $\{e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1, e^{\lambda_2 x} \bar{c}_2\}$  es un conjunto fundamental de soluciones del sistema.
2. Hay un valor propio de  $A$ , real, de multiplicidad 2,  $\lambda_1 = \lambda_2$ . En el caso de que haya dos vectores propios linealmente independientes,  $\bar{c}_1$  y  $\bar{c}_2$ , asociados a  $\lambda_1$ , el conjunto  $\{e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1, e^{\lambda_1 x} \bar{c}_2\}$  forma un conjunto fundamental de soluciones del sistema. En el caso de que sólo hay un vector propio,  $\bar{c}_1$ , linealmente independiente asociado a  $\lambda_1$ , una solución es  $e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1$ . Se busca la otra linealmente independiente de la forma  $\bar{y}_2 = (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2) e^{\lambda_1 x}$ . Se deriva  $\bar{y}_2$  y se substituye en el sistema  $\bar{y}' = A\bar{y}$ . Igualando coeficientes de las distintas potencias de  $x$  se tienen los siguientes sistemas que nos determinan  $\bar{a}_1$  y  $\bar{a}_2$ :

$$(A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_1 = 0 \text{ y } (A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

Evidentemente,  $\bar{c}_1 = \bar{a}_1$ , y  $\bar{a}_2$ , la solución de  $(A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_2 = \bar{a}_1$ , son vectores linealmente independientes, y  $\{\bar{c}_1 e^{\lambda_1 x}, (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2) e^{\lambda_1 x}\}$  forman un conjunto fundamental de soluciones.

3. Los valores propios de  $A$  son complejos conjugados. En este caso, los vectores propios correspondientes a  $\lambda$ , y a su conjugado, son también vectores de componentes números complejos conjugados. Las dos soluciones reales linealmente independientes, asociadas a  $\lambda$ , se obtienen calculando la parte real e imaginaria de  $e^{\lambda x} \bar{c}$ . El conjunto fundamental de soluciones está dado por:  $\{Re(e^{\lambda x} \bar{c}), Im(e^{\lambda x} \bar{c})\}$ .

### Sistema homogéneo con $n$ ecuaciones.

Generalizamos los resultados obtenidos para un sistema con dos ecuaciones a uno de  $n$ . La base de esta generalización hay que buscarla

en la reducción de la matriz del sistema,  $A$ , a su forma canónica del Jordan. Dado el sistema

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

donde  $A$  es ahora la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se busca la solución de la forma:  $e^{\lambda x} \bar{c}$ . Se demuestra que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $\bar{c}$  un vector propio asociado. Sean los valores propios de este sistema  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  en el cuerpo de los números complejos. Las posibilidades que pueden ocurrir son:

1. Se trata de  $n$  valores propios reales distintos. Para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , sea  $\bar{c}_i$  el vector propio asociado a  $\lambda_i$ . Entonces, el conjunto fundamental de soluciones del sistema está dado por:

$$\{e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1, e^{\lambda_2 x} \bar{c}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \bar{c}_n\}.$$

2. Hay algún valor propio complejo  $\lambda_i$  simple. Entonces su conjugado  $\bar{\lambda}_i$  también es valor propio y los vectores propios asociados son conjugados uno del otro. Para este valor propio hay dos soluciones reales linealmente independientes asociadas:

$$\{Re(e^{\lambda_i x} \bar{c}_i), Im(e^{\lambda_i x} \bar{c}_i)\}.$$

3. Hay un valor propio  $\lambda_i$  real o complejo de multiplicidad  $k$ . Supongamos primero que es real y que hay  $l$  vectores propios linealmente independientes con  $l \leq k$ .  $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \dots, \bar{c}_{i_l}$ . Entonces,

$$\{e^{\lambda_i x} \bar{c}_{i_1}, e^{\lambda_i x} \bar{c}_{i_2}, \dots, e^{\lambda_i x} \bar{c}_{i_l}\}$$

son  $l$  soluciones linealmente independientes asociadas a  $\lambda_i$ . Si  $k = l$ , éstas son todas las que buscamos. Si  $l < k$ , obtenemos las  $k - l$  soluciones restantes linealmente independientes buscando soluciones de la forma:  $(\bar{a}_1 x + \bar{a}_2) e^{\lambda_i x}$ ,  $(\bar{d}_0 x^2 + \bar{d}_1 x + \bar{d}_2) e^{\lambda_i x}$ ,  $\dots$ ,  $(\bar{f}_0 x^{k-l-1} +$

$\cdots + \bar{f}_{k-l-1}x + \bar{f}_{k-l})e^{\lambda_i x}$ , donde los coeficientes  $\bar{a}_j, \bar{d}_j, \cdots, \bar{f}_j$  pueden ser 0 y se obtienen por sustitución directa en el sistema, sin más que igualar coeficientes de distintas potencias de  $x$ .

Hay que observar que para  $k \geq 4$  el proceso puede resultar complicado.

En el caso de que  $\lambda_i$  sea complejo se procede como en el caso real, pero ahora, los vectores  $\bar{c}_i, \bar{a}_i, \bar{d}_i, \cdots, \bar{f}_i$  tienen componentes números complejos. Separando parte real e imaginaria en las soluciones buscadas antes, se tienen en total  $2k$  soluciones linealmente independientes asociadas a este valor propio y a su conjugado.

El hecho de que el método descrito en la posibilidad 2 cuando  $n = 2$ , y en la posibilidad 3 cuando  $n > 2$ , nos permita encontrar  $k$  soluciones linealmente independientes, asociadas al valor propio  $\lambda_i$  de multiplicidad  $k$ , es una consecuencia del siguiente resultado del Algebra Lineal (ver [5], por ejemplo):

**Proposición 2** *Supongamos que la ecuación  $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$  tiene  $p$  raíces distintas,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$ , con multiplicidades  $n_1, n_2, \cdots, n_p$  respectivamente. Supongamos que  $A$  tiene  $\nu_i < n_i$  vectores propios linealmente independientes asociados al valor propio  $\lambda_i$ . Entonces, la ecuación  $(A - \lambda_i\mathcal{I})^2\bar{c} = 0$  tiene al menos  $\nu_i + 1$  soluciones linealmente independientes. Más generalmente, si la ecuación  $(A - \lambda_i\mathcal{I})^m\bar{c} = 0$  tiene sólo  $m_i < n_i$  soluciones linealmente independientes, entonces  $(A - \lambda_i\mathcal{I})^{m+1}\bar{c} = 0$  tiene al menos  $m_i + 1$  soluciones linealmente independientes.*

**Ejemplo 33** La matriz del sistema

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4, \end{cases}$$

tiene por valores propios  $\lambda = 0$ , de multiplicidad 1, y  $\lambda = -1$ , de multiplicidad 3.  $\lambda = 0$  tiene un vector propio asociado:  $(1, 0, 1, 0)^T$ ; la solución asociada es a  $\lambda = 0$  es justamente este vector constante, puesto que  $e^{0x} = 1$ .

$\lambda = -1$  tiene un solo vector propio asociado linealmente independiente  $(1, -1, 0, 0)^T$ . Una solución correspondiente a  $\lambda = -1$  es  $e^{-x}(1, -1, 0, 0)^T$ . Otras dos soluciones linealmente independientes, asociadas a dicho valor propio, se buscan de la forma:  $(\bar{a}_0 + \bar{a}_1x)e^{-x}$ ,  $(\bar{b}_0 + \bar{b}_1x + \bar{b}_2x^2)e^{-x}$ . Se demuestra que

$$(A + \mathcal{I})\bar{a}_1 = 0, (A + \mathcal{I})\bar{a}_0 = \bar{a}_1,$$

$$(A + \mathcal{I})\bar{b}_2 = 0, (A + \mathcal{I})\bar{b}_1 = 2\bar{b}_2, (A + \mathcal{I})\bar{b}_0 = \bar{b}_1.$$

Así, se calculan recursivamente los coeficientes y se tiene que la solución general es:

$$\bar{y} = \alpha(1, 0, 1, 0)^T + e^{-x}(\beta(1, -1, 0, 0)^T + \gamma((1, -1, 0, 0)^T x + (1, 0, 1, -1)^T) + \delta((1, -1, 0, 0)^T x^2 + (2, 0, 2, -2)^T x + (1, 1, 4, -2)^T),$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  constantes. Evidentemente las cuatro soluciones buscadas son linealmente independientes en  $(-\infty, \infty)$ , dado que su Wronskiano en el punto  $x = 0$  es no nulo.  $\square$

**Observación 4** Evidentemente, hay otros métodos de resolución de sistemas lineales de coeficientes constantes como puede ser su reducción a una ecuación diferencial de orden  $n$ , reducir el sistema de orden  $n$  (ver ejercicios 3 y 6 – c.), el uso de la transformada de Laplace (ver ejercicio 10 de la sección 2.7, capítulo 2). Nosotros no abordamos aquí estos métodos, sin embargo, debemos destacar el interés del uso de la transformada de Laplace para sistemas no homogéneos en los cuales intervienen funciones discontinuas, como las funciones salto o Delta de Dirac. La transformada de Laplace puede resultar también útil para sistemas con coeficientes polinómicos.  $\square$

### 3.4. Sistema no homogéneo.

A raíz de los resultados de la sección 3.2, si se conocen  $n$  soluciones de (3.7),  $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$ , linealmente independientes en  $I$ , la solución general de (3.4) es:

$$\alpha_1 \bar{y}_1(x) + \alpha_2 \bar{y}_2(x) + \dots + \alpha_n \bar{y}_n(x) + \bar{y}_p(x),$$



donde los  $\alpha_i$  son constantes y  $\bar{y}_p(x)$  es una solución particular de (3.4). En esta sección encontramos la solución particular aplicando el método de variación de parámetros. Utilizamos para ello, por comodidad, notación matricial. Dadas  $n$  soluciones de (3.7), se denomina *matriz solución* del sistema homogéneo a una matriz cuyas columnas son vectores solución:

$$\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)).$$

Así, cuando las  $n$  soluciones son linealmente independientes, la solución general del sistema (3.7) se puede expresar como  $\bar{y}(x) = \Phi(x) \cdot \bar{k}$ , con  $\bar{k}$  un vector constante ( $n \times 1$ ). Si las soluciones son linealmente independientes, se dice que  $\Phi$  es una *matriz fundamental* del sistema. Como el determinante de  $\Phi(x)$  es justamente el Wronskiano:  $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x)$ , una matriz solución es matriz fundamental si y sólo si su determinante en un punto cualquiera del intervalo  $I$  es no nulo (ver propiedad 6 en la sección 3.2). Evidentemente, una matriz solución verifica:

$$\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x)$$

(ver ejercicios 7 – 8 para propiedades útiles de la matriz fundamental en el caso de que  $A$  sea una matriz constante).

Como para ecuaciones lineales, el método de variación de parámetros consiste en encontrar la solución particular de (3.4) de la forma:

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x) \cdot \bar{c}(x) = c_1(x)\bar{y}_1(x) + c_2(x)\bar{y}_2(x) + \dots + c_n(x)\bar{y}_n(x), \quad (3.8)$$

donde  $\Phi(x)$  es una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado y  $\bar{c}(x)$  es una función vectorial,  $(c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x))^T$ , a determinar derivando en la ecuación (3.8) y substituyendo en (3.4). Se tiene que  $\bar{c}'(x)$  verifica la ecuación:

$$\Phi(x) \cdot \bar{c}'(x) = \bar{b}(x).$$

Puesto que  $\Phi(x)$  es una matriz invertible. Despejando  $\bar{c}'(x)$ , e integrando, tenemos que la solución particular es

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x) \cdot \int \Phi(x)^{-1} \cdot \bar{b}(x) dx, \quad (3.9)$$

y la solución general del sistema (3.4) es

$$\bar{y}(x) = \Phi(x) \cdot (\bar{k} + \int \Phi(x)^{-1} \cdot \bar{b}(x) dx), \quad (3.10)$$

siendo  $\bar{k}$  un vector constante.

**Ejemplo 34** Un sistema de tipo Euler es uno de la forma:

$$\begin{cases} xy'_1 &= y_1 + 3y_2 + x^4 \\ xy'_2 &= -y_1 + 5y_2 + x^5 e^x. \end{cases}$$

(Ver ejercicios 5–6 para casos más generales). Sea  $\tilde{A}$  la matriz constante

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & , & 3 \\ -1 & , & 5 \end{pmatrix}.$$

Para reducir el sistema a uno de la forma (3.4), hay que dividir por el coeficiente,  $x$ , de la derivada. Así, la matriz del nuevo sistema es de coeficientes variables:

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & , & \frac{3}{x} \\ -\frac{1}{x} & , & \frac{5}{x} \end{pmatrix},$$

mientras que el término independiente es  $\bar{b}(x) = (x^3, x^4 e^x)^T$ . Los coeficientes de nuevo sistema son ahora funciones continuas en  $(0, \infty)$ . Se sabe que una solución del sistema homogéneo es de la forma  $\bar{y} = x^r \bar{c}$ . Derivando y substituyendo en el sistema

$$\begin{cases} xy'_1 &= y_1 + 3y_2 \\ xy'_2 &= -y_1 + 5y_2, \end{cases}$$

se demuestra que  $r$  debe ser un valor propio asociado a la matriz constante  $\tilde{A}$  de este sistema, y  $\bar{c}$  el vector propio correspondiente. Así, dos soluciones linealmente independientes en  $(0, \infty)$  son:  $x^4(1, 1)^T, x^2(3, 1)^T$ . Una matriz fundamental es

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 & , & x^4 \\ x^2 & , & x^4 \end{pmatrix}.$$

Aplicando ahora la fórmula (3.10), se tiene que la solución general del sistema dado es:

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 c_1 + x^4 c_2 \\ x^2 c_1 + x^4 c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x^2 & , & x^4 \\ x^2 & , & x^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{4} + \frac{e^x(-\frac{x^2}{2} + x - 1)}{2} \\ -\frac{\log x}{2} + \frac{3}{2}e^x \end{pmatrix}.$$

Si se imponen más condiciones iniciales al sistema no homogéneo, por ejemplo  $\bar{y}(1) = (0, 0)^T$ , se determinan las constantes en la solución general:  $c_2 = -\frac{3e}{2}$ ,  $c_1 = \frac{-1+2e}{4}$ . La solución del sistema que verifica  $\bar{y}(1) = (0, 0)^T$  es única en  $(0, \infty)$ .  $\square$

**Observación 5** A lo largo del capítulo se han resuelto sistemas homogéneos de coeficientes constantes y otros que se reducen a ellos. Cuando los coeficientes del sistema son "analíticos", se puede intentar resolver buscando soluciones en forma de series de potencias (ver ejercicios 9 y 11 de la sección 2.6, capítulo 2). Cuando los coeficientes del sistema son periódicos, la *Teoría de Floquet* nos garantiza que estos sistemas pueden reducirse a uno de coeficientes constantes (ver ejercicio 10), pero en la práctica, en general, es difícil hacer esta reducción. Un estudio detallado de esta teoría puede verse por ejemplo en [26] y, principalmente, en [36].  $\square$

### EJERCICIOS.

1. Demostrar que existen exactamente 2 soluciones linealmente independientes en  $(a, b)$  del sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases}$$

siendo los coeficientes  $a_{ij}$  funciones continuas en  $(a, b)$ .

2. Resolver los siguientes sistemas lineales de coeficientes constantes:

$$a). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \bar{y}, \quad b). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \bar{y},$$

$$c). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{y}, \quad d). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \bar{y},$$

$$e). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}, \quad f). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \bar{y},$$

$$g). y_1' = y_1, \quad y_2' = y_2, \quad h). y_1' = 2y_1, \quad y_2' = 2y_1 + y_2$$

$$i). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \bar{y}, j). \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \bar{y},$$

$$k). y_1'' = y_2, y_2'' = y_1$$

$$l). \begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_1 - 3y_3 \\ y_3' = y_2 + 3y_3, \end{cases} \quad m). \begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_2 + y_3 \\ y_3' = 4y_3 \\ y_4' = 4y_4 \\ y_5' = 4y_5, \end{cases}$$

$$n). \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = 2y_1 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}, \quad o). \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

$$p). \begin{cases} z'' + z' + y' - 2y = 0 \\ z' - y' + z + x = 0 \end{cases}, \quad q). \begin{cases} z'' = 3z + 4y \\ y'' = -z - y \end{cases}$$

3. Reducir el ejercicio 2 - k). a una ecuación diferencial y resolver. Demostrar que se obtiene el mismo resultado que resolviendo el sistema.

4. Resolver los siguientes sistemas de coeficientes constantes no homogéneos:

$$a). \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3 + e^x \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3 + e^{3x} \\ y_3' = y_1 + y_2 + y_3 + 4 \end{cases}, \quad b). \begin{cases} y_1' + y_2' = e^{-x} - y_2 \\ 2y_1' + y_2' = \sin x - 2y_2 \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} mz'' = -mg - mkz' \\ my'' = 0 \end{cases}, \quad k). \begin{cases} y' = -2y - z + x \\ z' = -4y + z + e^x \\ y(0) = 3, \quad z(0) = 1 \end{cases}$$

5. Buscar una solución del sistema  $x\bar{y}' = A\bar{y}$  en  $(0, \infty)$  de la forma  $\bar{y} = x^r \bar{c}$  con  $\bar{c}$  un vector constante. Supuesto que se ha encontrado una matriz fundamental de dicho sistema, resolver el sistema no homogéneo  $x\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{b}(x)$ , utilizando el método de variación de parámetros.

6. Resolver los sistemas de tipo Euler, buscando soluciones del sistema homogéneo de la forma  $y = x^r \bar{c}$ :

a). El sistema no homogéneo:

$$\begin{cases} xy'_1 &= y_1 - y_2 + x^3 \\ xy'_2 &= -y_1 + y_2 \end{cases}$$

b). El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} xy'_1 &= -3y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ xy'_2 &= y_1 + y_3 \\ xy'_3 &= 6y_1 - 6y_2 + 5y_3 \\ y_1(1) &= 1, \quad y_2(1) = 0, \quad y_3(1) = 0. \end{cases}$$

c). Encontrar una solución,  $\bar{y} = x^r \bar{c}$ , de

$$\begin{cases} xy'_1 &= y_1 \\ xy'_2 &= y_1 + y_2. \end{cases}$$

Considerar el cambio de variable:  $\bar{y} = (\bar{e}_1, x^r \bar{c}) \bar{z}$ , donde  $\bar{e}_1 = (1, 0)^T$ , para reducir el orden del sistema, y resolver.

7. Dada una matriz fundamental  $\Phi(x)$  del sistema homogéneo (3.7), demostrar:

a). Cualquier solución del sistema es de la forma  $\bar{y}(x) = \Phi(x) \bar{c}$ , donde  $\bar{c}$  es un vector constante.

b). Cualquier otra matriz fundamental  $\chi(x)$  se puede escribir como  $\chi(x) = \Phi(x) M$  para alguna matriz  $M$  constante con  $\det(M) \neq 0$ .

8. Sea  $\Phi(x)$  la matriz fundamental de un sistema (3.7) con coeficientes constantes verificando  $\Phi(0) = \mathcal{I}$ . Demostrar las propiedades:

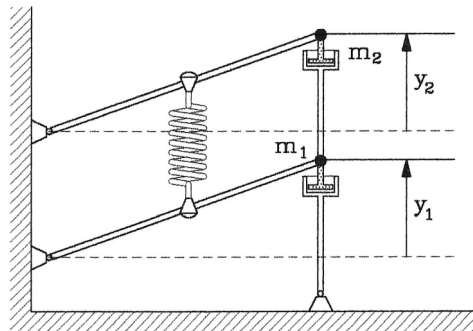
$$\Phi(x+t) = \Phi(x) \cdot \Phi(t),$$

$$\Phi(-t) = \Phi(t)^{-1},$$

$$\Phi(t-x) = \Phi(t) \Phi(x)^{-1}$$

(i.e.  $\Phi(x)$  verifica las propiedades de la matriz exponencial  $e^{Ax}$ ).

9. Demostrar que si  $A = A(x)$  es una matriz constante en el sistema (3.7), entonces  $\Phi(x) = e^{Ax}$  es una matriz fundamental tal que  $\Phi(0) = \mathcal{I}$ .
10. (Teorema de Floquet) Se considera el sistema (3.7) con  $A(x)$  una matriz periódica de periodo  $T$ :  $A(x + T) = A(x), \forall x$ . Sea  $\Phi(x)$  una matriz fundamental del sistema.
- a). Demostrar que  $\Phi(x + T)$  es también una matriz fundamental, y por tanto existe una matriz  $M$  constante con  $\det(M) \neq 0$  tal que  $\Phi(x + T) = \Phi(x).M$ .
- b). Sea  $R$  una matriz tal que  $M = e^{TR}$ , y sea la matriz  $P(x) = \Phi(x).e^{-xR}$ . Demostrar que  $P(x)$  es una matriz periódica de periodo  $T$ .
- c). Se considera el cambio  $\bar{y} = P(x)\bar{z}$  en el sistema (3.7). Demostrar que éste se reduce al sistema  $\bar{z}' = R\bar{z}$ .



**Figura 40** Movimiento esquemático de dos bloques unidos por un resorte.

11. Estudiar las vibraciones de un sistema mecánico formado por dos masas unidas por un resorte (ver figura 40), en el que las ecuaciones del movimiento están dadas por

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = d(y_2 - y_1) - k_1 y_1' + k_2 (y_2' - y_1') \\ m_2 y_2'' = d(y_1 - y_2) + k_2 (y_1' - y_2'), \end{cases}$$

donde  $d$  es proporcional a la constante de recuperación del resorte y las fuerzas de amortiguación se suponen proporcionales a la

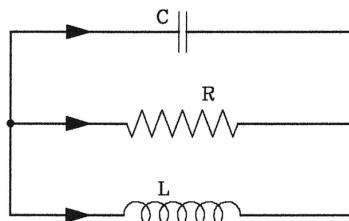
velocidad. Supuesto que todas las constantes que aparecen avalen 1,  $m_i = k_i = d = 1$ , encontrar el valor de los desplazamientos  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ .

12. El modelo matemático que describe paso de corriente eléctrica a través de un circuito  $RLC$ , como indica la figura 41, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$I'(t) = \frac{1}{L}V(t)$$

$$V'(t) = -\frac{1}{C}I(t) - \frac{1}{RC}V(t),$$

donde  $V(t)$  es la caída de voltaje a través del condensador. Suponiendo  $R = 1, C = \frac{1}{2}, L = 1$ , encontrar la solución general del sistema. Encontrar la solución que en el instante  $t = 0$  verifica,  $I(0) = 2, V(0) = 1$ . ¿A qué tienden  $I(t)$  y  $V(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ?



**Figura 41** Representación esquemática de un circuito  $RLC$  en paralelo.

### Referencias Bibliográficas

Para bibliografía recomendada, enviamos a la ya citada en el capítulo 2 y, más específicamente, a las referencias citadas a lo largo de este capítulo para algunos temas en concreto.

# Capítulo 4

## Sistemas no lineales. Plano de fases.

### 4.1. Introducción.

Dado un sistema diferencial de primer orden con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, z) \\ z' = g(t, y, z), \end{cases}$$

o una ecuación diferencial de segundo orden (la teoría puede extenderse a ecuaciones de orden  $n$ )  $y'' = F(t, y, y')$ , cuyo sistema equivalente es

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = F(t, y, z), \end{cases}$$

lo ideal es conocer las soluciones  $(y(t), z(t))$  y poderlas representar gráficamente como curvas de  $\mathbf{R}^3$ . No obstante, en general es difícil conocer la solución de estos sistemas y, análogamente a como ocurría con las ecuaciones diferenciales de primer orden, tener una idea sobre el comportamiento de estas soluciones es muy interesante. Bosquejar el campo de direcciones en este caso es evidentemente más complicado que para las ecuaciones de primer orden (véase sección 2.2 del capítulo 2), sin embargo, para determinados sistemas, *los sistemas autónomos*, la representación de la solución en el plano  $yz$  puede darnos una buena idea de cómo se comportan las soluciones. Los sistemas autónomos son

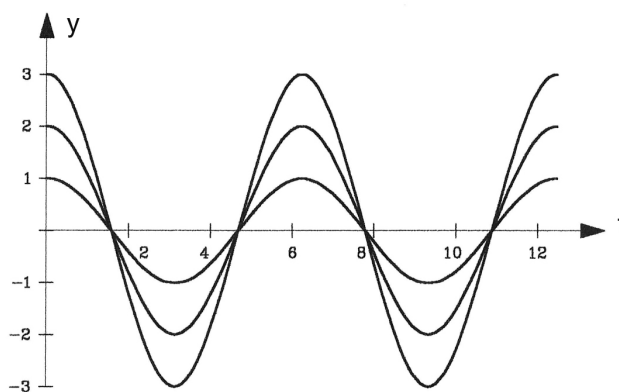


aquellos sistemas en los que no aparece una dependencia explícita del tiempo (i.e., sistemas de la forma (4.1)). El plano  $yz$  se denomina *plano de las fases*, y la diferencia entre sistemas autónomos y no autónomos se pondrá de manifiesto con un ejemplo.

De ahora en adelante, a lo largo del capítulo, sólo consideraremos sistemas autónomos de la forma:

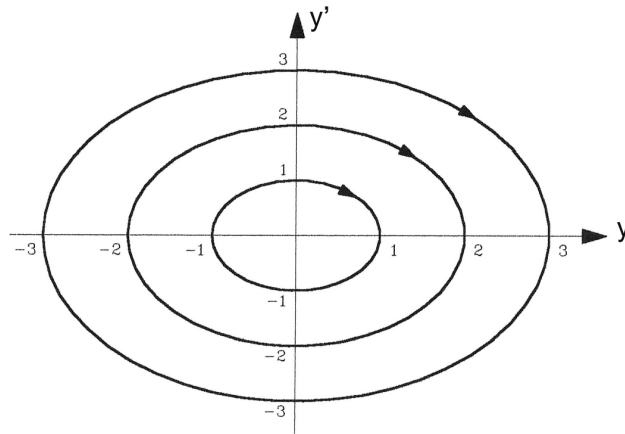
$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ z' = g(y, z) \end{cases} \quad (4.1)$$

con  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $\mathbf{R}^2$ , así como sus derivadas parciales primeras con respecto a  $y$  y a  $z$ , de manera que el problema de existencia y unicidad de solución pasando por cada punto  $(t_0, y_0, z_0)$  está superado. Es decir, existe una única solución del sistema (4.1),  $\bar{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ , definida en un intervalo maximal  $(\omega-, \omega+)$  verificando  $\phi_1(t_0) = y_0$ ,  $\phi_2(t_0) = z_0$  con  $t_0 \in (\omega-, \omega+)$  (ver observación 1 del capítulo 1 y teorema 4 del capítulo 2).



**Figura 42** Representación del movimiento de un resorte lineal en el plano  $yt$ : gráfica de la solución.

En ocasiones, aunque se conozca la solución del sistema o ecuación explícitamente puede ser más conveniente, de cara a la interpretación física del problema, tener una representación de las soluciones en el plano de las fases. Esto se ve rápidamente, por ejemplo, en el estudio del movimiento de un resorte sujeto en uno de sus extremos y del que



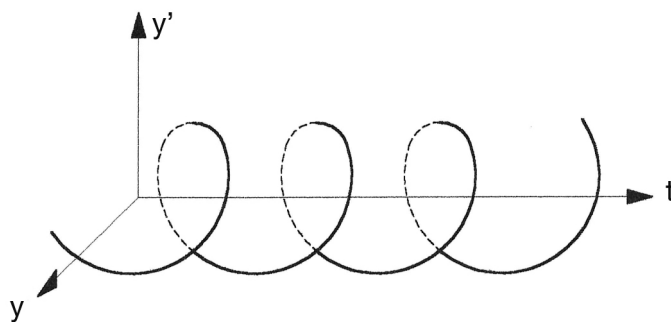
**Figura 43** Representación del movimiento de un resorte lineal en el plano  $yy'$ : gráfica de las trayectorias.

pende un cuerpo de masa  $m$  que se mueve en línea recta. Supongamos que no hay fuerza de rozamiento, ni fuerzas externas y que tanto la masa del cuerpo,  $m$ , como la constante de recuperación del muelle toman el valor 1. La ley de Newton nos proporciona la ecuación

$$y'' + y = 0$$

como modelo matemático para describir el movimiento del resorte.  $y(t)$  mide el alargamiento del muelle en el instante de tiempo  $t$ , y está dado por  $y(t) = r \cos(t + c)$ , donde  $r$  y  $c$ , son dos constantes que dependen de las condiciones iniciales  $y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$ . Evidentemente para representar la solución en el plano  $ty$  necesitamos saber exactamente los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , mientras que esto es innecesario para la representación de las soluciones en el plano  $yy'$ . La primera gráfica, figura 42, representa la solución en el plano  $ty$  para valores  $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots, \beta = 0$ , en un intervalo de tiempo fijo. Se observa un cierto carácter periódico de la solución, carácter que es evidente en la segunda gráfica, figura 43, donde se representan las curvas  $y^2 + y'^2 = r^2$  (ver ejemplo 20 del capítulo 2). El radio de cada circunferencia indica la amplitud máxima del movimiento (evidentemente ésta no puede ser cualquiera, desde el momento que una parte del resorte está fija, pero al parecer el modelo

refleja bastante bien el comportamiento del resorte para oscilaciones de tamaño no muy grande). La flecha indica el sentido del crecimiento de  $t$  sobre la trayectoria, esto es, el sentido de recorrido de un punto para  $t$  creciente; de esta manera, a cada solución le corresponde no una curva en el plano, sino "el movimiento de un punto sobre la curva". En el plano  $ty$  estamos dibujando la gráfica de una solución (ésta se convertiría en una hélice en el espacio  $tyy'$ , ver figura 44), mientras que en el plano de fases  $yy'$  representamos lo que se llama *trayectoria de la solución*. A este segundo gráfico se le llama *mapa de fases de las soluciones*.



**Figura 44** Representación del movimiento del resorte en el espacio  $tyy'$ : gráfica de la solución del sistema asociado.

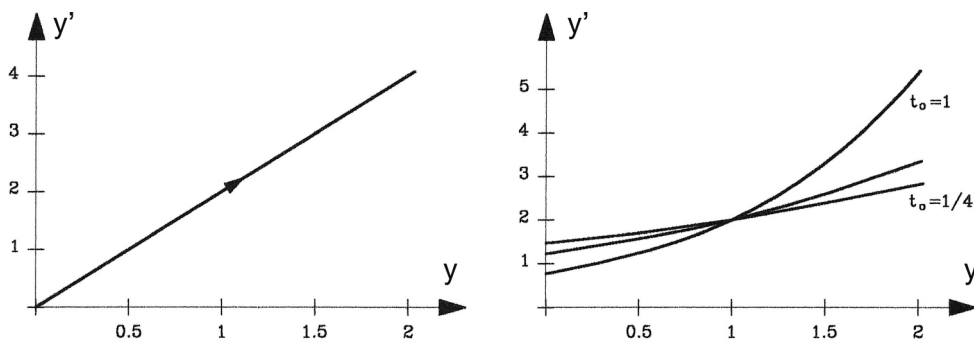
Antes de seguir adelante veamos, mediante dos ejemplos sencillos, cuál es la diferencia entre representar el mapa de fases de un sistema autónomo y otro no autónomo. El sistema

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

tiene como solución  $y(t) = \exp(t - t_0)$ ,  $z(t) = 2 \exp(t - t_0)$ , para condiciones iniciales  $y(t_0) = 1$ ,  $z(t_0) = 2$ , es decir, en el plano  $yz$  la trayectoria de esta solución es  $z = 2y$  independiente del instante inicial (véase la primera gráfica de la figura 45). Para los mismos datos iniciales, el sistema no autónomo:

$$\begin{cases} y' = y/t \\ z' = z \end{cases}$$

tiene por solución  $y(t) = t/t_0, z(t) = 2 \exp(t - t_0)$ . La correspondiente trayectoria  $z = 2 \exp(t_0(y - 1))$  depende del instante de tiempo inicial  $t_0$  (ver segunda gráfica de la figura 45). Inmediatamente deducimos que la ventaja del sistema autónomo es que todas las soluciones pasando por un mismo punto fijo  $(y_0, z_0)$  en cualquier instante de tiempo  $t_0$  ( $y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0$ ) tienen la misma trayectoria.



**Figura 45** Diferencias entre las trayectorias para un sistema autónomo y uno no autónomo.

Los sistemas autónomos suelen aparecer con frecuencia en Mecánica, Electricidad, Ecología, Astronomía, etc. Como los sistemas no suelen ser lineales, en general la solución no se conoce, y representar las trayectorias puede ser complicado. Nosotros daremos aquí unos conceptos y propiedades que nos permitan dibujar el mapa de fases asociado a un sistema autónomo, bien entendido que, dada la simplicidad con que se aborda el tema, sólo podremos hacerlo para ecuaciones o sistemas sencillos. Conocer el mapa de fases de un sistema nos permite obtener información cualitativa sobre las soluciones, esto es, información sobre su comportamiento sin necesidad de conocerlas explícitamente, y las preguntas que se intentan resolver al iniciarse en el estudio de esta teoría, *teoría cualitativa*, son fundamentalmente tres:

1. Predecir el comportamiento de la solución para tiempos grandes.
2. Estabilidad de la solución frente a pequeños cambios en los datos iniciales (al parecer, uno de los motivos fundamentales por el cual

se empezó a estudiar esta teoría en relación a la estabilidad de las órbitas que describen en su movimiento los satélites).

3. Estudiar cuándo el comportamiento de la solución de un sistema no lineal puede ser aproximada por la solución de un sistema lineal.

## 4.2. Mapa de fases para un sistema autónomo.

A lo largo de esta sección denotaremos por  $\bar{\phi}(t)$  una solución  $(\phi_1(t), \phi_2(t))$  del sistema (4.1) definida en  $\mathbf{R}$ . Como se puede comprobar fácilmente, las soluciones de (4.1) verifican las siguientes propiedades:

1. Si  $\bar{\phi}(t)$  es una solución de (4.1) en  $\mathbf{R}$ , entonces  $\bar{\psi}(t) = \bar{\phi}(t + c)$  es otra solución para cualquier constante  $c$ .
2. Si  $\bar{\phi}(t), \bar{\psi}(t)$  son dos soluciones de (4.1) en  $\mathbf{R}$ , que verifican  $\bar{\phi}(t_1) = \bar{\psi}(t_2)$ , para algún  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ , entonces  $\bar{\phi}(t) = \bar{\psi}(t + t_2 - t_1)$ . (La demostración de esta propiedad está basada en el resultado de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy asociado.)
3. Una solución  $\bar{\phi}(t)$  de (4.1) es *periódica* si existen  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$  tales que  $\bar{\phi}(t_1) = \bar{\phi}(t_2)$ . En este caso el periodo es  $t_2 - t_1$  y la solución, evidentemente, está definida en todo  $\mathbf{R}$ .

Damos a continuación una serie de definiciones, algunas de ellas ya introducidas en los ejemplos de la sección 4.1, que utilizaremos a lo largo del capítulo. Dada una solución  $\bar{\phi}(t)$  definida en  $\mathbf{R}$  se denomina *trayectoria* de  $\bar{\phi}$  al conjunto de puntos  $\{(\phi_1(t), \phi_2(t)), t \in \mathbf{R}\}$  en el plano  $yz$ . El plano  $yz$  se denomina *plano de fases* (*espacio de fases*, en general, para un sistema con más de dos ecuaciones) y a la representación de las trayectorias en dicho plano se denomina *mapa de fases*. Un *ciclo* es la trayectoria de una solución periódica (también suele denominarse órbita periódica, o trayectoria cerrada). Un *punto crítico* es la trayectoria de una solución constante.

Como se ha puesto de manifiesto en los ejemplos de la sección 4.1 y, teniendo en cuenta las propiedades 1-3 de las soluciones del sistema autónomo (4.1), se tienen las siguientes propiedades para las trayectorias.

1. La trayectoria de la solución  $\bar{\phi}(t)$  es la misma que la de  $\bar{\phi}(t + c)$ .
2. Si dos trayectorias coinciden en un punto entonces son la misma trayectoria.
3. Dada la trayectoria de la solución  $\bar{\phi}(t)$ , cualquier otra solución que tenga esta misma trayectoria es de la forma  $\bar{\phi}(t + c)$  para algún real  $c$ .

Un punto de una solución se mueve a lo largo de su trayectoria siguiendo la dirección indicada por el crecimiento de  $t$ . Así, las trayectorias se representan como curvas dirigidas en el plano de fases. Damos a continuación algunos resultados útiles para conocer el mapa de fases de un sistema autónomo. Las demostraciones de todos estos resultados (algunas de ellas asequibles al nivel del curso), así como una amplia exposición de este tema con numerosos ejemplos, pueden encontrarse en los libros [4], [18] y [36].

**Teorema 12** *Por cada punto del espacio de fases pasa una única trayectoria de (4.1) que puede ser:*

- un arco de curva,
- una curva simple cerrada,
- un punto.

De las propiedades de las soluciones y trayectorias del sistema (4.1) se deduce que la trayectoria de una solución periódica (ciclo) es una curva cerrada, mientras que la de una solución constante (punto crítico) es un punto. Los puntos críticos corresponden en Física a *estados de equilibrio* y es fácil demostrar el resultado que nos permite reconocer los puntos críticos para el sistema (4.1): *Un punto del plano de fases  $(y_0, z_0)$  es un punto crítico si y sólo si se verifica  $f(y_0, z_0) = 0$  y  $g(y_0, z_0) = 0$ .*

**Teorema 13** Si  $\bar{\phi}(t)$  es una solución de (4.1) definida en  $(\omega-, \omega+)$ , y  $\bar{\phi}(t)$  converge a un punto  $(y_0, z_0)$  cuando  $t \rightarrow \omega+$  (respectivamente  $t \rightarrow \omega-$ ), entonces  $(y_0, z_0)$  es un punto crítico del sistema y  $\omega+ = +\infty$  (respectivamente  $\omega- = -\infty$ ).

Observamos que el teorema 13 nos está diciendo que los únicos puntos donde una trayectoria de una solución no periódica puede empezar ( $t \rightarrow -\infty$ ) o terminar ( $t \rightarrow +\infty$ ) son los puntos críticos. Como dos trayectorias no se cortan entre sí, si una solución pasa por un punto que no es un punto crítico, y su trayectoria permanece en una región acotada del plano, entonces dicha solución, cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , sólo puede aproximarse a un punto crítico, a una curva cerrada o ser ella misma una curva cerrada. Este resultado intuitivo es corroborado por el teorema de Poincaré-Bendixon (ver teoremas 18 y 19, sección 4.4).

En general, las trayectorias del sistema (4.1) se encuentran sobre curvas solución de la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{g(y, z)}{f(y, z)}. \quad (4.2)$$

Así pues, para dibujar el mapa de fases es conveniente resolver la ecuación (4.2). Esto en general es difícil y a veces hay que emplear técnicas de aproximación, como el método de las isoclinas o métodos numéricos. De una manera práctica, los pasos a seguir para dibujar el mapa de fases del sistema (4.1) son

- a. Se encuentran los puntos críticos del sistema y se pintan.
- b. Se resuelve la ecuación (4.2) y se trazan algunas trayectorias.
- c. Se determina el sentido de crecimiento de  $t$  (es decir el sentido de la flecha en cada trayectoria) utilizando alguna de las dos ecuaciones de (4.1).

El siguiente ejemplo intenta ser ilustrativo sobre cómo dibujar de un mapa de fases asociado a un sistema autónomo y sobre la información que dicho mapa nos proporciona.

**Ejemplo 35** En ausencia de amortiguación se considera la ecuación de un resorte no lineal:

$$y'' + f(y) = 0,$$

siendo  $(-f(y))$  la fuerza de recuperación del resorte que, para pequeños alargamientos  $y(t)$  no nulos, debe satisfacer:  $yf(y) > 0$ . Se supone que  $f$  es una función continua tal que  $f(0) = 0$ . Si  $f(y) = ky$ , con  $k > 0$ , el resorte se dice *lineal*. Si existe una constante  $k > 0$  tal que  $\frac{f(y)}{y} < k$ , para  $y$  suficientemente pequeño,  $y \neq 0$ , el resorte se dice *blando*. Un resorte blando ejerce una fuerza menor a la extensión o compresión que el resorte lineal.

Así, considerando  $f(y) = y - y^3$ , la ecuación  $y'' + f(y) = 0$  modela los alargamientos de un resorte blando para  $|y| < 1$  (observamos que el mapa de fases puede dibujarse para cualquier valor de  $y$ ). Intentamos estudiar el comportamiento del resorte cuando  $t \rightarrow \infty$ , sabiendo que en el instante  $t = 0$  verifica  $y(0) = y_0, y'(0) = z_0$ .

La resolución de la ecuación  $y'' + y - y^3 = 0$ ,

$$\pm t + C = \int \frac{1}{\sqrt{K - y^2 + \frac{y^4}{2}}} dy,$$

(como en el ejemplo 22 del capítulo 2) no nos da prácticamente información sobre el comportamiento de las soluciones. Construimos el mapa de fases asociado.

Se considera el sistema asociado:

$$\begin{cases} y' &= z \\ z' &= -y + y^3. \end{cases}$$

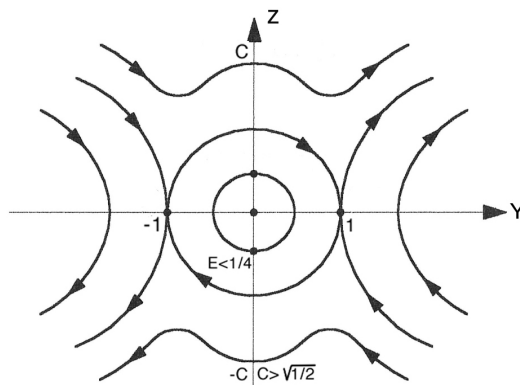
En el plano  $yz$  se pintan los puntos críticos del sistema  $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$  (ver figura 46), y se dibujan algunas trayectorias. Las trayectorias del sistema están contenidas en las curvas solución de la ecuación, de variables separadas:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y^3 - y}{z},$$

es decir, en las curvas  $z^2 = 2E - y^2 + \frac{y^4}{2}$ , con  $E$  una constante. Para  $E \leq \frac{1}{4}$  son curvas cerradas, y la correspondiente curva para  $E = \frac{1}{4}$  pasa por los puntos críticos  $(\pm 1, 0)$ . El sentido de las flechas se estudia,



por ejemplo, considerando la ecuación  $y' = z$ : el sentido es hacia la derecha para  $z > 0$  y hacia la izquierda para  $z < 0$ .



**Figura 46** Mapa de fases para un resorte blando.

Para alargamientos  $|y| < 1$ , el mapa de fases nos permite afirmar que si la posición inicial, alargamiento  $y_0$  y velocidad  $z_0$ , son suficientemente pequeñas (i.e.  $(y_0, z_0)$  está dentro de la curva que pasa por los puntos  $(\pm 1, 0)$ ), el resorte se comporta como un resorte lineal no amortiguado y su movimiento es totalmente periódico (ver ejemplo 20 del capítulo 2). Si la posición inicial es la de uno de los puntos críticos no nulos ( $y_0 = \pm 1, z_0 = 0$ ), la fuerza ejercida por el resorte es demasiado débil como para moverse y el resorte permanece siempre en esta posición. Si el resorte se desplaza ligeramente de uno de estos puntos, de tal manera que  $z_0^2 = \frac{1}{2} - y_0^2 + \frac{y_0^4}{2}$ , y  $z_0 \neq 0$ , el resorte tiende al otro punto de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$  siguiendo una trayectoria distinta, dependiendo de que  $z_0 > 0$  o  $z_0 < 0$ . Los puntos  $(\pm 1, 0)$ , junto con el  $(0, 0)$ , son los puntos o *estados de equilibrio* del sistema.  $\square$

### EJERCICIOS.

1. Estudiar el mapa de fases del resorte lineal,  $my'' + ky' + cy = 0$ , dependiendo de la relación entre las constantes  $m, k, c$ . Comparar los resultados con los que se obtienen resolviendo explícitamente la ecuación (ver sección 2.5 del capítulo 2).
2. Estudiar el mapa de fases de los resortes no lineales:

resorte blando:  $y'' + y - y^3 = 0$

resorte duro  $y'' + y + y^3 = 0$

Comparar ambos mapas de fases, así como con el mapa del resorte lineal ( $y'' + y = 0$ ).

3. Estudiar el mapa de fases del sistema

$$\begin{cases} y' &= -z(z-2) \\ z' &= (y-2)(z-2) \end{cases}$$

4. Estudiar el mapa de fases para  $y \neq 0$  del sistema:

$$\begin{cases} y' &= \frac{2z}{y^3} \\ z' &= \frac{3z^2}{y^4} \end{cases}$$

5. Estudiar el mapa de fases asociado a las siguientes ecuaciones:

$$y'' + ye^{-y^2} = 0,$$

$$y'' + y = \frac{1}{(y-2)^2}.$$

6. Estudiar el mapa de fases asociado a las ecuaciones (utilizar el método de las isoclinas en caso necesario):

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$y'' + 2 \cos y - 1 = 0$$

$$y'' + e^{y'} - y^2 = 0$$

### 4.3. Puntos críticos en el plano

Se ha dicho ya, que una trayectoria que empieza o acaba en un punto, lo hace en un punto crítico. De aquí, entre otras razones, la importancia de estudiar el mapa de fases en un entorno de estos puntos. Dependiendo de como lleguen, o se alejen las trayectorias de los puntos

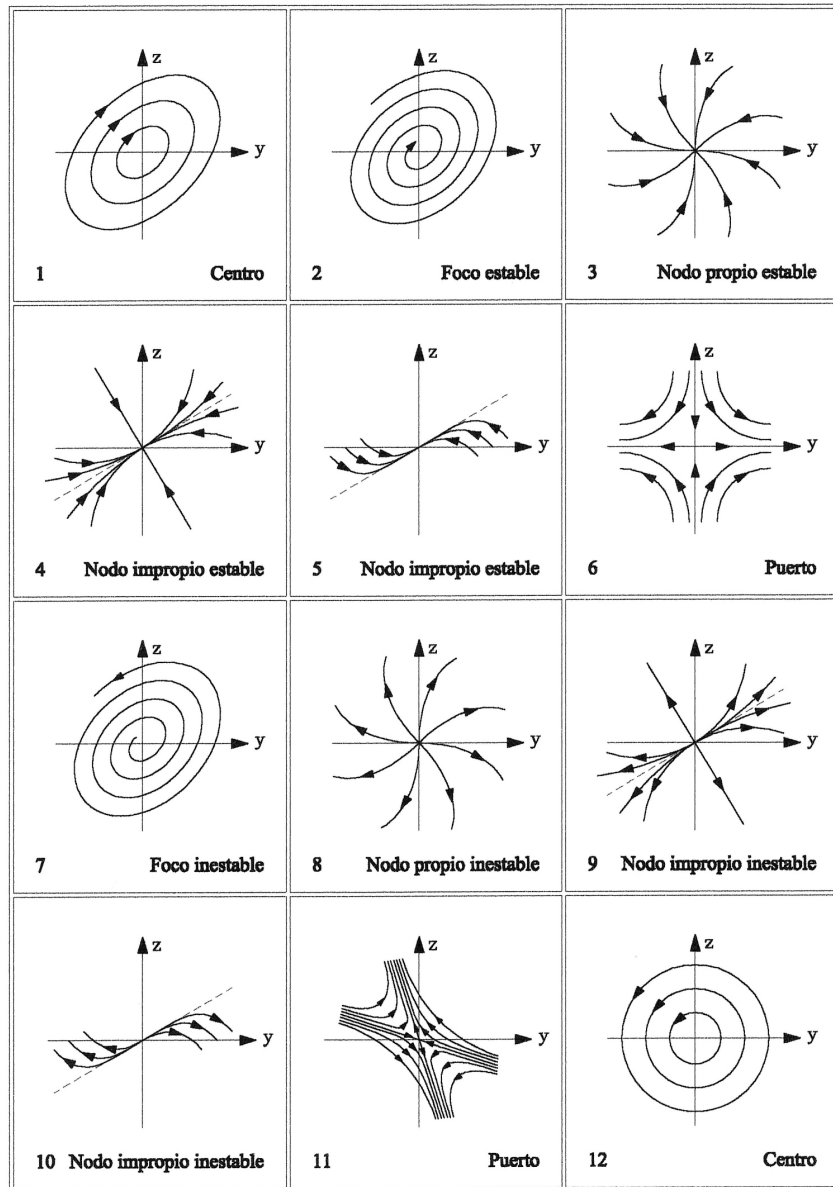


Figura 47 Puntos críticos en el plano.

críticos, estos se clasifican en la sección 4.3.1 de distintas maneras. Por otro lado, en los sistemas lineales de coeficientes constantes el único punto crítico es el origen, por tanto estudiamos el comportamiento del mapa de fases en un entorno del origen (ver sección 4.3.2). Vemos en qué casos el comportamiento del mapa de fases cerca de un punto crítico aislado de un sistema no lineal puede aproximarse por el de un sistema lineal (ver sección 4.3.3) y qué se puede decir sobre el punto crítico cuando esto no es posible (ver sección 4.3.4).

En las secciones 4.3.3 y 4.3.4 se dan resultados basados en dos teorías distintas que nos dan alguna idea sobre comportamiento de las trayectorias cerca de determinados puntos críticos de un sistema autónomo no lineal. La primera teoría está basada en la aproximación del sistema no lineal por uno lineal. Como esto no siempre es posible y como además, el "carácter" del punto crítico del sistema lineal asociado no nos da siempre información sobre el "carácter" del correspondiente punto crítico en el sistema no lineal, necesitamos otras técnicas que nos den esta información. La segunda teoría está basada en la construcción de la llamada *función de Liapunov*. Para esta construcción no es necesario pasar al sistema lineal asociado ni conocer las soluciones del sistema considerado; el problema en este caso radica en la construcción de dicha función.

### 4.3.1. Clasificación de los puntos críticos.

Sea el origen, un punto crítico aislado del sistema (4.1). El punto  $(0, 0)$  se denomina:

- *Centro*, cuando existe un entorno del origen que contiene únicamente ciclos (figura 47, gráfica 1).
- *Atractor*, cuando existe un entorno del origen  $B$  tal que, la solución de cada trayectoria que está dentro de  $B$  en un instante de tiempo  $t_1$ , converge a  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  (ver gráficas 2-5 de la figura 47).
- *Repulsor*, cuando existe un entorno del origen  $B$  tal que, la solución de cada trayectoria que está dentro de  $B$  en un instante de tiempo

$t_1$ , converge a  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  (ver gráficas 7-10 de la figura 47).

- *Foco*, cuando es un atractor (o repulsor) que tiene la propiedad de que, en un entorno, todas las trayectorias se le aproximan girando en torno a él ("enrollándose") en forma de espirales (figura 47, gráficas 2 y 7).
- *Nodo propio*, es un atractor (o repulsor) tal que toda recta que pasa por el origen es tangente en  $(0, 0)$  a alguna trayectoria que se aproxima al origen (ver figura 47, gráficas 3 y 8).
- *Nodo impropio*, es un atractor (o repulsor) tal que existe una única recta verificando que cada trayectoria, salvo a lo sumo dos, que se aproxima al origen es tangente en  $(0, 0)$  a dicha recta (ver figura 47, gráficas 4, 5 y 9).
- *Puerto*, es un punto crítico tal que sólo hay un número finito de trayectorias que se le aproximan cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $t \rightarrow -\infty$ . Evidentemente, un puerto no es ni atractor, ni repulsor, ni centro (ver figura 47, gráficas 6 y 11).

Los puntos críticos atractores se llaman también *asintóticamente estables*, y los repulsores *asintóticamente inestables*. Un punto crítico  $\bar{y}_0$  se dice que es *estable*, cuando existe un entorno  $\mathbf{B}$  de  $\bar{y}_0$  tal que, cualquier solución  $\bar{\phi}(t)$  que verifique  $\bar{\phi}(t_1) \in \mathbf{B}$  en un instante  $t_1$ , permanece en algún otro entorno  $\mathbf{B}_1$  de  $\bar{y}_0$  para tiempos futuros ( $t \geq t_1$ ,  $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}_1$ ). Un punto crítico se dice *inestable* si no es estable. Así pues, los centros son puntos críticos *estables* y los puertos *inestables*.

### 4.3.2. Puntos críticos para sistemas lineales con coeficientes constantes.

Se considera el sistema lineal:

$$\begin{cases} y' &= ay + bz \\ z' &= cy + dz \end{cases} \quad (4.3)$$

siendo la matriz del sistema,  $A$ , una matriz real no singular y  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $A$ . Es evidente que el origen es el único punto crítico del sistema (4.3) y, dependiendo de que los valores propios sean reales de un determinado signo o complejos, se tiene la siguiente clasificación del punto crítico  $(0, 0)$

**Teorema 14** 1. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son complejos conjugados,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  con  $\beta \neq 0$ , entonces:

- a. Si  $\alpha = 0$ , el origen es un centro (figura 47, gráfica 1).
- b. Si  $\alpha > 0$ , el origen es un foco inestable (figura 47, gráfica 7).
- c. Si  $\alpha < 0$ , el origen es un foco estable (figura 47, gráfica 2).

2. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales tales que  $\lambda_1 = \lambda_2$  y  $A$  no tiene dos vectores propios asociados a  $\lambda_1$  linealmente independientes, entonces el origen es un nodo impropio (figura 47, gráficas 5 y 10), estable si  $\lambda_1 < 0$  e inestable si  $\lambda_1 > 0$ .

3. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales y  $A$  tiene dos vectores propios linealmente independientes, puede ocurrir:

- a. Si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , el origen es un nodo propio; es estable si  $\lambda_1 < 0$ , e inestable si  $\lambda_1 > 0$  (figura 47, gráficas 3 y 8).
- b. Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , el origen es un nodo impropio estable (figura 47, gráfica 4).
- c. Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , el origen es un nodo impropio inestable (figura 47, gráfica 9).
- d. Si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , el origen es un puerto (figura 47, gráficas 6 y 11).

La demostración de este teorema es relativamente sencilla, pero es omitida aquí, puede encontrarse por ejemplo en [36]. Observamos que el teorema 14 nos proporciona información precisa sobre la estabilidad del origen para un sistema lineal. También nos proporciona información sobre la estabilidad de cualquier otra solución (ver sección 4.4).

### 4.3.3. Puntos críticos para sistemas no lineales: aproximación lineal.

Supongamos ahora que el sistema autónomo (4.1) no es lineal (es decir no es de la forma (4.3)) pero se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} y' = ay + bz + P(y, z) \\ z' = cy + dz + Q(y, z) \end{cases} \quad (4.4)$$

con  $P(0,0) = Q(0,0) = 0$ ,  $P(y, z)$  y  $Q(y, z)$  funciones continuas en  $\mathbf{R}^2$  así como sus derivadas parciales primeras, y  $P(y, z), Q(y, z)$  "suficientemente pequeñas cuando  $(y, z)$  muy próximos a  $(0,0)$ ". Supuesto que  $(0,0)$  es un punto crítico aislado de (4.4), parece lógico pensar que el mapa de fases de (4.4), cerca del punto crítico  $(0,0)$ , tenga una geometría análoga a la del sistema lineal asociado (4.3). El siguiente resultado nos permite asegurar cuándo esto es cierto.

**Teorema 15** *Se considera el sistema (4.4) con  $ad - bc \neq 0$  y  $P, Q$  tales que:*

$$\frac{|P(y, z)| + |Q(y, z)|}{(|y| + |z|)^{1+\varepsilon}} \rightarrow 0 \text{ cuando } (|y| + |z|) \rightarrow 0, \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

*Entonces, el origen es un nodo, foco o puerto del sistema (4.4) cuando es un nodo, foco o puerto (respectivamente) del sistema lineal asociado (4.3). Si el origen es un centro de (4.3), entonces puede ser un centro o un foco de (4.4).*

La demostración del teorema 15 queda fuera del alcance del curso (puede encontrarse en [8], por ejemplo). Debemos observar que las hipótesis pueden ser debilitadas, en el siguiente sentido: Si  $ad - bc \neq 0$  y  $P, Q$  tales que:

$$\frac{|P(y, z)| + |Q(y, z)|}{(|y| + |z|)} \rightarrow 0 \text{ cuando } (|y| + |z|) \rightarrow 0.$$

entonces, el resultado del teorema anterior se sigue salvo en el caso en que los valores propios de (4.3) son reales e iguales. En este caso el origen puede ser un nodo propio o impropio, o un foco de (4.4) (ver [31] y [16], por ejemplo).

**Observación 6** Los resultados relativos a la aproximación del mapa de fases de un sistema no lineal por el de uno lineal, se refieren siempre a un entorno del origen. En puntos alejados del origen, ambos mapas de fases no tienen por qué parecerse (véase el ejemplo del péndulo no amortiguado, figura 48). Cuando hay otro punto crítico distinto del  $(0, 0)$  hay que hacer un cambio de variable para llevarle al origen.  $\square$

#### 4.3.4. Estabilidad de los puntos críticos: Método de Liapunov.

A raíz del teorema 15 observamos que si el origen es un centro del sistema lineal (4.3), no se puede asegurar que lo sea del sistema no lineal (4.4) ni tampoco determinar la estabilidad (ver, por ejemplo, los ejercicios 1 – 4). Por otro lado, no todos los sistemas (4.1), que tienen al  $(0, 0)$  como punto crítico, se pueden escribir en la forma (4.4). A continuación damos ciertos resultados que, al menos en determinados casos, nos permiten decir algo sobre la estabilidad de dicho punto crítico. Estos resultados, pertenecientes a la teoría conocida con el nombre de *método directo de Liapunov* y que no demostraremos aquí (ver [3], por ejemplo, para una idea geométrica de dicha demostración), están basados en la generalización de dos principios físicos para *sistemas conservativos*:

- a). "La posición de equilibrio es estable si la energía potencial tiene un mínimo local, de otra forma es inestable".
- b). "La energía total del sistema es constante durante cualquier movimiento".

Comentamos lo que nos dicen estos principios físicos, desde un punto de vista matemático, mediante un ejemplo.

**Ejemplo 36** Consideremos la ecuación que modela las oscilaciones de un péndulo no amortiguado (comparar con los resultados obtenidos en la sección 2.2 del capítulo 2 y con los ejercicios 2 y 9 de esta sección):

$$y'' + \sin y = 0.$$



El correspondiente sistema asociado:

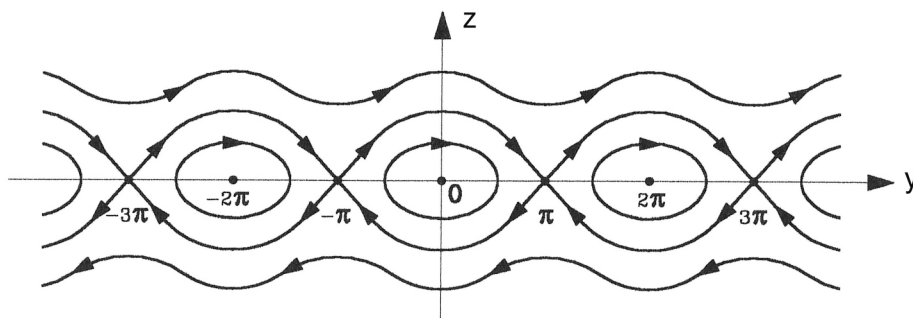
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\sin y \end{cases} \quad (4.5)$$

tiene como puntos críticos o estados de equilibrio los puntos  $z = 0, y = \pm k\pi$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . El mapa de fases asociado puede dibujarse sin más que dibujar las curvas que contienen a las trayectorias:  $z^2 - 2 \cos y = C$  (ver figura 48). De esta manera, se comprueba que los puntos críticos  $(\pm 2k\pi, 0)$  son centros del sistema y por tanto estables, mientras que  $(\pm(2k+1)\pi, 0)$  son puertos y por tanto inestables.

Para cada  $k$  fijo, el sistema lineal asociado a (4.5) en un entorno  $(k\pi, 0)$  es

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -(y - k\pi)(-1)^k. \end{cases}$$

Así pues, el punto  $(k\pi, 0)$  es un centro del sistema lineal asociado si  $k$  par y es un puerto si  $k$  impar. Observamos que la geometría del mapa de fases del sistema (4.5) en un entorno de cada punto crítico es parecida a la del correspondiente sistema linealizado. Esto se ha podido hacer gracias al conocimiento explícito de las trayectorias del sistema no lineal; algún resultado menos preciso, sobre los puntos  $(\pm 2k\pi, 0)$ , puede darse sin utilizar estas trayectorias.



**Figura 48** Mapa de fases asociado a  $y'' + \sin y = 0$ .

Desde un punto de vista físico cabe esperar que los puntos  $y = \pm 2k\pi, z = 0$  ( $y = \pm(2k+1)\pi, z = 0$ , respectivamente) tengan equilibrio estable (inestable, respectivamente), dado que corresponden a la

posición vertical del péndulo con el peso hacia abajo (hacia arriba, respectivamente). Los primeros puntos coinciden con los puntos en que la energía potencial del sistema,  $U(y, z) = 1 - \cos y$ , tiene un mínimo local igual a 0, mientras que los segundos coinciden con los puntos en que la energía potencial presenta un máximo igual a 2. La energía total del sistema (la energía potencial  $(\int_0^y \sin u \, du)$  más la energía cinética  $(\frac{1}{2}(\frac{dy}{dt})^2)$ ),

$$V(y, z) = 1 - \cos y + \frac{1}{2}z^2,$$

es constante a lo largo de las soluciones. Es decir,

$$\frac{dV}{dt}(y, z) = \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0,$$

lo cual, se ha podido calcular sin conocer explícitamente las soluciones del sistema. Por tanto, teniendo en cuenta los principios físicos antes mencionados, podemos afirmar que los puntos  $(\pm 2k\pi, 0)$  son puntos de equilibrio estables, mientras que los puntos  $(\pm(2k+1)\pi, 0)$  son inestables.  $\square$

La función  $V(y, z)$ , construida en el ejemplo 36, es lo que se llama una *integral primera del sistema* (4.5), esto es una función tal que es constante a lo largo de cualquiera de las soluciones del sistema,  $\{y(t), z(t)\}$ , y los teoremas que se enuncian a continuación nos muestran que lo que ocurre en el ejemplo del péndulo considerado no es una simple casualidad.

Sea  $\mathbf{D}$  un entorno  $(0, 0)$  en el plano  $yz$ . Una función  $V$  definida en  $\mathbf{D}$  se dice *definida positiva* (*definida negativa*) sobre  $\mathbf{D}$ , si  $V(0, 0) = 0$  y  $V(y, z) > 0$  ( $V(y, z) < 0$ , respectivamente) en cualquier otro punto de  $\mathbf{D}$ . La función  $V$  se dice *semidefinida positiva* o *negativa* si los signos  $>$  y  $<$  son cambiados por  $\geq$  y  $\leq$  respectivamente.

Se considera el sistema:

$$\begin{cases} y' = f(y, z) \\ z' = g(y, z) \end{cases} \quad (4.6)$$

Para una función  $V(y, z)$  definida en alguna región del plano  $yz$ , denotaremos por  $\dot{V}$ , la función definida como:

$$\dot{V}(y, z) = \frac{\partial V}{\partial y}(y, z) f(y, z) + \frac{\partial V}{\partial z}(y, z) g(y, z).$$

**Teorema 16** *Supongamos que el origen  $(y, z) = (0, 0)$  es un punto crítico aislado del sistema (4.6). Si existe una función  $V$  continua y con derivadas parciales primeras continuas, definida positiva, y tal que  $\dot{V}$  es definida negativa en algún entorno  $\mathbf{D}$  del origen, entonces, el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Si  $V$  es semidefinida negativa, entonces el origen es estable.*

**Teorema 17** *Supongamos que el origen  $(y, z) = (0, 0)$  es un punto crítico aislado del sistema (4.6). Sea una función  $V$  continua y con derivadas parciales primeras continuas en algún entorno del origen. Supongamos  $V(0, 0) = 0$  y que en cada entorno del origen hay al menos un punto en que  $V$  es positiva (negativa, respectivamente). Supongamos que existe un entorno del origen  $\mathbf{D}$ , tal que  $\dot{V}$  es definida positiva (definida negativa, respectivamente) en  $\mathbf{D}$ , entonces, el origen es un punto crítico inestable.*

La función  $V$  de los teoremas 16 y 17 se denomina *función de Liapunov*. Observamos que  $\dot{V}(\phi_1(t), \phi_2(t)) = \frac{dV}{dt}(\phi_1(t), \phi_2(t))$ , para  $\bar{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$  una solución del sistema (4.6). Es decir,  $\dot{V}(\phi_1(t), \phi_2(t))$  nos da la variación de  $V$  a lo largo de la solución. Si el sistema (4.6) modela algún fenómeno físico, puede intentar tomarse como posible función de Liapunov,  $V(y, z)$ , la energía total del sistema. Para otros sistemas cualesquiera, en general, es difícil encontrar una tal función y, el siguiente resultado de sencilla demostración (ver [31], por ejemplo) puede ser de utilidad para la construcción de funciones definidas positivas o negativas para determinados sistemas.

**Proposición 3** *Sea la función  $V(y, z) = ay^2 + byz + cz^2$ ;*

*$V$  es definida positiva si y sólo si  $a > 0$  y  $4ac - b^2 > 0$ ,*

*$V$  es definida negativa si y sólo si  $a < 0$  y  $4ac - b^2 > 0$ .*

**Observación 7** Los conceptos de estabilidad de puntos críticos pueden extenderse a estabilidad de ciclos y, en general, de trayectorias para sistemas autónomos (ver sección 4.4) y también para sistemas no autónomos. En estos casos la teoría se complica considerablemente. En la sección 4.4 damos una idea de estos conceptos para sistemas autónomos, así como algunos resultados útiles para la localización de ciclos en el plano.  $\square$

**EJERCICIOS.**

1. Estudiar el mapa de fases del péndulo amortiguado

$$ml^2y'' + cly' + mgl \sin(y) = 0.$$

Comparar con el mapa de fases del sistema lineal asociado en un entorno de los puntos críticos.

2. Estudiar el mapa de fases del péndulo no amortiguado

$$ml^2y'' + mgl \sin(y) = 0.$$

Comparar con el mapa de fases del sistema lineal asociado en un entorno de los puntos críticos, así como con el mapa de fases del péndulo amortiguado del ejercicio anterior.

3. Estudiar el mapa de fases en un entorno del origen para los sistemas:

$$\begin{cases} y' = y + z + y^2 + z^2 \\ z' = -y + z + 2yz \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \sin y + e^{yz} - 1 \\ z' = e^z + \cos(yz) - 2 \end{cases}$$

(Considerar el desarrollo en serie de Taylor de una función  $f(y, z)$  en un entorno del punto  $(0, 0)$ ).

4. Comparar el mapa de fases del sistema

$$\begin{cases} y' = -z + y(1 - y^2 - z^2) \\ z' = y + z(1 - y^2 - z^2) \end{cases}$$

con el del sistema lineal asociado (escribir para ello las ecuaciones en coordenadas polares).

5. Estudiar el mapa de fases relativo al modelo de competición de dos especies con densidades
- $y(t)$
- y
- $z(t)$
- respectivamente:

$$\begin{cases} y' = y(1 - y - z) \\ z' = z(0,5 - 0,75y - 0,25z) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} y' = y(1 - y - z) \\ z' = z(1,5 - y - z) \end{cases}$$

6. Estudiar el mapa de fases cerca de los puntos críticos de los sistemas:

$$a). \begin{cases} y' = 1 - y^2 - z^2 \\ z' = 2yz \end{cases} \quad b). \begin{cases} y' = 2y - z^2 - 1 \\ z' = 6y - z^2 + 1 \end{cases}$$

7. Buscar una función de Liapunov de la forma  $V(y, z) = ay^2 + byz + cz^2$  para el sistema

$$\begin{cases} y' = -y - yz^2 \\ z' = -y - y^2z \end{cases}$$

comprobando que el origen es asintóticamente estable.

8. Buscar una función de Liapunov de la forma  $V(y, z) = ay^2 + cz^2$  para los sistemas

$$a). \begin{cases} y' = -y^3 + yz^2 \\ z' = 2y^2z - z^3 \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} y' = y^3 - z^3 \\ z' = 2yz^2 + 4y^2z + 2z^3 \end{cases}$$

comprobando que el origen es asintóticamente estable para el primer sistema e inestable para el segundo.

9. Se considera la ecuación generalizada del péndulo no amortiguado:

$$y'' + g(y) = 0,$$

donde  $g$  es tal que:  $g(0) = 0$  y  $ug(u) > 0$  para  $0 < |u| < K$  ( $K$  una constante positiva). Demostrar que  $(0, 0)$  es un punto crítico del sistema asociado a la ecuación, y que la función energía:

$$V(y, z) = \frac{z^2}{2} + \int_0^y g(u) du$$

es definida positiva. Utilizar el resultado anterior para deducir que el origen es un punto crítico estable del sistema.

10. Comparar el resultado del ejercicio anterior con los obtenidos en el ejemplo 35 y en el ejemplo 36 del péndulo no amortiguado.

## 4.4. Localización de ciclos en el plano.

De una manera informal, introducimos aquí el concepto de *estabilidad de una solución*  $\bar{\phi}(t)$  del sistema (4.1) (ver por ejemplo [5] para más detalles): Se dice que  $\bar{\phi}(t)$  es *estable* si cualquier solución  $\bar{\varphi}(t)$  que en un tiempo  $t_1$  se encuentre "cerca" a  $\bar{\phi}(t)$ , permanece "cerca" a ella en un tiempo futuro. Se dice que  $\bar{\phi}(t)$  es *inestable* si existe una solución  $\bar{\varphi}(t)$  que está "cerca" de  $\bar{\phi}(t)$  en un instante  $t = t_1$  y no permanece "cerca" cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Se dice que la solución  $\bar{\phi}(t)$  es *asintóticamente estable* si es estable y, además, cada solución que está cerca de ella en un instante  $t_1$  tiende a ella cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Obviamente, la estabilidad de una solución para un sistema autónomo lineal pasa por el estudio de la estabilidad del punto crítico  $(0, 0)$ : una solución  $\bar{\phi}(t)$  es estable, inestable o asintóticamente estable si y sólo si lo es el punto crítico. Por tanto, el dibujo del mapa de fases para sistemas lineales ha quedado totalmente caracterizado en la sección 4.3.2. Esto no ocurre para sistemas no lineales. Como ya se ha comentado en la sección 4.2, parece que la trayectoria de una solución no periódica que permanece en una región del plano debe aproximarse cuando  $t \rightarrow +\infty$  a un punto crítico o a un ciclo, que en este caso sería estable. Una trayectoria cerrada (o ciclo) se denomina un *ciclo-límite* cuando alguna otra trayectoria en el plano de fases, que no sea un ciclo, tiende en forma espiral hacia ella, para  $t \rightarrow +\infty$  (ó  $t \rightarrow -\infty$ ) (ver ejercicios y figura 49). Como criterio, para saber si un sistema no lineal tiene o no ciclos en una región del plano, damos los siguientes resultados cuya demostración (ver [27] y [16], por ejemplo) queda fuera del alcance del curso.

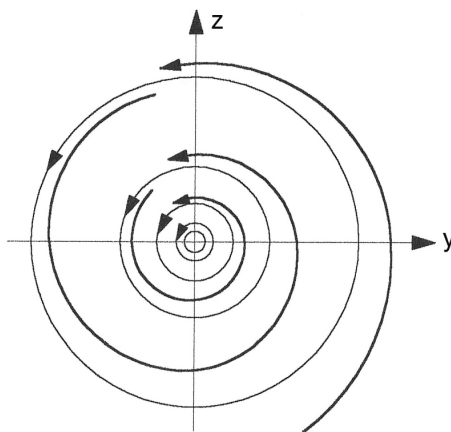
Se considera el sistema (4.1), con  $f$  y  $g$  funciones continuas y con derivadas parciales primeras continuas en  $\mathbf{R}^2$ .

**Teorema 18** *Cualquier ciclo del sistema (4.1) debe contener al menos un punto crítico en su interior (dicho punto crítico, si es único, no puede ser un puerto).*

**Teorema 19** *Sea  $\mathbf{D}$  un dominio acotado del plano y  $\bar{\mathbf{D}}$  la región formada por el dominio  $\mathbf{D}$  y su frontera. Supongamos que  $\bar{\mathbf{D}}$  no contiene puntos críticos del sistema (4.1). Si la trayectoria de una solución del*

sistema permanece en  $\bar{\mathbf{D}}$  para  $t \geq t_1$ , para algún  $t_1$ , entonces dicha trayectoria es un ciclo o tiende en forma espiral hacia un ciclo cuando  $t \rightarrow +\infty$  (en cualquier caso, hay al menos un ciclo en  $\bar{\mathbf{D}}$ ).

El teorema 19 se conoce con el nombre de Teorema de Poincaré-Bendixon. Observamos que a raíz del resultado del teorema 18, para que se verifiquen las hipótesis del teorema 19,  $\mathbf{D}$  debe ser una "región de forma anular" (así lo es, por ejemplo, región comprendida entre dos círculos concéntricos).



**Figura 49** Representación de un ciclo-límite en el plano de fases.

### EJERCICIOS.

1. Discutir la existencia de ciclos del sistema:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 + z^2 \\ z' = 2yz \end{cases}$$

2. Discutir la existencia de ciclos dentro del círculo unidad para el sistema:

$$\begin{cases} y' = y^2 + z^2 - 1 \\ z' = y^2 - z^2 \end{cases}$$

3. Demostrar que ninguna trayectoria del sistema

$$\begin{cases} y' &= y(1 - y^2 - z^2) \\ z' &= z(2 - y^4 - z^4) \end{cases}$$

puede atravesar del exterior de la curva cerrada  $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$  hacia el interior y ninguna puede atravesar del interior de la curva  $y^4 + z^4 = 3$  al exterior. Deducir que el sistema tiene un ciclo comprendida entre ambas curvas.

4. Utilizar el cambio a coordenadas polares para estudiar el mapa de fases de los sistemas:

$$\begin{cases} y' &= -z + y(1 - y^2 - z^2) \\ z' &= y + z(1 - y^2 - z^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= -y - z + y(1 - y^2 - z^2) \\ z' &= y - z + z(1 - y^2 - z^2) \end{cases}$$

(Escribir las ecuaciones en coordenadas polares y comprobar que todas las trayectorias tienden a en forma espiral a la circunferencia unidad).

5. Comparar el mapa de fases de las ecuaciones de Van der Pol, lineal:  $y'' - \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0$ , y no lineal:  $y'' - \varepsilon y' + y = 0$ ,

## Referencias Bibliográficas

Como libros recomendados a un nivel asequible al del curso citamos a [3], [5], [19] y [31]. Libros más especializados en la materia son [4], [18] y [36]: en [4] y [36] puede encontrarse un estudio detallado sobre la estabilidad de soluciones para sistemas diferenciales con dos o más ecuaciones y no necesariamente autónomos; en [18] se introducen técnicas de perturbaciones singulares para el estudio de ecuaciones y sistemas autónomos no lineales, en los que aparecen pequeños parámetros.





# Capítulo 5

## Problemas de contorno.

### 5.1. Introducción.

Este capítulo está dedicado al estudio de *problemas de contorno regulares*, y de *valores propios* o de *Sturm-Liouville* para *ecuaciones autoadjuntas*. Aunque una teoría general puede exponerse para ecuaciones de orden  $n$ ,  $n \geq 2$ , sólo consideraremos aquí las de orden 2 por razones obvias de simplicidad y porque son las que nos aparecen en los problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales que estudiamos en el capítulo 6. Los problemas de contorno (al igual que los de valores iniciales) y de valores propios aparecen de una manera natural al intentar resolver Ecuaciones en Derivadas Parciales utilizando el método de separación de variables. Dichos problemas también aparecen en otros modelos matemáticos de la Física y la Técnica.

Por ejemplo, un problema de contorno es el que modela los desplazamientos de una viga sujeta en sus extremos y sometida a una fuerza externa  $p(x)$ . Se supone que la viga está situada en el eje de las  $x$ , en el intervalo  $(0, 1)$ , y los desplazamientos  $y(x)$  se miden en el eje de las  $y$  (ver figura 50). La ecuación que describe este desplazamiento es:

$$EIy'' + Ty = m(x), \quad x \in (0, 1)$$

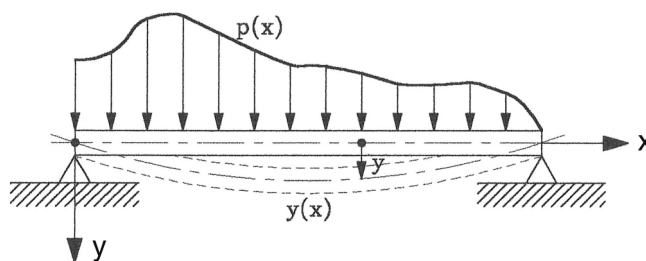
y las condiciones en los extremos de la viga:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

son las condiciones de contorno.  $EI$  es la constante llamada rigidez a flexión, la constante  $T$  es el esfuerzo axial, y  $p(x)$  denota fuerzas, actuando sobre puntos  $x$  de la viga, que generan un momento  $m(x)$ :  $m'' = p$  (aquí la consideración del modelo  $EIy^{(4)} + Ty'' = p(x)$  nos llevaría a imponer otras condiciones adicionales en los extremos; ver ejemplo 30 del capítulo 2 para otra ecuación de cuarto orden).

Se trata pues de encontrar el desplazamiento en cada punto  $y(x)$ ,  $x \in (0, 1)$ . Observamos ya una diferencia fundamental respecto a los problemas de valores iniciales estudiados en el capítulo 2:

- En este problema no se nos da un punto  $x_0$  y el valor de la solución y su derivada en él  $(y(x_0), y'(x_0))$ , sino que se tienen dos puntos "extremos" y condiciones sobre la función y (o) su derivada en estos puntos.
- En los problemas de valor inicial, había que encontrar el intervalo  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  en el que existía la solución, mientras que en este problema, el intervalo viene dado por la longitud de la viga:  $(0, 1)$ .



**Figura 50** Desplazamientos en una viga sujeta en los extremos.

La forma más general de un problema de contorno para una ecuación de segundo orden es:

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = h(x) & , \quad x \in (a, b), \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) + \alpha_3y(b) + \alpha_4y'(b) = \gamma_1, \\ \beta_1y(a) + \beta_2y'(a) + \beta_3y(b) + \beta_4y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde se supone  $a_0(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y las constantes  $\alpha_i, \beta_i$  afectando a los extremos  $a$  y  $b$  no todas nulas a la vez, de manera que las condiciones

de contorno afecten a los dos extremos del intervalo  $(a, b)$ . En el caso  $h(x) = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$  se dice que el problema (5.1) es *un problema de contorno homogéneo*. Cuando en las condiciones de contorno  $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , se dice que las condiciones son *de tipo separado*. Así el problema (5.1) se dice *problema de contorno regular* cuando se puede escribir de la forma:

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = h(x), & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \quad (5.2)$$

con  $p(x), p'(x), q(x), h(x)$  funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ ,  $p(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , y  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ . Un problema de este tipo se dice *singular* cuando no es regular. *El problema de contorno homogéneo asociado a (5.2)* es:

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Este problema homogéneo (también conocido como problema de contorno regular de Sturm Liouville) juega un papel importante a la hora de dar un resultado de existencia y unicidad de solución de (5.2), como se verá en el teorema 20. Antes, analicemos la forma de la ecuación en (5.2) o (5.3).

Derivando  $py'$ , vemos que (5.2) es de la forma general de la ecuación en (5.1), mientras que la ecuación  $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = h$  puede escribirse en la forma  $(py')' + qy = \tilde{h}$  sin más que multiplicarla por la función:

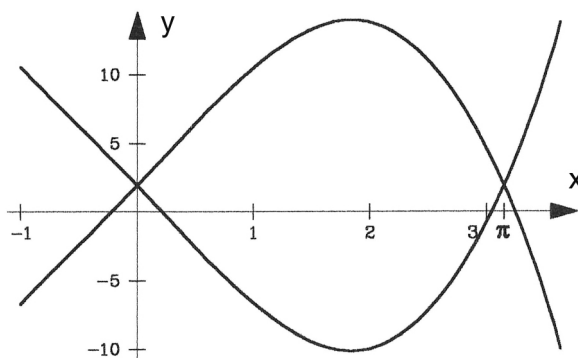
$$r(x) = \frac{\exp(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx)}{a_0(x)},$$

supuesto que  $a_0$  no se anula en todo el intervalo  $[a, b]$ . Se tiene así:  $p(x) = \exp(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx)$ ,  $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \exp(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx)$ ,  $\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_0(x)} \exp(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx)$ . O sea, que no es un hecho restrictivo el escribir la ecuación en la forma  $(py')' + qy = h$ . Dicha ecuación se dice que está escrita *en forma autoadjunta*. Así, la ecuación de Legendre,  $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$  está escrita en forma autoadjunta, y son muchas las ecuaciones que aparecen en problemas de la Física y la Técnica escritas en esta forma.

De ahora en adelante dedicaremos nuestra atención al estudio de problemas de contorno regulares para ecuaciones de segundo orden, dado que son los que nos aparecerán en el capítulo 6. La teoría general para otros problemas puede encontrarse en [14] y, mucho más detallada y extensa en [8]. Enunciamos a continuación un resultado que nos será de utilidad para saber cuándo el problema (5.2) admite solución y ésta es única. Dicho resultado se conoce con el nombre de *alternativa de Fredholm* y su demostración, sencilla, es omitida aquí. Ver por ejemplo [24] para esta demostración, así como para la de otras propiedades que se verán a lo largo de este capítulo.

**Teorema 20** *El problema de contorno regular (5.2) admite solución y ésta es única para cualesquiera valores de las constantes  $\gamma_1, \gamma_2$  y de la función  $h(x)$  si y sólo si el problema homogéneo asociado (5.3) admite sólo la solución trivial  $y \equiv 0$ .*

Hay que señalar que si el problema homogéneo asociado (5.3) admite una solución distinta de la trivial, en general, (5.2) puede admitir solución o no, pero si la admite, ésta no será única. Así por ejemplo, la ecuación  $y'' - y = h(x)$  no puede admitir dos soluciones con la gráfica de la figura 51, mientras que  $y'' + y = h(x)$  puede admitirlas dependiendo del dato  $h(x)$ . Esto se debe a que  $y = \sin x$  es una solución del problema homogéneo asociado a la segunda ecuación en  $(0, \pi)$  ( $y(0) = y(\pi) = 0$ ).



**Figura 51** Gráficas de posibles soluciones de  $y'' + y = h(x)$ ,  $x \in (0, \pi)$ ,  $y(0) = y(\pi) = \alpha$ .

Nosotros sólo nos ocuparemos de la resolución de los problemas del tipo (5.2) que tengan solución única. Para ello, en la próxima sección, construimos esquemáticamente la *función de Green*, que nos proporciona un método alternativo al estudiado en el capítulo 2, de encontrar la solución de (5.2) una vez que se conoce la solución general de la ecuación homogénea asociada:  $(py')' + qy = 0$ . En la sección 5.3 estudiaremos los problemas de valores propios asociados a (5.1), también conocidos con el nombre de *problemas regulares de Sturm-Liouville*.

## 5.2. La Función de Green.

A lo largo de toda la sección se supone que (5.3) admite sólo la solución trivial. Teniendo en cuenta la linealidad de todas las ecuaciones interviniendo en (5.2), la solución de éste problema se puede escribir como la suma de tres soluciones de tres problemas distintos:  $y(x) = u_1(x) + u_2(x) + u(x)$ , donde  $u_1$  es la solución de

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

$u_2$  es la solución de

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \quad (5.5)$$

y  $u(x)$  es la solución de

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = h(x), & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Supuesto que  $y_1, y_2$  son dos soluciones linealmente independientes de  $(py')' + qy = 0$ , las soluciones  $u_i$  se buscan de la forma  $u_i = c_1 y_1 + c_2 y_2$  para algunas constantes  $c_i$ . La solución de (5.6) se busca de la forma:

$$u(x) = \int_a^b G(x, \zeta) h(\zeta) d\zeta, \quad (5.7)$$

siendo  $G$  la función de Green.

La función de Green,  $G = G(x, \zeta)$ , asociada al problema (5.3) es una función definida en  $[a, b] \times [a, b]$  tal que verifica las propiedades:

1.  $G$  es continua en  $[a, b] \times [a, b]$ , y las derivadas parciales  $G_x = \frac{\partial G}{\partial x}$ ,  $G_{xx} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$  son continuas para  $x, \zeta \in [a, b]$ ,  $x \neq \zeta$ .
2. El salto de la derivada  $G_x$  en  $x = \zeta$  está dado por la fórmula:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, \zeta) \Big|_{x=\zeta^-}^{x=\zeta^+} = G_x(\zeta^+, \zeta) - G_x(\zeta^-, \zeta) = \frac{1}{p(\zeta)}$$

3. Para cada  $\zeta$  fijo,  $\zeta \in (a, b)$ ,  $G$  verifica la ecuación diferencial homogénea para  $x \neq \zeta$  y las condiciones de contorno homogéneas de (5.3). Así,  $(p(x)G_x(x, \zeta))_x + q(x)G(x, \zeta) = 0$ ,  $\forall x \in [a, \zeta) \cup (\zeta, b]$

Teniendo en cuenta la tercera propiedad, es lógico buscar la función de Green como  $\varphi_1(x)C_1(\zeta)$  cuando  $x \in [a, \zeta)$  ( $\varphi_2(x)C_2(\zeta)$  cuando  $x \in (\zeta, b]$  respectivamente) siendo  $\varphi_1(x)$  ( $\varphi_2(x)$ , respectivamente) una solución de la ecuación homogénea que verifica la condición de contorno homogénea  $\alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a) = 0$  ( $\beta_1\varphi_2(b) + \beta_2\varphi_2'(b) = 0$ , respectivamente),  $\varphi_1, \varphi_2$  linealmente independientes (que existen), y,  $C_1, C_2$  dos funciones dependientes de la variable  $\zeta$ . Imponiendo ahora que se verifiquen las propiedades 1 y 2 se obtienen  $C_1$  y  $C_2$ . Así:

$$G(x, \zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a, \zeta) \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in (\zeta, b] \end{cases}, \quad (5.8)$$

donde  $C$  es la constante (ver ejercicio 3) definida:

$$C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}.$$

Esta construcción de Green, nos permite observar dos propiedades importantes de la función: la de simetría, ( $G(x, \zeta) = G(\zeta, x)$ ), y la de la unicidad de esta función. Derivando en (5.7), para  $G$  dada por (5.8), se demuestra que la función (5.7) es la solución de (5.6). Observamos, por tanto, que la ventaja fundamental de buscar dicha solución a través de la función de Green es que no se tiene que encontrar una solución

particular de la ecuación no homogénea (ni determinar constantes al imponer condiciones de contorno a la solución general de dicha ecuación).

Si buscamos un significado físico de la función de Green, podemos interpretarle en el siguiente sentido: Para determinados datos,  $h(x) = \delta(x - \zeta)$  (ver ejercicio 7), la función de Green puede ser identificada como la respuesta en el punto  $x$  a una fuerza o impulso unidad en el punto  $\zeta$ . Por ejemplo,  $G(x, \zeta_1)h(\zeta_1)$  puede representar el desplazamiento en el punto  $x$  de una cuerda debida a la acción de la fuerza  $h(\zeta_1)$  en el punto  $\zeta_1$ . El desplazamiento del punto  $x$  debido a las fuerzas  $h(\zeta_1), h(\zeta_2), \dots, h(\zeta_k)$  en los puntos  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  es:

$$\sum_{n=1}^k G(x, \zeta_n)h(\zeta_n).$$

Un término más general no homogéneo,  $h(x)$ , puede ser mirado como un conjunto de impulsos, con  $h(x)$  midiendo la magnitud del impulso en el punto  $x$ . La solución en términos de la función de Green, fórmula (5.7), es el resultado de superponer las respuestas al conjunto de impulsos representados por el término no homogéneo (véase [13], por ejemplo, para más detalles).

**Observación 8** *Funciones de Green generalizadas* pueden también construirse en el caso de que (5.3) admita una solución distinta de la trivial  $y_h(x)$ . En este caso, para que exista solución de (5.2),  $h(x)$  debe ser tal que

$$\int_a^b y_h(x)h(x) dx = 0$$

Véase [24], por ejemplo, para la construcción de esta función generalizada y propiedades.  $\square$

## EJERCICIOS

1. Reducir las siguientes ecuaciones a forma autoadjunta:

$$\text{de Bessel: } x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

$$\text{de Laguerre: } xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$



de Hermite:  $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ ,

de Tchebycheff:  $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha y = 0$ ,

2. Decir cuáles de los siguientes problemas de contorno son regulares:

$$\begin{cases} ((1 - x^2)y')' + 6y = 2x, & x \in (-1, 1), \\ y(-1) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2y')' + y = 1, & x \in (0, \infty), \\ y(0) = 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) < \infty, \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((1 - x^2)y')' + 6y = 2x, & x \in (-\frac{1}{2}, 0), \\ y(-\frac{1}{2}) = 0, & y(0) = 3, \end{cases}$$

3. Sean  $y_1, y_2$  dos soluciones de la ecuación homogénea  $(py')' + qy = 0$ . Demostrar que  $p(x)W[y_1, y_2](x)$  es una constante independiente de  $x$ .

4. Resolver utilizando la función de Green los siguientes problemas de contorno:

$$\begin{cases} -x^3y'' - 3x^2y' - xy = x^2, & x \in (1, 2), \\ y(1) = 5, & y(2) + 2y'(2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = x, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 1, & y(1) + y'(1) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{y'}{\cos x})' = 1, & x \in (0, \frac{\pi}{4}), \\ y(0) = 3, & y(\frac{\pi}{4}) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4 - x^2)y'' - 2xy' = e^{x^2}, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\cos^2 xy'' + \sin(2x)y' = \cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{4}), \\ y(0) - y'(0) = 1, & y(\frac{\pi}{4}) + y'(\frac{\pi}{4}) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)^2y'' + 2(x - 1)y' = 1, & x \in (2, 3), \\ y(2) = 0, & y(3) = 1. \end{cases}$$

5. Intentar construir la función de Green para el problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) - y'(1) = 0. \end{cases}$$

Demostrar que para  $f(x) = 1$  el problema no admite solución, mientras que para  $f(x) = 2 - 3x$  el problema admite infinitas soluciones.

6. Calcular las deformaciones  $y(x)$  que se producen en una viga de longitud  $l$ , sujeta en los extremos y sometida a una carga externa  $h(x) = x^2$ , supuesto que la relación entre las constantes de rigidez a flexión y el esfuerzo axial es tal que  $\frac{T}{EI} \neq (\frac{k\pi}{l})^2$ , con  $k \in \mathbf{Z}$ .

7. Encontrar la solución del problema:

$$\begin{cases} y'' = \delta(x - \zeta), & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

siendo  $\zeta$  cualquier punto del intervalo  $(0, 1)$ . Comprobar que la función solución dependiente de  $\zeta$  coincide con la función de Green asociada al problema homogéneo.

8. Demostrar que el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' = \exp(-x^2)y, & x \in (a, b), \\ y(a) = \gamma_1, & y(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

admite sólo una solución.

9. Encontrar para qué valores de  $\alpha$ , el problema

$$\begin{cases} y'' = x^2, & x \in (0, 2), \\ y(0) = 1, & y(2) + \alpha y'(2) = 3 \end{cases}$$

admite solución única.

### 5.3. Problemas de valores propios.

Volviendo al ejemplo de la viga considerado en la sección 5.1 (ver también el ejercicio 6 de la sección 5.2), una cuestión interesante es qué relación deben de verificar las constantes  $EI$  y  $T$  para que en ausencia de carga externa la viga se deforme, y cuál es la forma que toma la viga. Esto es lo que se denomina un problema de cálculo de *valores propios* (*cargas críticas de pandeo* en Ingeniería) y *funciones propias*. A saber, denotando por  $\lambda = \frac{T}{EI}$ , se plantea el problema de calcular los  $\lambda$  tales que exista una solución no nula del problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Un simple cálculo nos demuestra que tales  $\lambda$  deben ser de la forma  $(k\pi)^2$  ( $(\frac{k\pi}{l})^2$ , en el caso de que los extremos de la viga sean 0 y  $l$ ), para cada  $k = 1, 2, 3, \dots$  y las correspondientes soluciones no nulas del problema son  $y_k = \sin(k\pi x)$  ( $\sin(\frac{k\pi}{l}x)$  para la longitud de la viga  $l$ ). Es decir, para la relación  $\frac{T}{EI} = (k\pi)^2$  la viga se deforma adquiriendo la forma de la función  $\sin(k\pi x)$ . Los  $\lambda_k = (k\pi)^2$  se denominan *valores propios* y las funciones  $\sin(k\pi x)$  *funciones propias* asociadas a  $\lambda_k$ .

En este ejemplo se observa que hay una infinidad numerable de valores propios:  $\pi^2 < (2\pi)^2 < \dots < (k\pi)^2 < \dots$  que convergen a  $\infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Para cada uno de ellos,  $(k\pi)^2$ , hay una única función propia linealmente independiente asociada,  $\sin(k\pi x)$  (evidentemente  $C \sin(k\pi x)$  es otra función propia para cualquier constante  $C$ ). Además, se comprueba fácilmente

$$\int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(j\pi x) dx = \frac{\delta_{kj}}{2},$$

donde  $\delta_{ij}$  es la Delta de Kronecker:  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  y  $\delta_{ii} = 1$ . Esta última propiedad se conoce con el nombre de *ortogonalidad de funciones propias asociadas a distintos valores propios*.

Todas estas propiedades de valores y funciones propias son generales para *problemas de valores propios regulares*. A continuación enunciamos el teorema general que nos asegura la afirmación que acabamos de hacer. Antes, introducimos algunas definiciones. La demostración del teorema queda fuera del alcance del curso (ver [8] y [14], por ejemplo).

En los libros [3], [14], por ejemplo, se ve que esta teoría puede estudiarse en un contexto que abarca problemas más generales que los tratados aquí (problemas no regulares, ecuaciones de orden superior, etc.). Es interesante el estudio de problemas de valores propios regulares y singulares, ya que aparecen en la resolución de problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales relativos a ecuaciones de propagación de ondas, del calor, etc...

Resolver un *problema de valores propios regular*, es encontrar los valores  $\lambda$  (*valores propios*) tales que existe una solución no nula  $y(x)$  (*función propia*) de:

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

siendo  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  como en el problema (5.2),  $s(x)$  continua en  $[a, b]$  y estrictamente positiva en dicho intervalo. Este tipo de problemas se denomina también *problemas regulares de Sturm-Liouville* y, muy a menudo, la *función peso*  $s(x)$  toma el valor constante 1.

**Teorema 21** *Supongamos que el problema (5.9) sea regular, entonces:*

1. *Existe una infinidad numerable de valores propios,  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ , que convergen a infinito:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

2. *Para cada valor propio,  $\lambda_k$ , hay una única función propia asociada,  $\phi_k(x)$ , linealmente independiente.*
3. *Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo  $(a, b)$ , para el peso  $s$ ; es decir:*

$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)s(x) dx = \delta_{kj} \text{Cte.}, \forall k, j = 1, 2, 3, \dots$$

4. *Para cada función  $f(x)$  continua a trozos en  $[a, b]$  admite un desarrollo en serie de Fourier relativo a las funciones propias  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ :*

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x), \quad (5.10)$$

donde las constantes  $c_n$  son los llamados coeficientes de Fourier y están dados por la fórmula:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x) dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx}. \quad (5.11)$$

La convergencia de la serie en (5.10) hacia la función  $f$  tiene lugar en el sentido de la media cuadrática; es decir:

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

En la propiedad 4 del teorema anterior debemos observar que la convergencia de la serie de Fourier no es en general puntual. La convergencia (5.12) indica una convergencia en términos de áreas. Por ejemplo, para  $s(x) \equiv 1$ , se tiene la convergencia de las áreas; esto es, el área entre la gráfica de la función  $\sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)$  y el eje  $x$  se aproxima al de  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  cuando  $N$  crece ( $N \rightarrow \infty$ ), tal como indica la figura 52. Además, los coeficientes de Fourier (5.11) son los que hacen que dicha convergencia (5.12) en media cuadrática sea la más rápida: minimizan el funcional

$$F(c_1, c_2, \dots, c_N) = \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx.$$

En general, este tipo de convergencia no implica la convergencia de la serie para cualquier punto de  $[a, b]$  (ver observación 9), y una serie, de funciones cualesquiera, puede converger en cada punto y, sin embargo, no converger en media cuadrática.

**Ejemplo 37** Los valores propios del problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-1, 1), \\ y(-1) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

son  $\lambda_k = (k\pi)^2$ ,  $\nu_k = (\frac{2k-1}{2}\pi)^2$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots$ . La función propia asociada a  $\lambda_k$  es  $\sin(k\pi x)$  mientras que la asociada a  $\nu_k$  es  $\cos(\frac{2k-1}{2}\pi x)$ .

La función  $f(x) = e^x$  es continua en  $[-1, 1]$  y admite un desarrollo en serie de Fourier:

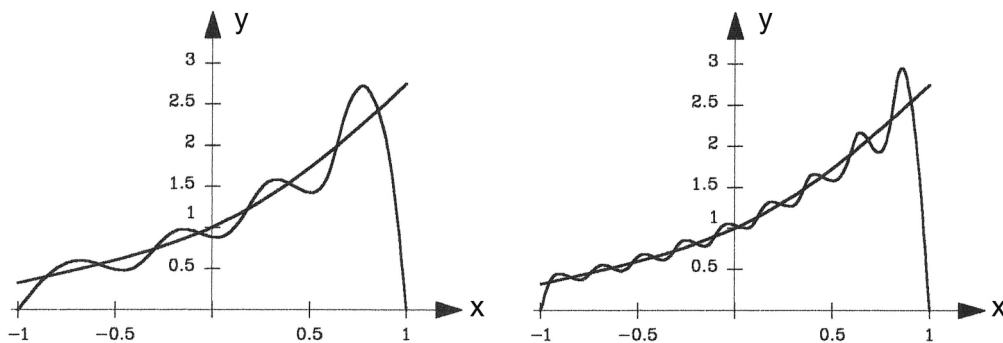
$$e^x \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(k\pi x),$$

donde  $c_k, d_k$  son los coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_{-1}^1 e^x \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx}{\int_{-1}^1 \cos^2\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) dx} = \frac{\frac{2k-1}{2}\pi(-1)^k}{1 + \left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2} \left(\frac{1}{e} + e\right),$$

$$d_k = \frac{\int_{-1}^1 e^x \sin(k\pi x) dx}{\int_{-1}^1 \sin^2(k\pi x) dx} = \frac{k\pi(-1)^k}{1 + (k\pi)^2} \left(\frac{1}{e} - e\right),$$

En las gráficas de la figura 52 vemos la aproximación de la función a través de 8 sumandos y de 16, respectivamente. Se observa que la serie aproxima a la función exponencial en cada punto del intervalo  $(-1, 1)$  y, esta aproximación no es válida en los extremos  $x = \pm 1$ , como consecuencia de que cada función propia satisface las condiciones de contorno  $y(-1) = 0 = y(1)$  y  $e^x$  no las satisface.



**Figura 52** Aproximación de  $e^x$  mediante el desarrollo en serie de Fourier relativo a funciones trigonométricas.

Consideremos en cambio los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que son, para cada  $n$  fijo, la función propia del *problema singular de Sturm*:

$$\begin{cases} ((1-x^2)y')' + \lambda y = 0, & x \in (-1, 1), \\ y(x), y'(x) \text{ acotadas} & , \text{ cuando } x \rightarrow 1, \\ y(x), y'(x) \text{ acotadas} & , \text{ cuando } x \rightarrow -1, \end{cases}$$

para  $\lambda = n(n+1)$ . El desarrollo en serie de Fourier,

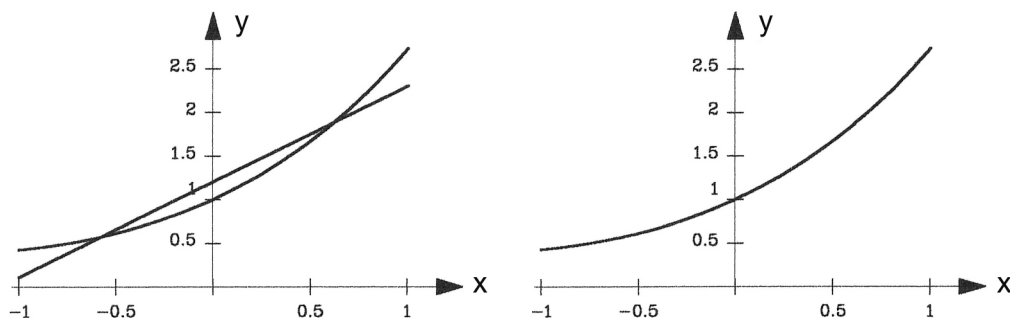
$$e^x \approx \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(x),$$

siendo

$$f_k = \frac{\int_{-1}^1 e^x P_k(x) dx}{\int_{-1}^1 P_k(x)^2 dx}.$$

La figura 53 nos muestra la aproximación de la función exponencial a través de la suma de los dos primeros polinomios  $f_0 P_0(x)$ ,  $f_1 P_1(x)$ , y los cuatro primeros respectivamente. Como la función exponencial es acotada en  $x = \pm 1$ , la aproximación de  $e^x$  es ahora buena en todo el intervalo  $[-1, 1]$ .  $\square$

El ejemplo 37 es ilustrativo en el sentido de que nos muestra cómo una función suficientemente regular puede ser aproximada por sumas de funciones trigonométricas, funciones polinómicas y otras..., en un mismo intervalo. Por otro lado, vemos cómo modificando convenientemente condiciones de contorno para un determinado problema singular (ver ejercicios 2 de la sección 5.2 y 3 – 4 de ésta) también es cierto el resultado del teorema 21. Otros problemas singulares y desarrollos en series de Fourier, que aparecen a menudo en la Física y la Técnica, son los relativos a las funciones de Bessel (ver [3] por ejemplo). Por otro lado, a raíz del ejemplo, cabe esperar que si la función a desarrollar es suficientemente regular, y satisface las condiciones de contorno del problema, la convergencia de la serie es puntual: Basta con que  $f(x)$  sea continua,  $f'$  continua a trozos en  $[a, b]$  y  $f$  satisfaga las condiciones de contorno (ver observación 9).



**Figura 53** Aproximación de  $e^x$  mediante el desarrollo en serie de Fourier relativo a los polinomios de Legendre.

Notemos que una función definida en un intervalo  $[a, b] \neq [-1, 1]$  siempre se puede expresar en términos de las funciones propias trigonométricas del ejemplo 37 así como de los polinomios de Legendre: basta considerar el cambio de variable:  $x \rightarrow t = \alpha x + \beta$ , para determinados  $\alpha$  y  $\beta$  que nos transforma un intervalo en otro (ver ejercicio 5, e).

Una pregunta obligada, en el contexto de desarrollos en serie de Fourier, es qué relación hay entre los desarrollos del teorema 21 y los clásicos ya conocidos en serie de las funciones trigonométricas:

$$\{1, \sin(kx), \cos(kx)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Se comprueba fácilmente que estas funciones trigonométricas son las funciones propias del siguiente problema de valores propios:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-\pi, \pi), \\ y(-\pi) = y(\pi) \quad , \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases} \quad (5.13)$$

Los valores propios del sistema (5.13) son  $\lambda_0 = 0$  y  $\lambda_k = k^2$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots$  y las correspondientes funciones propias son  $y_0 = 1$  asociada a  $\lambda_0$ , y,  $\{\sin(kx), \cos(kx)\}$  asociadas a  $\lambda_k$ . Vemos pues que no se verifica la segunda propiedad del teorema 21, pues hay dos funciones propias, linealmente independientes, asociadas a cada valor propio distinto del



primero. Esto no es extraño si se observa que las condiciones de contorno de (5.13) no son del tipo de las de (5.9), sino que son *periódicas*.

Los problemas de contorno relativos a ecuaciones  $(py')' + qy + \lambda sy = 0$ , con  $p, q$  y  $s$  como en (5.9), y  $p(a) = p(b)$ , con el tipo de condiciones de contorno de (5.13) se llaman *problemas de contorno regulares periódicos*, y la propiedad sobre la existencia de dos funciones propias asociadas a cada valor propio distinto del primero puede darse en ellos, siendo estas funciones ortogonales entre sí, para el peso  $s(x)$ . Se verifican el resto de las propiedades del teorema 21.

Así, una función  $f(x)$  continua a trozos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  admite un desarrollo:

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx), \quad (5.14)$$

siendo

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

y

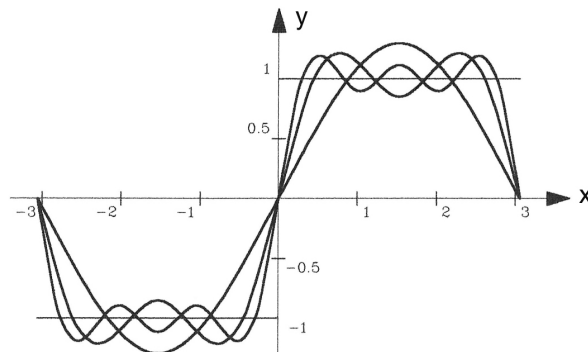
$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

los coeficientes de Fourier. La figura 54 nos muestra el conocido fenómeno de Gibbs (corroborado por el segundo resultado en la observación 9): Si  $f$  y  $f'$  son continuas a trozos, el desarrollo en serie (5.14) converge al valor medio de la función en cada punto  $x \in (-\pi, \pi)$ :  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ ; en los extremos del intervalo la serie converge hacia:  $\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$ . (ver [31], por ejemplo, para la demostración de este resultado)

Las clásicas *desigualdad de Bessel* e *identidad de Parseval*, válidas para el desarrollo (5.14), también son ciertas para (5.10):

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx \leq \int_a^b f(x)^2 s(x) dx, \forall n,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx = \int_a^b f(x)^2 s(x) dx \forall n.$$

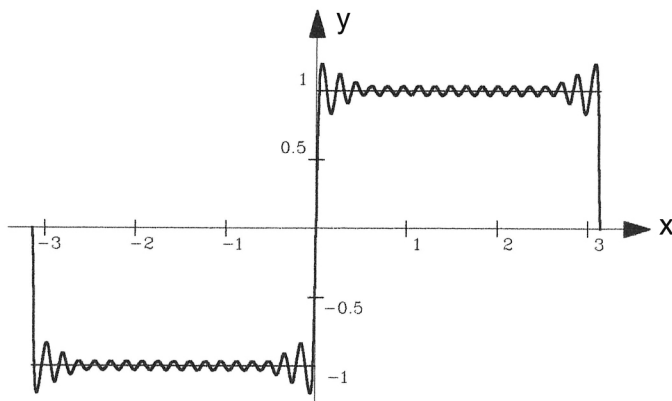


**Figura 54** Aproximación de la función  $-u(x+1) + 2u(x)$  por los primeros términos del desarrollo de Fourier (5.14).

**Observación 9** En relación a la convergencia de la serie (5.10), se tienen los siguientes resultados:

1. Sea  $f(x)$  una función continua en  $[a, b]$  y tal que sus derivadas  $f'$  y  $f''$  también lo son. Supongamos que además  $f$  satisface las condiciones de contorno de (5.9). Entonces, la serie de Fourier (5.10), relativa a las funciones propias del problema (5.9), converge uniformemente en  $[a, b]$ .
2. Sea  $f(x)$  una función continua a trozos en  $[a, b]$  tal que su derivada también lo es. Entonces, el desarrollo en serie de Fourier (5.10) relativo a las funciones propias del problema (5.9), converge en cada punto  $x \in (a, b)$  hacia el valor  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ . Si además  $f$  satisface las condiciones de contorno de (5.9), entonces la serie también converge en los extremos del intervalo.

Hay que observar que en el caso en que  $f$  continua a trozos,  $f'$  puede no estar definida en los puntos de discontinuidad de  $f$ . La demostración de estos resultados, verdaderos teoremas, supera el nivel del curso y puede encontrarse por ejemplo en [14] y [10] respectivamente.  $\square$



**Figura 55** Aproximación de la función  $-u(x+1) + 2u(x)$  por los 20 primeros términos del desarrollo de Fourier (5.14)

**Observación 10** Los problemas de contorno tratados en este capítulo son lineales y, para resolverlos, es necesario obtener la solución de la ecuación lineal homogénea asociada al problema. A menudo, las ecuaciones son no lineales o no se saben resolver, lo cual hace que sea conveniente obtener una aproximación numérica de la solución de los valores y funciones propias. Este tipo de problemas pueden consultarse en [17] y [11] por ejemplo.  $\square$

## EJERCICIOS

1. Encontrar los valores propios y funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville:

$$a). \begin{cases} (1+x)^2 y'' + 2(1+x)y' + \lambda y = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi), \\ y(0) - y'(0) = 0, & y(\pi) = 0. \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi), \\ y'(0) = 0, & y(\pi) = 0. \end{cases}$$

$$d). \begin{cases} x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0, & x \in (1, e), \\ y(1) = 0, & y(e) = 0. \end{cases}$$

$$e). \begin{cases} y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$

2. Expresar el desarrollo de las funciones a).  $f(x) = e^x$ , b).  $f(x) = x$ , c).  $f(x) = x - 1$  en serie de Fourier relativo a las funciones propias de los problemas de contorno a), b), c), d) y e) del ejercicio 1.
3. Encontrar los valores propios del problema singular de Sturm

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \infty), \\ y(0) = 0, & y, y' \text{ acotadas cuando } x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

4. Encontrar los valores y funciones propias del problema singular de Sturm, para la ecuación de Bessel:

$$\begin{cases} (xy')' + \lambda xy = 0, & x \in (0, 1), \\ y(1) = 0, & y, y' \text{ acotadas cuando } x \rightarrow 0. \end{cases}$$

Utilizar dichas funciones propias para escribir el desarrollo en serie de Fourier de una función  $f$  continua en  $[0, 1]$ .

5. Escribir el desarrollo en serie de Fourier relativo a las funciones propias de (5.13) para las siguientes funciones:

$$a). f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ 0, & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases},$$

$$b). f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ 1, & \text{si } x \in (0, \pi] \end{cases},$$

$$c). f(x) = x^2 - \pi^2,$$

$$d). f(x) = x + \pi,$$

$$e). g(t) = (t - 2)\pi, t \in [2, 4].$$

Para cada una de ellas, hacer una gráfica aproximada de la función y las aproximaciones por los 3 (5 y 15, respectivamente) sumandos de la serie.

6. En el ejercicio anterior, demostrar que en el desarrollo de una función par ( $f(x) = f(-x)$ ) aparecen sólo suma de funciones coseno mientras que en el de una función impar ( $f(x) = -f(-x)$ ) sólo senos.
7. Considerando el desarrollo de  $f(x) = 1$ , en serie de Fourier relativo a las funciones propias del problema homogéneo asociado al dado aquí, calcular el desarrollo en serie de Fourier de la solución de:

$$\begin{cases} y'' + \nu y = 1, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

para a).  $\nu$  no valor propio del problema homogéneo asociado, b).  $\nu$  valor propio de dicho problema.

8. Encontrar las cargas críticas de pandeo para la viga empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho, cuya deformación está descrita por la solución del problema:

$$\begin{cases} EIy^{IV} + Ty'' = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, & y''(1) = y'''(1) = 0, \end{cases}$$

### Referencias Bibliográficas

Además de las indicaciones a lo largo del capítulo sobre bibliografía recomendada, citamos aquí algunos libros que nos parecen interesantes. Como libro de consulta para todo el capítulo, a un nivel asequible al alumno, puede citarse [24]. También en [25] puede encontrarse esta teoría, así como un extenso estudio sobre desarrollos en series de Fourier. Para problemas de contorno singulares, a un nivel adecuado al curso, podemos recomendar [3]. En cuanto a libros para ejemplos resueltos y problemas planteados para la sección 5.3, además de los aquí ya citados, recordamos a [19] y [31]. Una teoría extensa y rigurosa, pero a un nivel superior al del curso, sobre problemas regulares y singulares de Sturm Liouville puede encontrarse en [8]. Para una generalización de los resultados del capítulo a operadores y condiciones de contorno más generales, nos parece interesante la exposición de [14].

# Capítulo 6

## Ecuaciones en Derivadas Parciales.

### 6.1. Introducción.

En los capítulos anteriores se han estudiado y resuelto ecuaciones (o sistemas diferenciales) donde la función (las funciones, respectivamente) incógnita dependía de una variable independiente. Nos dedicamos ahora al estudio de ecuaciones en que la función a determinar depende de dos o más variables independientes. Una *ecuación en derivadas parciales de primer orden con dos variables* es una ecuación del tipo:

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

donde  $x$  e  $y$  son las *variables independientes* y  $u = u(x, y)$  la *función incógnita*. Resolver dicha ecuación, consiste en encontrar una función  $u$  definida en algún dominio  $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ , tal que sea continua y admita derivadas parciales primeras en  $\mathbf{D}$ , y que verifique:

$$F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in \mathbf{D}.$$

Se dice que la ecuación es *de primer orden con  $m$  variables* cuando en ella intervienen las variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , y las derivadas parciales de  $u$  con respecto a estas variables:  $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, m$ .

Ahora la solución estará definida en algún abierto de  $\mathbf{R}^m$ . Utilizamos la notación:  $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ .

La ecuación es de *segundo orden* cuando intervienen también las derivadas parciales segundas. En general *una ecuación en derivadas parciales de orden  $k$  con  $m$  variables* tiene la forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_k^{r_k}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}) = 0.$$

Un ejemplo de ecuaciones de primer orden son las ecuaciones lineales:  $Au_x + Bu_y = 0$ , con  $A$  y  $B$  constantes. La solución general es de la forma  $u = f(Bx - Ay)$ , con  $f$  cualquier función derivable. Una ecuación lineal de segundo orden es por ejemplo,  $u_{xy} = 0$ , cuya solución general es de la forma  $u(x, y) = f(x) + g(y)$  para cualesquiera funciones  $f$  y  $g$  derivables. La ecuación  $u_{xx} + u_{xy}u_{yy} + u^2 = 0$  es segundo orden no lineal.

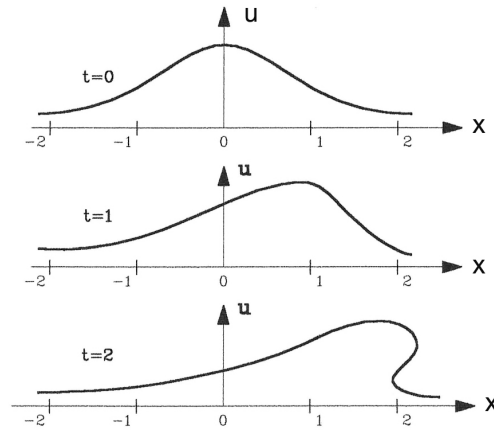
Un interesante ejemplo de ecuación no lineal de primer orden nos lo proporciona la *ecuación de Burger* (ver [9] y [24], por ejemplo):

$$u_t + c(x, u)u_x = 0,$$

que modela la propagación de las ondas en un canal.  $u(x, t)$  indica la altura del agua en el punto  $x$  del canal en el tiempo  $t$ . Supongamos que  $f(x)$  describe el estado inicial:  $u(x, 0) = f(x)$ . Para unas determinadas funciones  $c$ , se puede asegurar que, aunque  $f$  sea muy regular, la *onda rompe*; esto es, en algún instante  $t$  la función  $u(x, t)$  tiene gradiente no acotado (ver figura 56 para  $f(\zeta) = \frac{1}{1+\zeta^2}$ ,  $c(x, u) = c(u) = u$ ). Este fenómeno no ocurre con las ecuaciones lineales: Suponiendo  $c(x, t) = c$ ,  $c$  una constante, la solución de la ecuación es  $u(x, t) = f(x - ct)$ ; i.e. *la onda se desplaza* a lo largo del eje  $x$  sin ningún cambio de forma. Por razones de simplicidad, en este capítulo sólo estudiamos las ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

También, en la práctica, aparecen a menudo *sistemas de ecuaciones en derivadas parciales*, donde hay varias funciones incógnitas. Así ocurre con el sistema de la elasticidad lineal:

$$-\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div}(\bar{u})) = f_i(x_1, x_2, x_3), i = 1, 2, 3,$$



**Figura 56** Gráfica de la solución de la ecuación de Burger.

donde las incógnitas  $u_i$ ,  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ , describen los desplazamientos del punto  $x$  en las direcciones de los ejes  $x_i$  respectivamente,  $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\lambda, \mu$  son los coeficientes de Lamé, y  $f_i$  las componentes de una fuerza actuando sobre el cuerpo. Los operadores  $\Delta$  y  $div$  que aparecen en las ecuaciones son respectivamente:  $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$  y  $div(\bar{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ .

Si encontrar soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias era ya complicado, mucho más lo es el resolver las ecuaciones en derivadas parciales y son pocas las que se saben resolver. Nosotros nos dedicaremos al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales lineales, de segundo orden, con dos variables, y más concretamente centraremos nuestra atención a tres ecuaciones; a saber:

la ecuación de Laplace:  $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ ,

la ecuación de ondas:  $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$  y

la ecuación del calor:  $u_t - u_{xx} = f(x, t)$ .

Los operadores en derivadas parciales que aparecen aquí se denominan *operador de Laplace* ( $\Delta$ ), *ondas* y *calor* respectivamente. Estas ecuaciones, y en general las lineales, aparecen en numerosos problemas que



modelan algún fenómeno de la naturaleza: problemas de calor estacionario, de potenciales eléctricos, de elasticidad, de fluidos, de propagación del calor, de difusión en medios porosos, de propagación de ondas, etc. La variable  $t$ , en las ecuaciones de Burger, calor y ondas, juega el mismo papel que la variable  $y$ . Cuando a la variable  $y$  se le da el significado físico del tiempo, se denota por  $t$ .

La razón de estudiar las ecuaciones con dos variables es obvia: brevedad y simplicidad. La mayor parte de los resultados y las técnicas que utilicemos se pueden generalizar a ecuaciones con más variables. En cuanto a la importancia de las tres ecuaciones que acabamos de citar, queda reflejada en la sección 6.2: cualquier ecuación lineal de segundo orden puede reducirse a una en que la parte correspondiente a las derivadas de mayor orden coincida con los operadores de Laplace, ondas o calor (observemos que esta afirmación es únicamente válida para ecuaciones con dos variables).

## 6.2. Clasificación de las ecuaciones lineales de segundo orden.

Una *ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden*, es una ecuación de la forma

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = p(x, y), \quad (6.1)$$

donde los coeficientes  $A, B, C, D, E$  y  $F$  pueden ser funciones dependientes de  $(x, y)$  o constantes; en este último caso (6.1) se denomina *ecuación lineal con coeficientes constantes*.

Si en (6.1)  $p \equiv 0$  se dice que la ecuación es *homogénea*. Si  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$  son soluciones de la ecuación lineal homogénea, entonces cualquier combinación lineal de ellas,  $c_1u_1 + c_2u_2$ , también es solución ( $c_1, c_2$  constantes). Esta propiedad común a ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas lineales, difiere ahora de los casos anteriores (entre otras cosas) en que el conocimiento de varias soluciones no nos permite encontrar cualquier solución de la ecuación homogénea.

Una ecuación en derivadas parciales se dice *semilineal*, si sólo la parte correspondiente a las derivadas parciales de segundo orden es

lineal. Es decir, es una ecuación de la forma:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \quad (6.2)$$

Evidentemente para las ecuaciones lineales  $F$  es una función lineal en los argumentos  $u, u_x, u_y$ .

Las ecuaciones lineales o semilineales se pueden clasificar en tres tipos: *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*. Esta clasificación está basada en la posibilidad de reducirlas a una *forma canónica* o standard, según que el llamado *discriminante*,  $AC - B^2$ , sea positivo, nulo o negativo.

Supuesto que  $A, B, C$  son constantes, se considera el cambio de variable:

$$\zeta = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \delta x + \gamma y,$$

cuyo jacobiano sea no nulo:  $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$ . Se calculan todas las derivadas parciales primeras y segundas de  $u$  en función de las nuevas variables  $\zeta, \eta$  y se substituye en (6.2). Para una conveniente elección de las constantes  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ , la ecuación (6.2) es ahora de la forma:

1.  $u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$ , supuesto que  $AC - B^2 > 0$ . Se dice que la ecuación es de *tipo elíptico*.
2.  $u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$ , supuesto que  $AC - B^2 = 0$ . Se dice que la ecuación es de *tipo parabólico*.
3.  $u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_{\zeta}, u_{\eta})$ , supuesto que  $AC - B^2 < 0$ . Se dice que la ecuación es de *tipo hiperbólico*.

Evidentemente, si los coeficientes  $A, B, C$  son variables dependientes de  $x$  e  $y$ , la clasificación de las ecuaciones puede variar según la región del plano. Este es el caso de la ecuación de Tricomi,  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ , tan utilizada en aerodinámica: Es elíptica para  $y > 0$ , hiperbólica para  $y < 0$  y parabólica en  $y = 0$ .

Nosotros, en general, estudiaremos ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Es evidente que si la ecuación en (6.2) era lineal, las ecuaciones de los tipos 1, 2 y 3 son lineales, y ejemplos de estos tres tipos de ecuaciones son las de Laplace, calor y ondas respectivamente.

**Observación 11** Observamos que la clasificación es la misma si imponemos la condición de que la matriz:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

tenga los dos valores propios del mismo signo, uno de ellos cero, o los dos de distinto signo. De esta manera, la clasificación dada aquí se puede generalizar a ecuaciones con más variables. Sin embargo, para tres o más variables, no todas las ecuaciones son de tipo elíptico, parabólico o hiperbólico, aunque sí son las que más aparecen en problemas que sirven de modelo a diversos fenómenos de la naturaleza (ver [9], [23] y [25], por ejemplo). Escribimos aquí la forma canónica de estas ecuaciones para tres variables  $x, y, z$ :

la ecuación de Laplace:  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = p(x, y, z)$ ,

la ecuación de ondas:  $u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} = p(x, t, z)$  y

la ecuación del calor:  $u_t - u_{xx} - u_{zz} = p(x, t, z)$

(en el caso más general  $p$  puede también depender de  $u, u_x, u_y, u_z; y \equiv t$ ).  $\square$

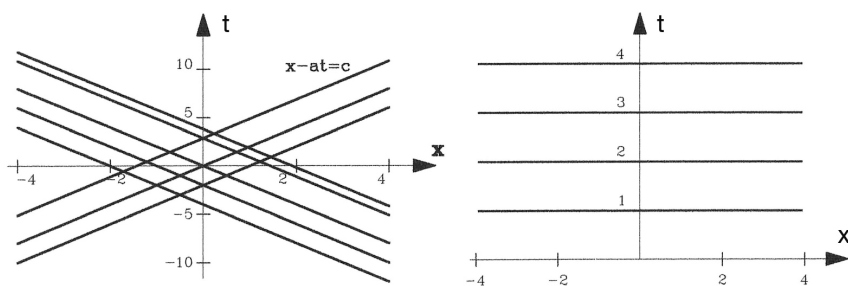
Esta clasificación, que en principio parece caprichosa, determina importantes propiedades de las soluciones, y es fundamental tenerla en cuenta a la hora de imponer condiciones adicionales de manera que la ecuación describa algún fenómeno real (ver sección 6.3). Por otro lado, las ecuaciones de tipo elíptico suelen describir *procesos estacionarios*, mientras que las de tipo parabólico e hiperbólico están ligadas a *procesos de propagación y difusión*.

Supuesto que la ecuación (6.1) tiene coeficientes constantes, definimos las *rectas características* que nos serán de utilidad en la siguiente sección. Dichas rectas se definen como las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Obviamente, para esta definición estamos sumoniendo  $A \neq 0$ . Si los coeficientes de la ecuación no son constantes, las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son *las curvas características*.

Así, la ecuación de Laplace no tiene características reales. Las rectas características de la ecuación de ondas,  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ , son  $x + at = cte$  y  $x - at = cte$ , con  $cte$  indicando una constante cualquiera, que al variar nos va dando distintas rectas paralelas, unas con pendiente  $a$  y otras  $-a$  (ver primera gráfica de la figura 57). Las rectas características de la ecuación del calor son  $t = cte$  (ver segunda gráfica de la figura 57).



**Figura 57** Rectas características de las ecuaciones de ondas y calor respectivamente.

### 6.3. Problemas bien propuestos.

Si se quiere concluir la descripción de un problema físico, no podemos limitarnos a la ecuación diferencial, sino que es necesario adjuntar unas condiciones suplementarias que, usualmente, tienen el carácter de las llamadas *condiciones iniciales* o *condiciones de contorno*. Clarificamos esta afirmación con un ejemplo.

**Ejemplo 38** Se sabe que para pequeñas oscilaciones las vibraciones de una cuerda elástica, de material homogéneo, que se mueve en un plano vertical, son descritas por la ecuación diferencial:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (6.3)$$

donde la constante  $a$  depende de las características de la cuerda: tensión y densidad. Suponemos que la cuerda tiene una longitud  $l$ , que en el estado de equilibrio ocupa el segmento  $[0, l]$  del eje de las  $x$ , y que no hay ninguna fuerza externa actuando sobre ella. Supongamos que en

el tiempo  $t = 0$  la cuerda es desplazada de su posición de equilibrio, toma la forma de la función  $f(x)$ , y empieza a vibrar, siendo  $g(x)$  la velocidad en el instante inicial  $t = 0$  del punto  $x$  de la cuerda. El problema consiste en examinar el desplazamiento  $u(x, t)$  del punto de abscisa  $x \in [0, l]$  (que se supone se mueve sólo en un plano vertical) en el instante de tiempo  $t$ . La gráfica de la función  $x \in [0, l] \rightarrow u(x, t)$  nos da la forma de la cuerda en el instante  $t$ . Es decir, el dominio del plano  $xt$  donde hay que buscar la solución es  $\{(x, t) / x \in [0, l], t > 0\}$  (ver gráfica 1 de la figura 58) y las condiciones impuestas a la cuerda en el instante de tiempo  $t = 0$ , son *condiciones iniciales*:

$$u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), x \in [0, l]. \quad (6.4)$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son los *datos iniciales* o *de Cauchy*. Si, además, no permitimos que los extremos de la cuerda se muevan, estamos imponiendo *condiciones de contorno*:

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, \forall t \geq 0. \quad (6.5)$$

Así,  $\mathbf{D} = \{(x, y) / x \in (0, l), t > 0\}$ , y la solución del problema (6.3), (6.4) y (6.5) describe las vibraciones de la cuerda. La representación de esta solución en el espacio  $xtz$  será la superficie  $z = u(x, t)$  (ver figura 58).

Si queremos que la solución se comporte de "manera regular", habría que añadir a los datos  $f$  y  $g$  lo que se denomina *condiciones de compatibilidad y condiciones de regularidad* (ver observación 13): Por ejemplo, en este caso, para que la solución sea continua en  $[0, l] \times [0, \infty)$  hay que imponer  $f(0) = f(l) = 0$ , y,  $f$  continua en  $[0, l]$ ,  $f'$  y  $g$  continuas a trozos en  $[0, l]$ . A mayor regularidad de los datos se obtiene mayor regularidad de la solución. En ocasiones, no se obtiene una solución en el sentido clásico, sino en "el sentido de las distribuciones", pero no entramos en detalles de este tipo, pues superan el nivel del curso.

Por supuesto, otras condiciones no homogéneas (ver ejercicios 13 y 14) podrían haber sido impuestas tanto en la ecuación como en las condiciones de contorno. Por ejemplo:

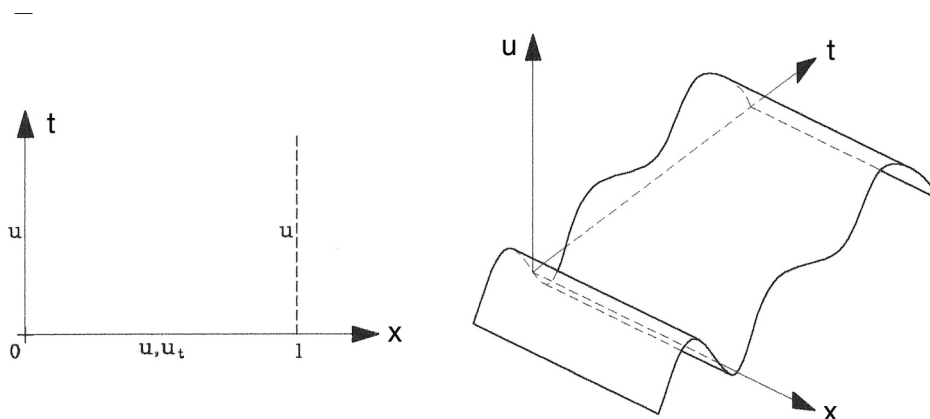
- a). Cada punto  $x$  de la cuerda podría estar sometido a una fuerza externa en el instante de tiempo  $t$ ,  $F(x, t)$ :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t).$$

b). Los extremos de la cuerda podrían también moverse:

$$u(0, t) = l_1(t), u(l, t) = l_2(t),$$

siendo  $l_1, l_2$  funciones que nos dan la posición de estos extremos, en función del tiempo.



**Figura 58** Descripción de las vibraciones de una cuerda.

El problema planteado en el ejemplo 38 se denomina *problema mixto* ya que las condiciones adicionales que acompañan a la solución son: iniciales y de contorno. Otros problemas pueden plantearse: los llamados *problemas de Cauchy* o de valores iniciales donde sólo intervienen condiciones iniciales, y los *problemas de contorno* en que sólo intervienen condiciones de contorno.

Un problema de Cauchy es, por ejemplo, el que modela la propagación de las ondas en una cuerda de longitud infinita que en el instante  $t = 0$  tiene la configuración de la función  $f(x)$  y una velocidad inicial  $g(x)$  :

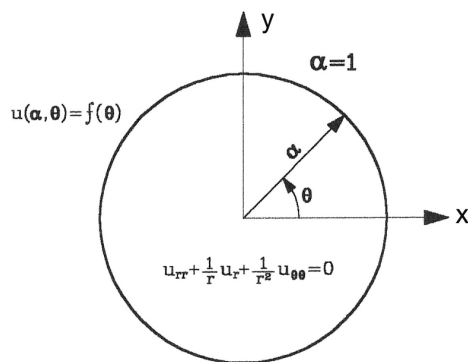
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{cases} \quad (6.6)$$

Un problema de contorno es, por ejemplo, el que modela la variación de la temperatura en el interior de un círculo  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\}$ ,

sabiendo que la temperatura sobre la circunferencia  $\partial\mathbf{D} = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$  está descrita por la función  $f(x, y)$  (ver figura 59):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, (x, y) \in \mathbf{D}, \\ u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \partial\mathbf{D}. \end{cases} \quad (6.7)$$

El operador que interviene en (6.7) es el operador de Laplace, y puede modelar problemas de calor estacionario, es decir, en que la función temperatura  $u$  no depende del tiempo  $t$ . En el problema (6.7) no interviene el tiempo.



**Figura 59** Dominio de definición de la ecuación (6.7).

Observamos ya una diferencia fundamental entre un problema de contorno y uno de Cauchy: Como en ecuaciones diferenciales ordinarias, en el primer problema, el dominio  $\mathbf{D}$  donde está definida la solución está determinado, y los datos se dan sobre la frontera  $\partial\mathbf{D}$  del dominio. En el segundo problema, los datos están dados sobre una curva (puede ser  $y = 0$ ), y el dominio de definición de la solución debe ser calculado.

Como en ecuaciones diferenciales ordinarias, nos interesan problemas, en los que intervienen ecuaciones en derivadas parciales, bien planteados. Recordamos que un problema se dice que está *bien propuesto* si existe solución, es única y a "pequeñas variaciones" de los datos le corresponden "pequeñas variaciones" de la solución. Vemos a continuación cómo el hecho de que la ecuación que aparece en el problema sea de tipo elíptico, parabólico o hiperbólico tiene importancia en el hecho de que un problema esté bien planteado o no.

En relación con el buen planteamiento de un problema de Cauchy enunciamos a continuación el *teorema de Kowalewsky*, de manera muy

simplificada, para ecuaciones lineales de coeficientes constantes y datos iniciales sobre la recta  $y = 0$ . La demostración de dicho teorema queda fuera del alcance del curso y sólo hacemos algunos comentarios sobre el resultado.

**Teorema 22** Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  dos funciones definidas en el intervalo  $(a, b) \subset \mathbf{R}$ , analíticas en un entorno del punto  $x_0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ . Supongamos que  $C \neq 0$  en la ecuación:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0,$$

entonces, existe una única solución  $u(x, y)$  de esta ecuación, analítica en un entorno  $\mathbf{B}$  del punto  $(x_0, 0)$  ( $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^2$  con  $(x_0, 0) \in \mathbf{B}$ ), y tal que

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad \forall x \in \mathbf{B} \cap (a, b).$$

Observamos en el teorema, que el hecho de que  $C \neq 0$  ya implica que  $y = 0$  no es una recta característica. El teorema de Kowalewsky tiene un enunciado mucho más general (ver [13] y [23], por ejemplo): ecuaciones no necesariamente lineales, y curvas donde se dan los datos iniciales más generales que sobre la recta  $y = 0$ ; también el dato  $g(x)$  puede ser una condición inicial para una derivada en una dirección no tangencial a la curva. En el caso de que la ecuación (6.1) no sea homogénea, en el teorema 22 hay que suponer que  $p(x, y)$  es analítica en un entorno de  $(x_0, 0)$ .

La solución del teorema de Kowaleswky tiene un carácter local, y, de una manera intuitiva, se puede construir la solución a partir de los datos  $f$  y  $g$ : el desarrollo en serie de Taylor de  $u$  en un entorno del punto  $(x_0, 0)$  es

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0, 0) (x - x_0)^k y^{n-k},$$

donde todas las derivadas parciales en el punto  $(x_0, 0)$  se obtienen a partir de las derivadas de  $f$  y  $g$ , y de la ecuación. Así, si en el teorema 22 los datos son analíticos en todos los puntos del segmento  $(a, b)$ , podemos conocer la solución única del problema de Cauchy en un entorno de  $(a, b)$ .



Es importante notar que en el caso de que  $y = 0$  sea una recta característica de la ecuación, el problema de Cauchy no está en general bien propuesto para cualesquiera datos iniciales  $f$  y  $g$  (deberían estar relacionadas de alguna forma). Esto es lo que ocurre con la ecuación del calor:  $t = 0$  es una recta característica; como consecuencia, se denomina *problema de Cauchy para la ecuación del calor* en una barra conductora al problema:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = f(x), x \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (6.8)$$

mientras que el problema de Cauchy para la propagación de ondas está dado por (6.6).

Así pues, un problema mixto para la ecuación del calor es (ver también ejercicio 18):

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, x \in (0, l), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), x \in (0, l), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace es por ejemplo:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x, y), \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), x \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (6.10)$$

y si  $F, f$  y  $g$  son funciones lo "suficientemente regulares", el teorema 22 nos garantiza que el problema (6.10) admite una única solución "regular en algún entorno de  $y = 0$ ". Sin embargo, un ejemplo dado por Hadamard (ver observación 12) pone de manifiesto que, en general, los problemas de Cauchy para ecuaciones tipo elíptico no suelen estar bien planteados: pequeñas variaciones de los datos nos pueden llevar a variaciones grandes de la solución.

**Observación 12** Hadamard tomó  $F = 0, f = 0, g \equiv g_n = \frac{1}{n} \sin(nx)$  en el problema (6.10). Se comprueba fácilmente que la solución de dicho problema es  $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh}(ny) \sin(nx)$  en  $\mathbf{R}^2$ . Mientras que  $|g_n(x)| \rightarrow 0$  uniformemente cuando  $n \rightarrow \infty$ , la solución  $u_n(x, y)$  no está acotada, cuando  $n \rightarrow \infty$  para cualquier valor  $y \neq 0, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .  $\square$

Esta observación, nos hace pensar que no a todas las ecuaciones se las puede añadir cualquier tipo de condición adicional para tener un problema bien propuesto. Además de este ejemplo, en [23] puede encontrarse un ejemplo que muestra como los problemas de contorno suelen, en general, estar mal planteados para ecuaciones de tipo hiperbólico.

La demostración de que , bajo determinadas condiciones de regularidad de los datos, todos los problemas que estudiamos en este capítulo están bien planteados puede verse en [23], [25] y [30] . Aunque son interesantes y apropiadas para el curso, omitimos aquí estas demostraciones; en particular, pueden resultar útiles las demostraciones de [30]. En ocasiones, para datos no regulares, es imposible encontrar una solución clásica y hay que buscarla en *el sentido de las distribuciones*. En relación a esta observación no entraremos en ningún tipo de detalles por entender que supera el nivel del curso.

En la sección 6.4 nos ocupamos de dar la solución de los problemas de Cauchy para las ecuaciones de ondas y del calor, y, en la sección 6.5 resolvemos problemas mixtos para estas ecuaciones utilizando el método de separación de variables.

El método de separación de variables también será utilizado para resolver diversos problemas de contorno para la ecuación de Laplace. Estos problemas de contorno se clasifican en:

- *problemas de Dirichlet*, cuando se conoce la solución  $u$  sobre la frontera  $\partial\mathbf{D}$  del dominio dado (ver (VIecalor1) y ejercicio 15).
- *problemas de Neumann*, cuando se conoce la derivada normal de la solución  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sobre la frontera del dominio dado (ver ejercicio 16).  $n$  indica aquí el vector normal unitario a la curva  $\partial\mathbf{D}$ .
- *problemas de contorno mixtos*, cuando en el problema de contorno aparecen condiciones de tipo Dirichlet sobre una parte de la frontera y Neumann sobre la otra (ver ejercicio 17).

## 6.4. Problemas de Cauchy.

Las fórmulas de D'Alembert y de Poisson nos dan la solución de los problemas de propagación de ondas y del calor, respectivamente.

Ambos problemas se resuelven de una forma bien distinta como vemos a continuación en las secciones 6.4.1 y 6.4.2, respectivamente. Una diferencia fundamental entre ambos problemas es la *reversibilidad* de las soluciones para  $t < 0$  en la ecuación de ondas, e *irreversibilidad* en la del calor: Es decir, en la ecuación de ondas la solución vale para  $t < 0$ , mientras que el segundo problema está mal planteado para estos valores de  $t$  (ver [30], por ejemplo).

### 6.4.1. Fórmula de D'Alembert.

Consideremos el problema que modela las vibraciones de una cuerda elástica de longitud infinita, que en el instante  $t = 0$  tiene la forma de la función  $f(x)$  y una velocidad inicial  $g(x)$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{cases} \quad (6.11)$$

Haciendo el cambio de variables:  $\zeta = x + at$ ,  $\eta = x - at$ , la ecuación diferencial se transforma en  $u_{\zeta\eta} = 0$ . Una simple integración de esta ecuación nos da la solución general de la forma:  $u(\zeta, \eta) = F(\zeta) + G(\eta)$ , para cualesquiera funciones derivables  $F$  y  $G$ . Esto es:  $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ . Imponiendo ahora las condiciones iniciales del problema (6.6) se determinan  $F$  y  $G$  a partir de las ecuaciones:

$$F(x) + G(x) = f(x),$$

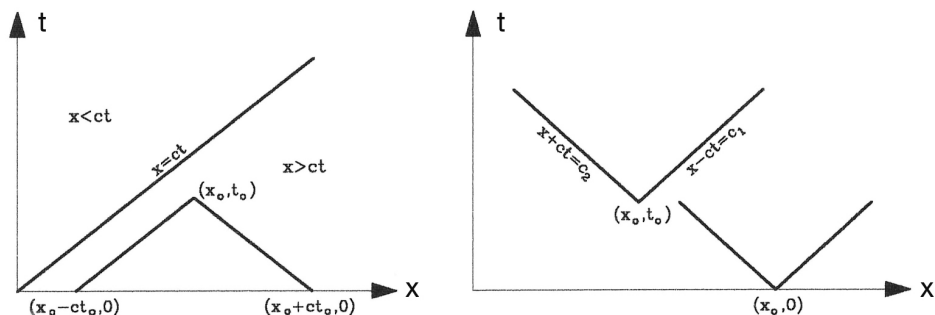
$$F'(x) - G'(x) = g(x).$$

Se tiene así que la posición del punto de abscisa  $x$  de la cuerda, en el tiempo  $t$  está dado por la *fórmula de D'Alembert*:

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds. \quad (6.12)$$

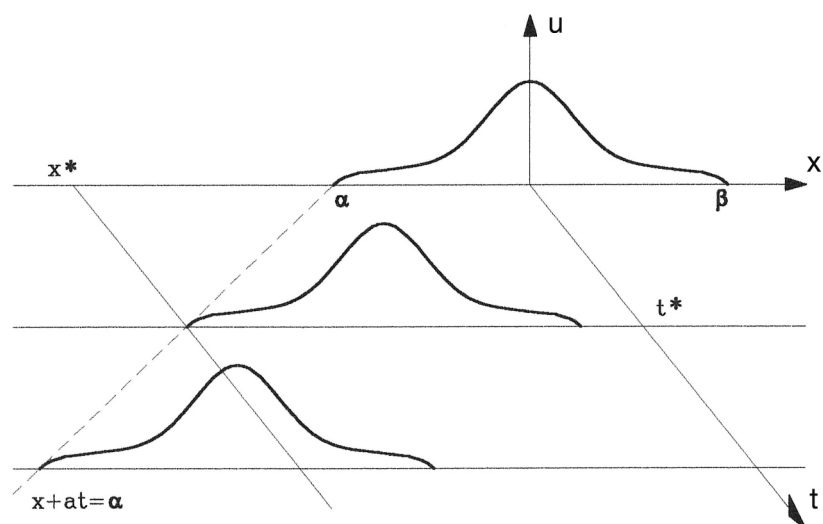
Se observa la importancia que tienen las rectas características  $x \pm at = cte$ : Dado un punto  $x_0$  y un tiempo  $t_0$ , la solución  $u$  en un punto  $(x_0, t_0)$  depende sólo de los datos iniciales  $f$  y  $g$  en el intervalo  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ . Así, si trazamos dos rectas características pasando por  $(x_0, t_0)$ :  $x \pm at = x_0 \pm at_0$  (véase figura 60), la solución en cada punto del

interior del triángulo rayado depende sólo de los valores de la solución (es decir, de los datos iniciales) en  $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ .  $x_0 - at_0, x_0 + at_0$  son los puntos de corte de las características con el eje  $t = 0$ . A dicho intervalo se le denomina *dominio de dependencia de la solución* relativo al punto  $(x_0, t_0)$ . Las modificaciones de los datos iniciales fuera de este intervalo no afectan a  $u(x_0, t_0)$ . Recíprocamente, el valor de la solución (los datos iniciales) en el punto  $(\tilde{x}_0, 0)$  sólo influye en los valores de la solución en una región no acotada, definida a través de las características (ver segunda gráfica de la figura 60), denominada *dominio de influencia*.



**Figura 60** *Dominios de dependencia e influencia respectivamente.*

Por otro lado, la fórmula (6.12) nos pone de manifiesto un hecho muy conocido: *la velocidad de propagación de las ondas es finita*. En efecto, supongamos por ejemplo  $g \equiv 0$ , y,  $f(x) = 0$  fuera de un intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Se observa que no todos los puntos de la cuerda empiezan a vibrar instantáneamente. Nos preguntamos en qué instante  $t^*$ , el punto  $x^*$  de la cuerda empieza a vibrar. Evidentemente, la solución  $u(x^*, t^*) = 0$  hasta que el punto  $(x^*, t^*)$  quede dentro de la característica  $x + at = \alpha$  pasando por el punto  $(\alpha, 0)$  (ver figura 61). Dicho de otra forma, cuando  $[x^* - at^*, x^* + at^*] \cap [\alpha, \beta] \neq \emptyset$ . O sea,  $t^*$  debe ser tal que:  $\frac{x^* - \alpha}{t^*} = a$ . Por tanto, las ondas se propagan con velocidad  $a$  que depende obviamente de la densidad de la cuerda. Estos cálculos nos permiten también observar que el punto  $x^*$  de la cuerda se desplaza de su posición de equilibrio sólo en un intervalo de tiempo finito y luego vuelve a su posición de equilibrio (ver ejercicios 2 y 4 en relación a la propagación de las ondas en una cuerda).



**Figura 61** *El punto  $x^*$  tarda un tiempo en ser alcanzado por la perturbación.*

### 6.4.2. Fórmula de Poisson.

Como se ha visto en la sección 6.3, por ser  $t = 0$  una recta característica de la ecuación del calor, el problema de Cauchy asociado bien propuesto para esta ecuación es:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases} \quad (6.13)$$

$u(x, t)$  describe ahora la temperatura en el punto  $x$  de una barra conductora de calor de longitud infinita, en el tiempo  $t$ , sabiendo que en el instante inicial  $t = 0$  la temperatura de cada punto  $x$  está dada por el valor  $f(x)$ . Se ha supuesto que la barra es delgada y de material homogéneo, y está situada en el eje de las  $x$ ; la constante  $a$  depende de la densidad, del calor específico y de la conductividad térmica de la barra.

La solución de (6.13) está dada por *la fórmula de Poisson*:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4ta^2}} d\zeta. \quad (6.14)$$

Esta fórmula nos muestra que aunque en el instante de tiempo  $t = 0$  la fuente de calor  $f(x)$  sólo afecte a un entorno muy pequeño de un punto  $x_0$ ,  $u(x, t) \neq 0, \forall x, t > 0$ , es decir " el calor alcanza instantáneamente cualquier punto de la barra". Este fenómeno, contrario a la experiencia física, se enuncia diciendo que *velocidad de propagación del calor es infinita*. No obstante, observamos que si el punto  $x$  está muy alejado de la fuente de calor, para tiempos  $t$  pequeños, la temperatura  $u(x, t)$  también es pequeña, debido a la aparición del término exponencial en la fórmula (6.14).

La demostración de (6.14) está basada en la *transformación de Fourier*. Dicha transformada, de propiedades similares a la de Laplace, es una herramienta muy útil en la resolución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales, planteados en dominios no acotados (en este caso, el semiplano  $\{(x, t)/t > 0, x \in (-\infty, \infty)\}$ ; ver ejercicios 7 y 8). El interés de esta transformada en ecuaciones radica en la existencia de un resultado de inversión. Como en el caso de la transformada de Laplace, es importante conocer tablas de transformadas de Fourier y podemos encontrarlas, por ejemplo, en [32].

Sin entrar en detalles, damos a continuación la definición de dicha transformación así como algunas propiedades, de manera esquemática, que son necesarias para demostrar la fórmula de Poisson. Otras propiedades muy interesantes, y de utilidad en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, pueden encontrarse por ejemplo en [25], [29] y [32]. También puede encontrarse en estas referencias bibliográficas la aplicación de la transformación de Fourier a problemas de elasticidad y a otros interesantes problemas de la Física y la Técnica. Su relación con los desarrollos en serie de Fourier, así como con la transformada de Laplace, es puesta de manifiesto en la observación 14.

Se define la *transformación de Fourier*, como una aplicación que transforma una función de una determinada clase, en otra función. En particular, está definida en el conjunto de funciones  $f$  continuas a trozos

en  $(-\infty, \infty)$  y absolutamente integrables, i.e. tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Para una función  $f$  del tipo mencionado se define la transformada de Fourier de  $f$ :

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\zeta} f(x) dx. \quad (6.15)$$

Denotando por  $F(\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)$ ,  $F$  es ahora una función de la variable  $\zeta \in \mathbf{R}$ , con valores complejos en  $\mathbf{C}$ :

$$F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\zeta) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x\zeta) f(x) dx \right),$$

acotada cuando  $|\zeta| \rightarrow \infty$ .

La *transformada inversa de Fourier* de  $F$  se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\zeta} F(\zeta) d\zeta, \quad (6.16)$$

supuesto que la integral de la fórmula sea convergente. Si  $f$  es una función suficientemente regular y cuya transformada de Fourier (6.15) existe, la función definida a través de (6.16) coincide con  $f(x)$ :  $\mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x)$ . La demostración de este resultado de inversión queda fuera del alcance del curso (consultar la bibliografía citada anteriormente).

**Ejemplo 39** Sea  $f(x) = u_a(x)e^{-\beta x}$ , con  $a, \beta > 0$ . Es una función continua a trozos, y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{e^{-\beta a}}{\beta} < \infty.$$

La transformada de Fourier está dada por:

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} e^{ix\zeta} u_a(x) e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(-i\zeta + \beta)a}}{(-i\zeta + \beta)},$$

dado que  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{i\zeta R} e^{-\beta R} = 0$ .  $\square$

### Propiedades de la transformada de Fourier

1. Linealidad: Si  $\mathcal{F}[f](\zeta)$ ,  $\mathcal{F}[g](\zeta)$  existen, entonces  $\mathcal{F}[c_1f + c_2g](\zeta) = c_1\mathcal{F}[f](\zeta) + c_2\mathcal{F}[g](\zeta)$ , para cualesquiera constantes  $c_1, c_2$ .
2. Sobre la derivada:  $\mathcal{F}[f'](\zeta) = -i\zeta\mathcal{F}[f](\zeta)$ ,  $\mathcal{F}[f^{(n)}](\zeta) = (-i\zeta)^n\mathcal{F}[f](\zeta)$ , supuesto que  $f, f', \dots, f^{(n)}$  existan, sean absolutamente integrables,  $f^{(n)}$  continua a trozos en  $(-\infty, \infty)$  y las  $(n-1)$  primeras derivadas de  $f$  converjan a 0 cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .
3. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas a trozos en  $(-\infty, \infty)$  y absolutamente integrables. Supongamos que una de ellas,  $f$  ó  $g$ , es continua y acotada en  $(-\infty, \infty)$ , entonces  $\mathcal{F}[f * g](\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)\mathcal{F}[g](\zeta)$ , donde  $f * g$  es la función definida por:

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Es interesante observar que la definición y propiedades de la transformada de Fourier se pueden generalizar al caso en que  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $n > 1$ ; de aquí la utilidad de esta transformada en la resolución de ecuaciones con más de dos variables en dominios no acotados.

Estamos ahora en condiciones de resolver, formalmente, el problema (6.13). Aplicamos transformada de Fourier a la ecuación. Teniendo en cuenta que la variable  $t$  no interviene en la integral que define dicha transformación, y aplicando las propiedades 1 y 2, se tiene:

$$\begin{cases} U_t - a^2(i\zeta)^2U &= 0, \\ U(\zeta, 0) &= \mathcal{F}[f](\zeta), \zeta \in (-\infty, \infty), \end{cases} \quad (6.17)$$

donde  $U(\zeta, t)$  denota  $U(\zeta, t) = \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\zeta)$ .

El problema (6.17) es un problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en  $t$  ( $\zeta$  es un parámetro en dicha ecuación), y la solución está dada por:  $U(\zeta, t) = \mathcal{F}[f](\zeta)e^{-\zeta^2 a^2 t}$ . Se busca en las tablas una función  $g_t$  tal que su transformada de Fourier sea  $e^{-\zeta^2 a^2 t}$ , y se utiliza la propiedad 3. La función  $g_t$  es:  $g_t(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4ta^2}}$  (ver ejercicio 9), y la solución:

$$U(\zeta, t) = \mathcal{F}[f](\zeta)\mathcal{F}[g_t](\zeta) = \mathcal{F}[f * g_t](\zeta)$$



(de nuevo,  $t$  juega en esta fórmula el papel de un parámetro). Tomando transformada inversa de Fourier, se llega a la fórmula (6.14).

El núcleo  $g_t(x)$  en algunos libros se denomina función de Green. Como en la sección 5.2 del capítulo 5, el significado físico de la fórmula de Poisson, es que la distribución de temperatura inicial  $f(x)$  es descompuesta en una serie de impulsos, en cada punto  $x = \zeta$ , de magnitud  $f(\zeta)$  para dar lugar a la temperatura  $f(\zeta)g_t(x - \zeta)$  en cada punto  $x$  de la barra en el tiempo  $t$ . Aplicando un *principio de superposición*, esta función "temperatura" es integrada para encontrar la solución de (6.8).

## 6.5. El método de separación de variables.

*El método de separación de variables* para resolver una ecuación en derivadas parciales (6.1):

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0, \quad (6.18)$$

consiste en buscar soluciones de la forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

donde la función  $X$  ( $Y$  respectivamente) depende sólo de la variable independiente  $x$  ( $y$ , respectivamente). Derivando la expresión  $X(x)Y(y)$  con respecto a  $x$  e  $y$  y substituyendo en la ecuación diferencial (6.18), se tiene:

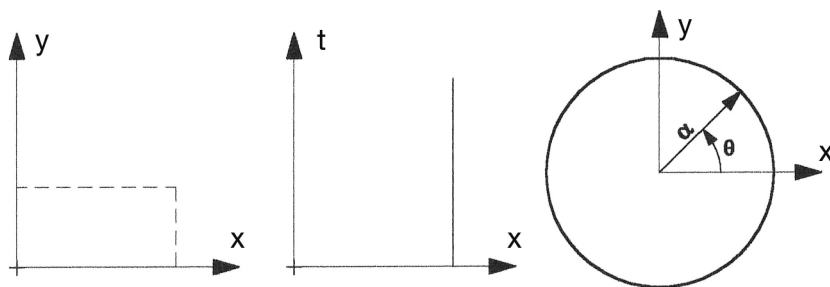
$$\begin{aligned} AX''(x)Y(y) + 2BX'(x)Y'(y) + CX(x)Y''(y) + \\ + DX'(x)Y(y) + EX(x)Y'(y) + FX(x)Y(y) = 0. \end{aligned}$$

Como el nombre "separación de variables" indica, se trata de agrupar, si se puede, en esta expresión funciones dependientes de la variable  $x$ , por un lado, y funciones dependientes de la variable  $y$  por otro, para obtener ecuaciones diferenciales ordinarias en dichas variables. Evidentemente, esto no se puede hacer para cualquier ecuación (6.18), y por tanto tenemos ya una restricción sobre el tipo de ecuación a resolver (ver ejercicio 5).

Por otro lado, observemos que en todos los problemas de la sección 6.3 hay condiciones adicionales añadidas a la ecuación y, el dominio de

definición de la solución, bien está dado por el problema (problemas de contorno y mixtos) o bien hay que calcularle. Cuando el método de separación de variables se aplica para resolver problemas de contorno o mixtos, otra restricción a hacer es la forma del dominio: puede ser un cuadrado, un rectángulo, un círculo, una banda, (ver figura 62 y ejercicio 6) y, en general, cualquier dominio tal que en las condiciones de contorno o iniciales las variables  $x$  e  $y$  puedan separarse (en dimensión 3 un cubo, una esfera, etc...). Así pues, un problema planteado en un dominio cualquiera no puede resolverse por este método y puede ser necesario aplicar un método numérico para encontrar una aproximación de la solución (ver [28] y [30] por ejemplo).

Usualmente, la aplicación del método a ecuaciones en derivadas parciales nos lleva a problemas de valores iniciales o problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable independiente  $x$  (o en la variable  $y$ ).



**Figura 62** *Domínios del plano en los que se puede aplicar el método de separación de variables.*

Aplicamos directamente el método de separación de variables a un problema mixto, para la ecuación de la cuerda vibrante. El ejemplo 40 intenta ser ilustrativo sobre la descripción del método. La forma de operar en el resto de los problemas es la misma: ver ejercicios 10-20. En general, el proceso descrito en el ejemplo 40 nos lleva a un problema de valores propios y hay que aplicar la teoría de la sección 5.3, del capítulo 5, para obtener la solución. No obstante, en ocasiones se puede aplicar este método para encontrar soluciones particulares de ecuaciones en derivadas parciales (ver ejercicios 13 y 14).

**Ejemplo 40** Se considera el problema del ejemplo 38, relativo a las vibraciones libres de una cuerda que en el instante inicial toma la forma de la función  $f(x)$  y la velocidad inicial dada por  $g(x)$ . Suponemos, por ejemplo,  $a = 1$  y  $l = 1$ . Es decir, el problema es:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x), x \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Los pasos a seguir para encontrar la solución utilizando el método de separación de variables son:

1. Se busca la solución de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Se deriva, se substituye en la ecuación y se separan variables. Se obtiene:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

lo que nos dice que ambas ecuaciones deben ser iguales a una constante  $\lambda$ :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

O sea,  $X$  y  $T$  deben ser soluciones de las ecuaciones:

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \forall t > 0,$$

y

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \forall x \in (0, 1),$$

respectivamente, para el mismo valor de  $\lambda$ .

2. A continuación se imponen las condiciones de contorno homogéneas:  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  que nos dan  $X(0) = X(1) = 0$ . Estas ecuaciones junto con la obtenida en el paso 1 nos llevan a afirmar que  $\lambda$  debe ser un valor propio del problema:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, x \in (0, 1), \\ X(0) = 0 \quad , \quad X(1) = 0, \end{cases} \quad (6.20)$$

y  $X$  la función propia asociada a  $\lambda$ . Es decir,  $\lambda = \lambda_k = -(k\pi)^2$ ,  $X = X_k(x) = \sin(k\pi x)$  para algún  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Por tanto, la correspondiente función  $T(t) = T_k(t)$  es la solución de la ecuación

$$T_k''(t) + (k\pi)^2 T_k(t) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación:  $T_k(t) = A_k \cos(k\pi t) + B_k \sin(k\pi t)$ , donde  $A_k, B_k$  son constantes a determinar.

3. Se llega pues a que la solución buscada es de la forma:

$$(A_k \cos(k\pi t) + B_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x),$$

para algún  $k = 1, 2, \dots$ . Imponiendo las condiciones iniciales  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$  se tiene:

$$A_k \sin(k\pi x) = f(x), (k\pi)B_k \sin(k\pi x) = g(x),$$

lo que es, a todas luces, imposible para cualesquiera funciones  $f$  y  $g$ . Así, nos damos cuenta de que la suposición  $u = X_k(x)T_k(t)$  hecha en 1 debe ser modificada convenientemente.

Observamos que si se supone  $f(x) = 5 \sin(4\pi x)$  y  $g(x) = \sin(2\pi x)$ , la solución del problema (6.19) está dada por:

$$5 \cos(4\pi t) \sin(4\pi x) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \sin(2\pi x).$$

es decir, por sumas de funciones  $X_k(x)T_k(t)$ . Esto es debido a que tanto  $f$  como  $g$  coinciden con las funciones propias  $X_k(x)$  para algún  $k$  multiplicadas por constantes. Evidentemente, si  $f$  ( $g$  respectivamente) es suma de varias de estas funciones propias:  $f = c_r X_r + c_s X_s$ ,  $g = c_p X_p + c_q X_q$  con  $c_r, c_s, c_p, c_q$  constantes dadas, es fácil demostrar que la solución es de la forma:

$$T_r(t)X_r(x) + T_s(t)X_s(x) + T_p(t)X_p(x) + T_q(t)X_q(x),$$

para determinados valores de las constantes  $A_i, B_i$  apareciendo en la fórmula de  $T_i$ . Esta propiedad se conoce con el nombre de *principio de superposición*.

Para funciones  $f$  y  $g$  más generales, "funciones continuas a trozos en  $[0, 1]$ ", se sabe que se pueden escribir como desarrollos en serie

de las funciones propias del problema (6.20). Esto es,

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(k\pi x), g(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi x),$$

donde  $\alpha_k, \beta_k$  son los coeficientes de Fourier del desarrollo de  $f$  y  $g$  respectivamente, dados por la fórmula (5.11) del capítulo 5. Esto nos sugiere buscar la solución  $u$  como una suma de infinitas funciones  $X_k T_k$ . Así, la hipótesis hecha en el primer paso, se cambia de la manera indicada a continuación (en 4).

4. Buscamos

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\pi t) + B_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x),$$

e imponemos a esta suma las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(k\pi x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi) B_k \sin(k\pi x) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\pi x).$$

Ahora, como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son únicos, se obtienen los valores de las constantes  $A_k$  y  $B_k$ :  $A_k = \alpha_k, B_k = \frac{1}{k\pi} \beta_k$ .

Observamos que en este proceso, además del problema de valores propios en la variable  $x$ , hemos resuelto un problema de Cauchy en la variable  $t$ :

$$T_k''(t) + (k\pi)^2 T_k(t) = 0, \quad T_k(0) = \alpha_k, \quad T_k'(0) = \beta_k.$$

5. Supongamos que, por ejemplo,  $f(x) = x(1-x), g(x) = 0$ . La solución es:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(k\pi)^3} (1 - (-1)^k) \cos(k\pi t) \sin(k\pi x),$$

donde se observa que sólo intervienen en la suma los términos impares.  $\square$

Lo que se ha obtenido en el ejemplo 40 es una expresión formal de la solución cuya validez hay que garantizar en cada caso concreto. Las técnicas de este ejemplo se pueden utilizar para encontrar soluciones de otros problemas. Sin embargo, para tener la seguridad de que hemos encontrado la solución del problema planteado, habría que comprobar que existe solución única, que la serie candidata a solución es una serie convergente, es decir, define una función de dos variables, y, se puede derivar término a término siendo las series resultantes también convergentes (ver observación 13). Todas estas cuestiones pueden encontrarse resueltas en [30], por ejemplo.

**Observación 13** En el problema (6.19), si se quiere estar seguro de obtener la solución clásica (u continua en  $[0, l] \times [0, \infty)$ , así como sus derivadas parciales primeras y segundas), es suficiente imponer las condiciones adicionales:  $f, f', f'', f'''$  continuas en  $[0, l]$ ,  $g, g', g''$  continuas en  $[0, l]$ ,  $f(0) = f(l) = 0$ ,  $g(0) = g(l) = 0$ , y  $f''(0) = f''(l) = 0$  (ver [23], por ejemplo, para este resultado).  $\square$

Nótese que tanto la ecuación diferencial como las condiciones de contorno deben ser homogéneas para poder aplicar la teoría de Sturm-Liouville (o de Fourier) del capítulo 5. En el caso de que estas ecuaciones no sean homogéneas es necesario homogeneizarlas. El proceso de homogeneización de una ecuación lineal no homogénea,  $L[u] = p(x, y)$ , consiste en buscar una función  $u_1$  verificando  $L[u_1] = p$  ( $u_1$  solución particular), de manera que  $u - u_1$  sea ahora solución de la homogénea  $L[u - u_1] = 0$ ; por  $L$  indicamos aquí cualquier operador lineal (ver ejercicios 12 y 13).

En ocasiones, si la ecuación en derivadas parciales es no homogénea y no se sabe encontrar una solución particular de ella, se puede intentar resolver buscando desarrollos en serie de Fourier del término no homogéneo  $p = p(x, t)$  con coeficientes ahora dependientes de la variable  $t$  (ver [25], por ejemplo).

Cuando la ecuación está planteada en un círculo, como es el caso del problema (6.7) de la sección 6.3 (una esfera para 3 variables), es conveniente hacer el cambio a coordenadas polares:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ . El dominio de variación de  $r, \theta$  es ahora el rectángulo  $(0, 1) \times$

$(0, 2\pi)$ , y la ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Se observa, que aunque los coeficientes de esta nueva ecuación no son constantes, también se puede aplicar el método de separación de variables: una de las ecuaciones obtenidas ahora es la ecuación de Euler. Se impone la condición de que  $f$  sea continua en toda la circunferencia, y de que la solución obtenida esté acotada cuando  $r \rightarrow 0$ . Buscando la solución de la forma  $u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ , se llega a la solución del problema (6.7) (ver ejercicio 15, c), que se puede expresar como:

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} G(r, R, \theta, \alpha) \tilde{f}(R, \alpha) d\alpha, \quad (6.21)$$

donde  $\tilde{f}(R, \theta) = f(x, y), \forall (x, y) \in \partial\mathbf{D}$ ,  $R$  es el radio del círculo considerado ( $R = 1$  en (6.7)), y

$$G(r, R, \theta, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)}$$

es el llamado *núcleo de Poisson*. Se observa la analogía de esta función con la función de Green construida en la sección 5.2 del capítulo 5. Al igual que el núcleo  $g_t$  en la sección 6.4.2, el conocimiento del núcleo  $G$  nos permite obtener la solución de una ecuación en derivadas parciales sin más que integrar convenientemente el dato sobre la frontera.

Generalizaciones de la función de Green, tal como se estudió en el capítulo 5, para problemas de contorno en ecuaciones en derivadas parciales, pueden encontrarse en [23], [30] y [35], por ejemplo.

El método de separación de variables puede utilizarse para resolver determinadas ecuaciones (6.1) con coeficientes no constantes. Este método, también se aplica para resolver ecuaciones en derivadas parciales donde aparecen más de dos variables (ver ejercicio 20), con las convenientes restricciones sobre las ecuaciones y los dominios donde se plantean.

Debemos observar que ha sido el intento de utilizar este método, de separación de variables, para resolver ecuaciones en derivadas parciales el que ha llevado al estudio de muchas ecuaciones diferenciales ordinarias, como las de Bessel, Legendre, etc...(ver ejercicio 20), así como al

desarrollo de diversas teorías para el estudio de diferentes ecuaciones diferenciales ordinarias: Teoría de Frobenius, Teoría de Sturm-Liouville, etc. Véase, por ejemplo, [29] y [35] para la resolución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales, relativos a la propagación de ondas y del calor, que dan lugar a las ecuaciones de Bessel y Legendre (ver también ejercicio 20).

**Observación 14** La transformación de Fourier fué introducida por Fourier a principios del siglo *XIX* para el estudio de la ecuación del calor en dominios no acotados. Fourier, intentó resolver la ecuación del calor utilizando el método de separación de variables, y llegó a la conclusión de que cualquier función regular se podía escribir como suma de funciones trigonométricas. Esta afirmación no fué creída por los científicos de su época, y fué demostrada más adelante por Sturm y Liouville que pusieron de manifiesto que, además de por sumas de funciones trigonométricas, una función podía ser aproximada por sumas de ciertos polinomios y de otros tipos de funciones.

Según la teoría estudiada en la sección 5.3 del capítulo 5, recordamos que cualquier función  $f(x)$  continua a trozos en  $[-l, l]$  se puede escribir como un desarrollo en serie de Fourier relativo a las funciones trigonométricas:

$$\left\{ 1, \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right\}_{k=1}^{\infty},$$

que no son más que funciones propias del problema regular periódico de valores propios:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-l, l), \\ y(-l) = y(l) \quad , \quad y'(-l) = y'(l). \end{cases} \quad (6.22)$$

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (6.23)$$

siendo

$$\alpha_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx$$

y

$$\beta_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx,$$



los coeficientes de Fourier.

Teniendo en cuenta que

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}, \text{ y } \cos(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2},$$

es fácil deducir la fórmula del desarrollo en serie compleja de  $f(x)$ :

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}, \quad (6.24)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\left(\frac{k\pi x}{l}\right)} dx.$$

Si  $f(x)$  es una función continua a trozos en  $(-\infty, \infty)$ , el desarrollo (6.24) tiene lugar en  $(-l, l)$  para cualquier  $l > 0$ . Si denotamos por  $h = \frac{\pi}{l}$ , (6.24) se escribe:

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_l(kh) h e^{ikhx}, \quad (6.25)$$

siendo

$$F_l(kh) = \int_{-l}^l f(x) e^{-i(khx)} dx.$$

De una manera totalmente formal, pasamos al límite en (6.25) cuando  $l \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow 0$ ), se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\zeta} F(\zeta) d\zeta,$$

donde

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\zeta} f(x) dx.$$

En el caso de existir estas dos últimas integrales impropias, vemos que  $F(\zeta)$  ( $f(x)$ , respectivamente) coincide con la transformada de Fourier de  $f$  definida en (6.15) multiplicada por la constante  $\sqrt{2\pi}$  (la transformada inversa de Fourier de  $F$ , respectivamente).

Estos cálculos efectuados, en absoluto rigurosos, permiten relacionar los desarrollos en serie de Fourier con la transformada de Fourier,

y pueden ser tenidos en cuenta de cara al cálculo numérico de la transformada de Fourier (*transformada discreta de Fourier*).

En cuanto a la analogía observada entre las definiciones y propiedades de las transformadas de Laplace y Fourier, conviene tener en cuenta que las condiciones impuestas para la existencia de la transformada de Laplace (ver sección 2.6 del capítulo 2) son menos restrictivas que las impuestas para la existencia de la transformada de Fourier. En particular, una función  $f(x)$  continua a trozos en  $(-\infty, \infty)$  puede no ser absolutamente integrable (por ejemplo,  $f = \sin x$ ), pero sí serlo la función  $g(x) = f(x)e^{-\gamma x}$ , prolongada por cero en  $x < 0$ . Aplicando la fórmula de inversión (6.16), se obtiene un resultado de inversión para la transformada de Laplace (ver [32], por ejemplo). La relación entre ambas transformadas se pone también de manifiesto a través de la llamada *transformada Fourier-Laplace*; un estudio de esta teoría involucra conocimientos de variable compleja y de teoría de distribuciones que quedan fuera del alcance del curso.  $\square$

### EJERCICIOS

1. Clasificar y reducir a su forma canónica la ecuación

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 4u_{yy} = u_x u_y.$$

2. Supongamos que una cuerda de longitud infinita es desplazada de su posición de equilibrio en el instante  $t = 0$  y toma la forma de la función  $f(x)$  definida como  $f(x) = (x^2 - 1)^2$  si  $|x| < 1$  y  $f(x) = 0$  si  $|x| \geq 1$ . Encontrar el instante  $T$  en el que el punto  $x = 100$  de la cuerda empieza a vibrar, sabiendo que la velocidad inicial de cada punto es 0. Hacer lo mismo para el punto  $x = -100$ . Tomando  $a = 2$  en la ecuación (6.3), hacer una gráfica de la forma que toma la cuerda para los valores del tiempo:  $t = 0$ ,  $t = 1/4$ ,  $t = 1/2$ ,  $t = 4$ ,  $t = 100$ .

3. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x, \quad x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

4. En el problema (6.6) se consideran los datos iniciales:  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ , siendo  $f$  la función definida:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{si } x \in \mathbf{R} - [-1, 1] \end{cases} .$$

Mostrar que

$$f(x - at) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in (-1 + at, 1 + at) \\ 0, & \text{si } x \in \mathbf{R} - [-1 + at, 1 + at] \end{cases} ,$$

y determinar de manera análoga  $f(x + at)$ . Considerando el valor de la constante  $a = 2$ , hacer un dibujo de la solución para el tiempo:  $t = 0$ ,  $t = 1/2a$ ,  $t = 1/a$  y  $t = 2/a$ . Intentar explicar el fenómeno que se observa.

5. Se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$5u_{\zeta\zeta} - 4u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta} = 0 .$$

Hacer el cambio de variables  $x = \zeta + \frac{\eta}{2}$ ,  $y = \eta$ , para reducirla a una ecuación de Laplace, ondas o calor. ¿A cuál de las dos ecuaciones se le puede aplicar el método de separación de variables?

6. Se considera la ecuación  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  en el interior del rombo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(1, 2)$ , con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, nulas sobre todos los lados excepto el que se encuentra sobre la recta  $y = 2$ . Plantear el problema e intentar resolverlo mediante el método de separación de variables. ¿Qué problema se encuentra?
7. Utilizar la transformada de Fourier para encontrar la solución del problema de Dirichlet en el semi-plano  $y > 0$ :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (-\infty, \infty), y > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in (-\infty, \infty), \\ u \text{ acotada} & \text{cuando } y \rightarrow \infty, \\ u, u_x \rightarrow 0 & \text{cuando } |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

8. Utilizando la transformada de Laplace, encontrar, en el cuadrante  $x, y > 0$ , la solución del problema para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(t), x \in (0, \infty), y > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, x \in (0, \infty), \\ u(0, t) = 0, t > 0 \\ u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, t > 0. \end{cases}$$

9. a). Demostrar que la transformada de Fourier de  $f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4ta^2}}$  es  $e^{-\zeta^2 a^2 t}$ , siendo  $a, t$  dos parámetros positivos.

- b). Encontrar la transformada de Fourier de las funciones: b.1).

$$f(x) = e^{-a|x|}, \text{ b.2.) } f(x) = \delta(x - a) + \delta(x + a),$$

$$\text{b,3.) } f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x > 1, \\ f(x) = f(-x) & \text{si } x < 0, \end{cases},$$

$$\text{b,4.) } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \in [-2, 0], \\ -x + 2 & \text{si } x \in [0, 2], \\ 0 & \text{si } |x| > 2, \end{cases}$$

siendo  $a$  una constante.

10. Resolver los problemas mixtos para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 1/2), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) - 1, x \in (0, 1/2), \\ u(0, t) = 0, \quad u(1/2, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} - u = 0, x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = x^2(x - 1), x \in (0, 1), \\ u_x(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

11. Resolver los problemas mixtos para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos x, & u_t(x, 0) = x(x - \pi), x \in [0, \pi], \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & 6u_t(x, 0) = x^2 - \pi x, x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in (0, 2), t > 0, \\ u(x, 0) = xe^x(x - 2), & u_t(x, 0) = x^2 - 2x, x \in [0, 2], \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

12. Resolver el problema mixto para la ecuación del calor a lo largo de una varilla:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, x \in (-\pi, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = 2 + \sin 3x + 5 \cos 7x + 5 \sin 7x, x \in [-\pi, \pi], \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, t \geq 0, \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Calcular la temperatura del punto  $x = 0$  en el tiempo  $t = 50$  segundos.

13. a). Comprobar que  $v(x, t) = \frac{x(1-x^2)}{6}$  es una solución particular de la ecuación  $u_{tt} - u_{xx} = x$  y verifica  $v(1, t) = v(0, t) = 0$ . Utilizar el método de separación de variables para encontrar esta solución.  
b). Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0, x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

14. a). Comprobar que  $xe^t$  es una solución particular de la ecuación  $u_t - 4u_{xx} - u = 0$  y verifica  $v(1, t) = e^t, v(0, t) = 0$ . Utilizar el método de separación de variables para encontrar esta solución.  
b). Resolver el problema mixto para la ecuación del tipo del calor:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} - u = 0, x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, x \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = e^t, t \geq 0. \end{cases}$$

15. Resolver los problemas de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x, y \in (0, 1), \\ u(0, y) = y(y-1) \quad , \quad u(1, y) = \sin \pi y \cos \pi y, y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, 1) = 0, x \in [0, 1], \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi/2), \\ u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0, r \in [0, 1], \\ u(1, \theta) = g(\theta), \theta \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r \in (0, 1), \theta \in (0, 2\pi), \\ u(1, \theta) = g(\theta), \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

16. Resolver el problema de Neumann sobre el cuadrado  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ .

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x, y \in (0, \pi), \\ u_x(0, y) = 0 \quad , \quad u_x(\pi, y) = 0, y \in [0, \pi], \\ u_y(x, 0) = \cos x \quad , \quad u_y(x, \pi) = 0, x \in [0, \pi], \end{cases}$$

17. Resolver el problema de contorno mixto:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, 1), \\ u_x(0, y) = 0 \quad , \quad u(\pi, y) = 0, y \in [0, 1], \\ u_y(x, 0) = \cos x \quad , \quad u_y(x, 1) = 0, x \in [0, \pi], \end{cases}$$

18. Intentar aplicar el método de separación de variables al problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x \quad , \quad u_t(x, 0) = x^2 - \pi x, x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

¿Qué dificultades se encuentran?

19. Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t + u = 0, x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = 0, x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

20. Resolver el problema mixto que modela las vibraciones transversas en una membrana elástica sujeta en el borde:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 & \text{en } x^2 + y^2 < 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) & , \quad u_t(x, y, 0) = 0 & \text{en } x^2 + y^2 \leq 1, \\ u(x, y, t) = 0 & \text{en } x^2 + y^2 = 1, t \geq 0. \end{cases}$$

$f(x, y)$  describe la configuración inicial de la membrana. Para la resolución, hacer el cambio a coordenadas polares y utilizar el ejercicio 4, de la sección 5.3 del capítulo 5, relativo a las funciones de Bessel.

### Referencias Bibliográficas

Un libro de referencia interesante, asequible al alumno, para todo este capítulo de ecuaciones en derivadas parciales es [25]; otros libros de referencia aconsejables para el nivel del curso son [12] y [30]. En [3], [19] y [31] se encuentran numerosos ejemplos y ejercicios relacionados con la sección 6.5. Como libros de consulta muy interesantes a todos los niveles citamos [10] y [23], aunque quizás superan el nivel del curso. En [9] se encuentran multitud de ejemplos y ejercicios de aplicación en Ingeniería. [32] es una referencia muy útil en aplicación de las transformadas de Fourier y Laplace en problemas de La Mecánica de los Medios Continuos (pueden verse también las referencias en dicho libro para otros problemas). Otras transformadas muy interesantes en la resolución de problemas de la Física y la Técnica pueden también encontrarse en [25], [32] y [33]. Un libro clásico para una teoría matemática sobre el cálculo numérico de soluciones de problemas planteados en ecuaciones en derivadas parciales es [28].

# Capítulo 7

## Problemas propuestos.

### 7.1. Sobre el capítulo 1.

1. Sea  $f(x, y)$  una función continua en  $\mathbf{R}^2$ , tal que  $f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$ ,  $\forall x, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$  tales que  $y_1 \leq y_2$ . Demostrar que si existen dos soluciones del problema de Cauchy (1.17), éstas coinciden a la derecha del punto  $x_0$ .
2. Sea  $f = f(x)$  una función continua y derivable en  $\mathbf{R}$ , que no sea nula en ningún punto, y tal que  $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ . Hallar  $f(x)$ .
3. Estudiar el dominio de definición de de la ecuación diferencial  $y' = y \cotg(x)$ . Bosquejar las curvas integrales y encontrar la solución que pasa por el punto  $(1, 1)$ , diciendo si es única y el intervalo en el que está definida. Aproximarla mediante el método de Euler, haciendo variar el paso  $h$  para obtener una buena aproximación de esta solución.
4. Resolver la ecuación  $y^3 = y - 1$ . Bosquejar las curvas integrales. ¿Hay existencia y unicidad de solución pasando por los puntos  $(1, 1)$  y  $(2, 3)$  respectivamente?. ¿Se puede aproximar alguna de ellas por el método de Euler? Razonar las respuestas.
5. Resolver la ecuación  $y = xy' - y'^2$ , y representar las soluciones determinando cuántas soluciones pasan por cada punto  $(x_0, y_0)$



del plano.

6. Resolver la ecuación  $y - 1 = xy' + y'^2$ , y representar las soluciones determinando cuántas soluciones pasan por cada punto  $(x_0, y_0)$  del plano.
7. Estudiar la existencia y unicidad de solución de  $y' = |y - 1|$  pasando por cada punto del plano. Calcular las soluciones y hacer un dibujo aproximado de ellas.
8. Resolver la ecuación  $(y' + 1)^3 = 27(y + x)^2$ . Bosquejar la familia de curvas integrales y demostrar que la recta  $y + x = 0$  es la envolvente de dicha familia.
9. Se considera la ecuación diferencial  $y' = \sqrt{|y - 2|}$ . Estudiar la existencia y unicidad de solución de dicha ecuación pasando por cada punto del plano. Resolverla y dibujar las soluciones. Comparar la solución o soluciones pasando por el punto  $(3, 2)$  con la aproximación obtenida por el método de Euler.
10. Estudiar la existencia y unicidad de solución e intervalo de definición de ésta, para el problema de Cauchy:

$$y' = xy, \quad y(0) = 1.$$

Construir una aproximación de la solución en  $[-1, 1]$  utilizando el método de Euler para los pasos  $h = 0,1$  y  $h = 0,05$ , y comparar en cada caso con la solución exacta.

11. Resolver la ecuación  $y = xy' + y' - y'^2$ , estudiando las soluciones que pasan por cada punto del plano. Demostrar que la solución singular obtenida es la envolvente de la familia uniparamétrica de soluciones.
12. Comprobar que la ecuación diferencial  $(x + \sin x + \sin y) dx + \cos y dy = 0$  no es diferencial exacta. Encontrar algún factor integrante y resolver.
13. Resolver la ecuación  $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$ , haciendo un análisis de las soluciones que pasan por cada punto del plano. Calcular la envolvente de la familia solución, si la hay.

14. Bosquejar las curvas integrales mediante el campo de direcciones asociado a las ecuaciones:

$$a). y' = x(y - 1) \quad b). y' = \frac{x + |x|}{y + |y|}.$$

Comparar el resultado con el obtenido resolviendo ambas ecuaciones.

15. Dibujar el campo de direcciones y representar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación  $y' = \frac{y}{x^2}$ . Comparar con el dibujo de las curvas integrales de la ecuación.
16. Encontrar la familia de curvas ortogonales a  $x^2 = 4cy$ . Representar ambas familias de curvas.
17. Encontrar un factor integrante dependiente de  $xy$ , y resolver:

$$8y dx + 8x dy + x^2 y^3 (4y dx + 5x dy) = 0.$$

18. a). Sabiendo que  $\int \sin^{-1} ax dx = \frac{1}{a} \log |\tan(\frac{ax}{2})|$ , integrar la ecuación

$$\sin(2x)y' = 2(y + \cos x).$$

b). Estudiar la existencia y unicidad de solución de la ecuación pasando por cada punto del dominio:  $\{(x, y) / 0 < x < \frac{\pi}{2}, y \in \mathbf{R}\}$ . ¿Dónde están definidas dichas soluciones y cuántas de ellas están acotadas?. Hacer una gráfica aproximada de dichas soluciones.

19. Encontrar un factor integrante dependiente de  $\frac{y}{x}$  y decir si alguna de las siguientes ecuaciones admite dicho factor (resolverla en este caso):

$$y dx - x dy = 2x^3 \tan\left(\frac{y}{x}\right) dx, \quad y(x + y^2) dx + x^2(y - 1) dy = 0.$$

Resolver la ecuación que se pueda haciendo el cambio de variable  $z = \frac{x}{y}$  ó  $z = \frac{y}{x}$ .

20. Encontrar la familia de curvas ortogonales a  $x^2 - y^2 = cx$ .

21. Dado el problema de valor inicial:

$$y' = \frac{y}{\sin x}, \quad y(1) = 1.$$

- a). Utilizar el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial para bosquejar las curvas integrales de la ecuación.
- b). Encontrar la solución explícita del problema de Cauchy, así como el intervalo de existencia y unicidad de ésta.
- c). Calcular, mediante el método de Euler, la aproximación numérica de la solución en  $x = 1,3$  y en  $x = 0,7$  para el tamaño del paso  $h = 0,1$ . Comparar estos valores con la solución exacta en dichos puntos. ¿Cuál es el error que se comete? (trabajar con radianes).

22. Se considera el problema de Cauchy:

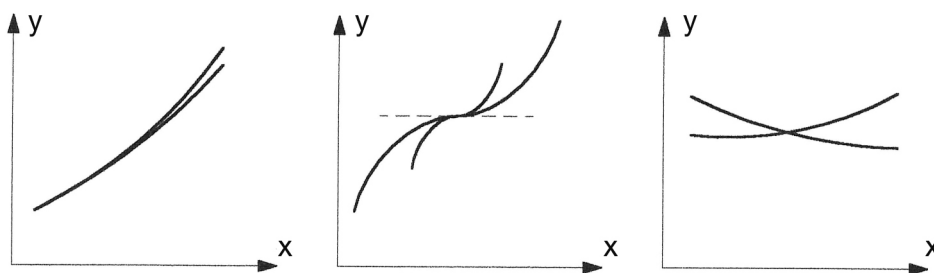
$$y' = ye^{-x^2}, \quad y(0) = 1.$$

- a). Encontrar la solución explícita y el intervalo de existencia y unicidad de ésta.
- b). Mediante el método de Euler, calcular la aproximación numérica de la solución en  $x = 0,2$  para los tamaños del paso  $h = 0,1$  y  $h = 0,05$ .
- c). Encontrar los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución. Comparar el valor aproximado de la solución dada por la serie en  $x = 0,2$  con los obtenidos en b).

23. Sea la ecuación diferencial  $y' = \sqrt{|1 - x^2 - y^2|}$ .

- a). Pueden las gráficas de dos soluciones de dicha ecuación cortarse, en algún punto del plano, tal como indican algunos de las

siguientes figuras:



b). Hacer una gráfica aproximada de la solución de la ecuación pasando por el punto  $(0, 0)$ .

24. Resolver la ecuación  $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ .

a). Dibujar las regiones del plano en que el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial está definido.

b). Dibujar el las regiones del plano en que existe solución única pasando por cada punto.

c). Dibujar las rectas o semirectas en las que el campo de direcciones está definido y no se tiene garantizado que exista solución única pasando por cada punto. Dar al menos una solución que pase por cada punto de las rectas o semirectas dibujadas.

25. Se consideran las ecuaciones:

$$y' = y + \log(x + 1), \quad y' = y^3 + \log(x + 1)$$

a). Resolver la ecuación que se pueda de las dos dadas. ¿Cuántas soluciones de cada ecuación verifican  $y(0) = 1$ , y qué se puede decir del intervalo de definición de éstas?.

b). Considerar la ecuación no resuelta en el apartado a)., junto con la condición inicial  $y(0) = 1$ . Calcular una aproximación de la solución, utilizando los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución. Decir dónde es ésta un buena aproximación de la solución.

c). ¿Cuántas soluciones de cada ecuación pueden verificar  $y(0) = 1, y'(0) = 2$ ?

26. Se considera el problema de Cauchy:

$$y' + y = xy^3, \quad y(0) = 1.$$

Estudiar la existencia y unicidad de solución, así como el intervalo de definición de ésta. Resolverla, si se puede, y hacer una gráfica aproximada de la solución.

27. Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2}{xy + x^2}$$

sabiendo que admite un factor integrante dependiente de  $xy^2$ .

28. Hallar la familia de curvas ortogonales a:  $x + \frac{y^2}{3} = c\sqrt{y}$ .

29. Bosquejar, a través del campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial, las curvas integrales de  $y' = e^{-x} - 2y$ . Comparar con las gráficas de las curvas integrales obtenidas al resolver la ecuación diferencial.

30. Se considera la ecuación de Riccati  $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$ , que tiene una solución particular  $y = e^x$ . Calcular las curvas integrales y hacer un dibujo aproximado de ellas. ¿Cuántas soluciones pasan por el punto  $(0, 1)$ ? (Razonar la respuesta).

31. Se considera la ecuación

$$y' = \frac{-y}{1 + ye^{-x}}.$$

a). Encontrar un factor integrante dependiente sólo de la variable  $x$  o de la variable  $y$ .

b). Encontrar la solución pasando por el punto  $(0, 1/2)$  y el intervalo de definición de ésta. Hacer lo mismo para el punto  $(0, -1/2)$ .

c). Dibujar, razonando la respuesta, el dominio del plano donde el campo de direcciones está definido, así como donde existe solución única pasando por cada punto. ¿Puede la gráfica de alguna solución pasar del semiplano  $y < 0$  al semiplano  $y > 0$ ?

32. En una reacción química que involucra la interacción de una molécula de una sustancia  $P$  con la de otra sustancia  $Q$ , se produce una molécula de una nueva sustancia  $Y$ . Se supone que  $p$  y  $q$  son respectivamente las concentraciones iniciales de las sustancias  $P$  y  $Q$ ,  $p < q$ , e  $y(t)$  es la concentración de  $Y$  en el instante de tiempo  $t$ . Así,  $(p - y(t))$  y  $(q - y(t))$  son las concentraciones de  $P$  y  $Q$  respectivamente en el tiempo  $t$ , y la ecuación que modela el incremento de la concentración  $y(t)$  está dada por:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(p - y(t))(q - y(t)),$$

siendo  $\alpha$  una constante estrictamente positiva. Se supone que en el instante inicial ( $t = 0$ ),  $y(0) = y_0$ .

a). Sin resolver la ecuación (ayudarse con alguna gráfica):

**a.1).** Encontrar la solución o soluciones de equilibrio ( $y'(0) \equiv 0$ ) y los correspondientes valores de  $y_0$ .

**a.2).** Supuesto  $y_0 \neq p$ . ¿Puede  $y(t)$  tomar el valor  $p$  en algún instante  $t^+$ ? Razonar la respuesta.

**a.3).** Supuesto  $y_0 = 0$ , razonar el intervalo  $[0, \delta)$  en que está definida la solución  $y(t)$  y hacia qué converge cuando  $t \rightarrow \delta$ .

b). Resolver el problema de Cauchy asociado a la ecuación diferencial dada para los valores:  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $y_0 = 0$ . Comprobar que el resultado coincide con el obtenido en el apartado de a,3).

33. Se considera la ecuación diferencial:

$$xy' = y + (x + y) \log\left(\frac{x + y}{x}\right).$$

a). Rayar el dominio del plano donde está definida la ecuación. Razonar cuántas soluciones de la ecuación pueden tener gráficas pasando por el punto  $(1, 1)$ .

b). Resolver la ecuación. Escribir la solución que verifica  $y(1) = 1$ , así como el intervalo en que está definida.

34. Encontrar la familia de curvas ortogonales a la familia

$$y^2 = Ce^x + x + 1.$$

35. Se considera la ecuación diferencial  $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$ . Resolver la ecuación. Encontrar la solución pasando por el punto  $(0, -1)$  así como el intervalo de definición de ésta (razonar la respuesta).

36. Se considera la ecuación:

$$y(x + y^2) dx + x^2(y - 1) dy = 0.$$

a). Hacer el cambio de variable  $u = \frac{x}{y}$  y escribir la nueva ecuación en términos de las variables  $y, u$  (lo mismo para las variables  $x, u$ ). Resolver la ecuación.

b). Escribir exactamente los puntos del plano en que el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial no está definido.

c). Escribir exactamente los datos iniciales  $(x_0, y_0)$  para los cuales no se tiene garantizado que la solución numérica del problema de Cauchy asociado,  $\varphi_h(x)$ , aproxime cuando  $h \rightarrow 0$  a la solución exacta, en algún intervalo conteniendo a  $x_0$ . Razonar la respuesta.

37. Resolver la ecuación diferencial

$$(\sin^2 y + x \cot y)y' = 1.$$

Escribir las curvas integrales pasando por  $(0, \frac{\pi}{2})$  y hacer una gráfica aproximada de ellas. ¿Dónde se puede decir que está definida de manera única la solución que pasa por  $(0, \frac{\pi}{2})$ ?. Razonar la respuesta.

38. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{2y + xe^{-y}}.$$

a). Escribir la solución general. Escribir las curvas integrales pasando por el punto  $(0, 0)$  ( $(e, 1)$ , respectivamente).

b). ¿Se puede encontrar una única solución explícita  $y = \varphi(x)$ , o alguna aproximación de ella, del problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{2y + xe^{-y}} \quad y(0) = 0,$$

en algún intervalo  $(-\delta, \delta)$ ?. ¿Y para el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{2y + xe^{-y}} \quad y(e) = 1,$$

en algún intervalo  $(e - \delta, e + \delta)$ ?. Razonar las respuestas.

c). Hacer un dibujo aproximado de la curva isoclina en la que las curvas integrales de la ecuación diferencial pasan de decrecientes a crecientes. Dibujar el vector del campo de direcciones sobre esta isoclina y rayar la región del plano donde las curvas integrales son crecientes. Razonar la respuesta.

39. Sea la ecuación  $y' = f(\frac{y}{x})$ , con  $f$  una función continua y con derivada continua en  $\mathbf{R}$ . ¿Puede alguna solución de esta ecuación diferencial ser tangente a alguna recta  $y = \alpha x$ , en algún punto  $(x_0, y_0)$ , siendo  $x_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq 0$ ? ( $\alpha$  es una constante). Razonar la respuesta. En caso afirmativo dar condiciones para  $f$ ,  $\alpha$  y la solución.

40. Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2,$$

sabiendo que  $y = x^r$  es una solución particular para algún  $r$ .

41. Se considera el modelo de crecimiento de una población:

$$\frac{dN}{dt} = N \ln\left(\frac{k}{N}\right) \quad N(0) = N_0,$$

siendo  $K$  una constante positiva y  $N(t)$  el tamaño de la población en el tiempo  $t$ .



- a). Encontrar las soluciones de equilibrio diciendo si el equilibrio es estable o inestable.
- b). Considerando  $0 < N_0 < K$ , determinar qué condición debe verificar  $N_0$  para que  $N(t)$  cambie de concavidad.
- c). Para  $0 < N_0 < K$ , razonar si para algún instante  $t^*$  puede verificarse  $N(t^*) = K$ .

## 7.2. Sobre el capítulo 2.

1. Se considera la ecuación  $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ , con  $a(x), b(x)$  funciones continuas en un intervalo  $I$  de  $\mathbf{R}$ . Sean  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  dos soluciones linealmente independientes de dicha ecuación en  $I$ . ¿Se pueden conocer  $a(x)$  y  $b(x)$  en función de  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ ? Razonar la respuesta.
2. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$y''' + 4y'' + 4y' = e^{-2x} + 8x + 8$$

$$y^2 y'' + y'^3 = 0$$

3. Encontrar la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = e^{-x^2}, \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \alpha, \end{cases}$$

buscando una solución de la ecuación homogénea de la forma:

a).  $y = e^{ax^2}$ ,

b). en forma de desarrollo en serie de potencias. ¿En qué intervalo está definida la solución del problema? ¿Coincide éste con el de convergencia de la serie de potencias solución?.

4. Resolver la ecuación:

$$y'' + (\tan x)y' = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

¿Hay alguna solución tal que verifique las condiciones  $y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 1$  o  $y(\frac{\pi}{4}) = 0, y'(\frac{\pi}{4}) = 1$ ? ¿Es única?. En caso afirmativo encontrarla, así como su intervalo de definición. Razonar la respuesta.

5. Sea  $y = \phi(x)$  una solución de la ecuación  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  en el intervalo  $(a, b)$  con  $p, q$  funciones continuas en dicho intervalo y  $\phi(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ . Demostrar que existen una constante  $C$ , y una función  $v = v(x)$  solución de una ecuación de Riccati, tales que:

$$\phi(x) = \exp\left(\int v(x) dx\right).$$

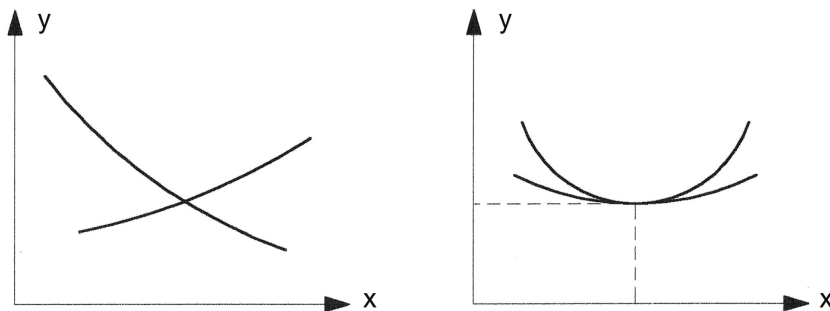
(indicación: considerese para ello  $v(x) = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ ).

6. Se consideran las ecuaciones diferenciales:

(a).  $y' = f(x, y)$ , con  $f, f_y$  funciones continuas en  $\mathbf{R}^2$

(b).  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , con  $p, q$  funciones continuas en  $\mathbf{R}$

¿Pueden las soluciones de estas ecuaciones tener las gráficas (1) o (2)?. Razonar la respuesta considerando los problemas de Cauchy asociados a dichas ecuaciones.



7. Aplicar la transformada de Laplace para resolver el problema de Cauchy:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1.$$

8. Se considera la ecuación que modela las vibraciones de un resorte que, en ausencia de amortiguación, es excitado por una fuerza externa:  $y'' + 4y = f(t)$ . Tomando  $f(t) = \cos(\alpha t)$  y suponiendo que el movimiento parte del reposo ( $y(0) = y'(0) = 0$ ), estudiar las vibraciones dependiendo del valor  $\alpha \neq 0$ . Hacer un gráfico aproximado de las soluciones.
9. Resolver la ecuación diferencial  $y'' + 6yy^3 = 0$ .
10. a). Resolver la ecuación  $y'' - xy = 0$ , buscando la solución en forma de un desarrollo en serie de potencias.
- b). ¿Qué se puede decir sobre la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - xy' = x \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1? \end{cases}$$

Dar una idea sobre cómo calcularla.

11. Aplicar el método de variación de parámetros para encontrar la solución de la ecuación de Euler no homogénea:

$$x^3 y''' + xy' - y = x.$$

12. Escribir un problema de Cauchy asociado a la ecuación de Legendre, diciendo dónde se tiene garantizada la existencia y unicidad de solución, y dar una idea sobre cómo encontrarla. Tómese para ello el valor del parámetro  $\alpha = 2$ .
13. Se considera la ecuación diferencial  $xy'' + y \sin x - x = 0$ .
- a). Encontrar los cinco primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la ecuación, verificando las condiciones iniciales  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ .
- b). Comparar la solución del problema a). con la solución que se obtiene al hacer la aproximación  $\sin x \approx x$ , en la ecuación.
14. Encontrar los cinco primeros términos del desarrollo en serie de la solución del problema de valor inicial

$$y'' - ye^{-x^2} = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

¿Qué se puede decir sobre la existencia y unicidad de solución?  
 ¿Coincide el intervalo de existencia con el de convergencia de la serie solución?

15. a). Aplicar el método de variación de parámetros para resolver la ecuación  $y'' - 2xy' + 2y = 0$ , sabiendo que una solución particular es un polinomio de primer grado. b). Encontrar la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + -2xy' + 2y = e^{-x^2}, \\ y(1) = \alpha, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

c). Teniendo en cuenta el tipo de ecuación considerada, ¿qué otro método se puede utilizar para resolver el problema del apartado b).? ¿Se obtendría la misma solución que en b).? ¿Cuál es el intervalo de definición de éstas?. ¿Qué ventajas y desventajas se observan con cada uno de los métodos utilizados? Razonar la respuesta.

16. Se considera un sistema resorte-masa no amortiguado, que en el instante  $t = 0$  está en reposo en la posición de equilibrio y se pone en movimiento bajo la acción de una fuerza de 1 Newton durante 1 segundo. Resolver el problema que modela las vibraciones de dicho resorte utilizando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + y = -u(t) + u(t - 1) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0?. \end{cases}$$

Hacer una gráfica aproximada de la solución.

17. Se consideran los problemas de Cauchy:

$$p,1). \begin{cases} y'' + y^5 = 0 \\ y(0) = 0,3, y'(0) = 0 \end{cases}, \quad p,2). \begin{cases} y'' + x^5 y = 0 \\ y(0) = 0,3, y'(0) = 0 \end{cases}$$

a). Encontrar la solución numérica en  $[-0,2, 0,2]$  de  $p,1)$  para el tamaño del paso  $h = 0,1$ .

b). Calcular los 11 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución de  $p,2)$ . ¿Qué potencias de  $x^n$  aparecen?. ¿Dónde converge la serie solución?

c). Escribir el correspondiente problema de Cauchy para la ecuación linealizada de la del problema  $p,1)$  en un entorno de  $y = 0$ . ¿Cuándo se puede afirmar que la solución de este problema es una buena aproximación de la del problema  $p,1)$ ? ¿Y de la del problema  $p,2)$ ? Comparar la solución obtenida con la que se obtiene en los apartados  $a)$  y  $b)$  en el intervalo  $[-0,2, 0,2]$ .

d). ¿Qué se puede decir sobre el intervalo en que existe solución para los problemas de los apartados  $a)$ ,  $b)$  y  $c)$ ? Intentar resolver el problema  $p,1)$  y decir qué problemas se presentan en dicha resolución.

e). Dibujar aproximadamente el mapa de fases asociado a la ecuación  $y'' + y^5 = 0$ . Hacer lo mismo con la ecuación linealizada en un entorno de  $y = 0$ . ¿Qué trayectoria corresponde a la solución del problema  $p,1)$ ? ¿Y a la del problema en  $c)$ ?

18. Considerar los distintos valores de  $n$ :  $n = 1, n = 2, n = 3$ . ¿Cuántas soluciones de la ecuación

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y + \log(x + 1)$$

pueden verificar  $y(0) = 1, y'(0) = 2$ ? Razonar la respuesta.

19. Dada la ecuación diferencial:  $(2x + 1)y'' + (2x - 1)y' - 2y = 0$ ,

a). Buscar la solución como un desarrollo en serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , y calcular los cinco primeros términos del desarrollo en función de las constantes  $a_0$  y  $a_1$ .

b). Utilizando el resultado obtenido en  $a)$ , comprobar que la solución de la ecuación que verifica  $y(0) = 1, y'(0) = -1$  es  $y(x) = e^{-x}$

c). Utilizando  $b)$ , y sabiendo que otra solución de la ecuación dada es un polinomio de primer grado, calcular el intervalo en que ambas soluciones son linealmente independientes. Utilizar el método de variación de parámetros para resolver la ecuación no homogénea:

$$(2x + 1)y'' + (2x - 1)y' - 2y = (2x + 1)^2.$$

20. Dada la ecuación diferencial:  $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$ ,

a). Buscar la solución como un desarrollo en serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , calculando los cinco primeros términos del desarrollo en función de las constantes  $a_0$  y  $a_1$ .

b). ¿Se puede saber a qué función elemental converge el desarrollo? (Indicación: considerar  $a_1 = a_0 + C$ , con  $C$  otra constante.

c) Utilizando el resultado de b) y el método de variación de parámetros, resolver la ecuación:  $(x - 1)y'' - xy' + y = x - 1$ .

21. Se considera el problema de Cauchy:

$$y'' - x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Utilizando los seis primeros términos del desarrollo en serie de potencias,  $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ , dar una aproximación de la solución.

b). Escribir el término general,  $a_n$ , de la serie en función de los anteriores, diciendo los coeficientes que se anulan en el desarrollo.

c). ¿En qué intervalo converge la serie solución?. Razonar la respuesta.

22. Sea  $f = f(x, y)$  una función continua y con derivadas parciales primeras continuas en  $\mathbf{R}^2$ . Razonar si pueden las funciones  $\varphi_1(x) = x$  y  $\varphi_2(x) = x + x^2$  ser dos soluciones, definidas en  $(-\infty, \infty)$  de las ecuaciones:

$$a). y' = f(x, y), b). y'' = f(x, y), c). y''' = f(x, y)$$

(Hacer alguna gráfica en caso necesario).

23. Se considera el problema de Cauchy:

$$y'' - y' + e^{2x} y = e^{2x}, \quad y(\log \pi) = 0, y'(\log \pi) = 0.$$

a). Sabiendo que una solución particular de la ecuación homogénea asociada es  $y_1(x) = \cos(e^x)$ , aplicar el método de variación de parámetros para resolver el problema.

b). Sin conocer la solución particular dada en el apartado a), razonar el intervalo dónde existe solución única del problema de Cauchy planteado, y cómo puede encontrarse.

24. Se considera el problema de Cauchy:

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

a). Escribir la aproximación de la solución utilizando los seis primeros términos del desarrollo en serie.

b). Escribir la solución exacta.

c). Comparar la aproximación obtenida en a) con la solución exacta (¿dónde es una buena aproximación de la solución?).

d). Teniendo en cuenta c), razonar si puede ocurrir lo mismo con la solución del problema de Cauchy:

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

25. Escribir la solución general de la ecuación que modela los desplazamientos que se originan en una viga sometida a una carga externa  $p(x) = e^x$ :

$$EIy^{(4)} - Ty'' = e^x,$$

dependiendo de la relación entre las constantes rigidez a flexión  $EI$  y esfuerzo axil  $T$ ,  $EI, T > 0$ .

26. Dar la aproximación de la solución del problema de Cauchy

$$y'' - \frac{1}{1+x^2}y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

utilizando los ocho primeros términos del desarrollo en serie de potencias. Escribir el término general en función de los anteriores. Razonar en qué intervalo se ha encontrado la solución.

27. Resolver las ecuaciones diferenciales:

$$a). \quad y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{-2x}$$

$$b). \quad x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{-2}$$

c). Reducir la ecuación b). a un sistema lineal. Escribir el sistema en notación vectorial. Escribir la matriz fundamental asociada al sistema homogéneo y la solución del sistema no homogéneo.

28. Se considera la ecuación diferencial:

$$y'' + \sin(x)y = 0.$$

a). Escribir los siete primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución del problema de Cauchy:

$$y'' + \sin(x)y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

b). Escribir los siete primeros términos del desarrollo en serie de potencias de dos soluciones linealmente independientes ( $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ ) de la ecuación diferencial. Razonar en qué intervalo convergen las series encontradas.

29. Resolver el problema de Cauchy:

$$y'' + 3xy' - 6y = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Dar una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

### 7.3. Sobre los capítulos 3 y 4.

1. Resolver el sistema:

$$x'' = 2z - 3y$$

$$y'' = z - 2y$$

2. Resolver el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x} \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

3. Resolver el sistema:

$$y_1'' = y_2, \quad y_2'' = y_1.$$



4. Utilizando transformada de Laplace, resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} z + y' = e^{-t} \\ 3z + z' = y - 3y' \end{cases}, \quad y(0) = 1, z(0) = 1.$$

5. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_2, & y'_2 = -2y_1 \\ y'_3 = -3y_4, & y'_4 = 3y_3 \end{cases}$$

6. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - y_2 - 1 \\ y'_2 = y_1 + y_2 + 4e^{2x} \end{cases}$$

7. Encontrar la solución del sistema:

$$\begin{cases} y'_1 + y'_2 = e^{-x} - y_2 \\ 2y'_1 + y'_2 = \sin x - y_2 \end{cases}$$

que verifique  $y_1(0) = -2$ ,  $y_2(0) = 1$ .

8. Encontrar la solución del sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = 4y_2 - y_1 \\ y'_2 = 3y_2 - 2y_1 + e^{-x} \end{cases}$$

verificando  $y_1(0) = y_2(0) = 0$ .

9. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 + y_2 + e^x \\ y'_2 = -2y_1 - y_2 - 1 \end{cases}$$

10. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y''_1 - 5y'_1 - 25y_2 - y_1 = 0 \\ y'_1 + y'_2 + 4y_2 = 0 \end{cases}$$

11. Utilizar la transformada de Laplace para encontrar la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1'' + 3y_1 + 2y_2' = 0 \\ y_2'' + 3y_2 - 2y_1' = 0 \\ y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = 2, y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

12. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y_2'' + 5y_2 + 2y_1' + y_1 = 0 \\ 3y_2'' + 5y_2 + y_1' + 3y_1 = 0 \end{cases}$$

13. Resolver, utilizando el método de variación de parámetros, el problema:

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1' - 4y_2 + \frac{1}{\cos 2x} \\ y_2'' = -2y_2 + 2y_1' \\ y_2(0) = 1, \quad y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0. \end{cases}$$

14. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 4y_2 + 2e^x \cos 2x \\ y_2' = y_1 + y_2 - e^x \sin 2x \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

15. Resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \quad y_2' = -y_1 + 2y_2 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4, \quad y_4' = -y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4. \end{cases}$$

Escribir la matriz fundamental del sistema y comprobar que lo es. Escribir la solución a partir de la matriz fundamental.

16. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + (\tan x)^2 - 1 \\ y_2' = -y_1 + \tan x \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

¿En qué intervalo se tiene garantizada la existencia y unicidad de solución?. Escribir la matriz fundamental.

17. Encontrar los cinco primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= xy_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + xy_2 \\ y_1(0) &= 1 \quad , \quad y_2(0) = 0 . \end{cases}$$

(Buscar la solución de la forma  $\bar{y}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \bar{a}_2x^2 + \cdots + \bar{a}_nx^n + \cdots$ , siendo ahora  $\bar{a}_i$  vectores.

- a). Encontrar el término general de la serie,  $\bar{a}_{n+1}$ , en función de los dos anteriores,  $\bar{a}_{n-1}$  y  $\bar{a}_n$ , para  $n > 1$ .
- b). Escribir el problema de Cauchy, para una ecuación diferencial de segundo orden, de que es solución  $y_2(x)$ .
- c). Razonar cuál es el intervalo de convergencia de la serie solución del sistema dado.

18. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_2 + 2e^x \\ y_1(0) &= 0 \quad , \quad y_2(0) = 0 . \end{cases}$$

Escribir: a). la solución del sistema homogéneo, b). La solución del sistema no homogéneo, c). la solución del problema de Cauchy.

19. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 + e^x \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \\ y_1(0) &= 3 \quad , \quad y_2(0) = -2 . \end{cases}$$

Utilizar la notación vectorial para escribir: a). la solución del sistema homogéneo, b). La solución del sistema no homogéneo, c). la solución del problema de Cauchy.

20. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 - y_2 + \frac{e^{3x}}{x} \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \\ y_1(1) &= -e^3 \quad , \quad y_2(1) = -e^3 . \end{cases}$$

Utilizar la notación vectorial para escribir: *a*). la solución del sistema homogéneo, *b*). La solución del sistema no homogéneo, *c*). la solución del problema de Cauchy.

21. Resolver los problemas de Cauchy:

$$a). \quad \begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1. \end{cases}$$

$$b). \quad \begin{cases} xy_1' = -y_1 - y_2 \\ xy_2' = 2y_1 - y_2 \\ y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1. \end{cases}$$

Indicar los intervalos en que están definidas las soluciones de *a*) y *b*) respectivamente.

22. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} y' = z(1 - y^2 - z^2) \\ z' = -x(1 - y^2 - z^2) \end{cases}$$

*a*). Encontrar los puntos críticos o puntos de equilibrio del sistema.

*b*). Demostrar que:  $y(t) = \alpha \sin(t(1 - \alpha^2))$ ,  $z(t) = \alpha \cos(t(1 - \alpha^2))$  es una solución del sistema, siendo  $\alpha$  un parámetro real,  $\alpha \neq 0, \pm 1$ .

*c*). Demostrar que las soluciones del apartado *b*). son los ciclos  $x^2 + y^2 = \alpha^2$  si  $\alpha \neq \pm 1$ . ¿Qué ocurre para  $\alpha = \pm 1$ ?. Comparar con el apartado *a*).

*d*). Demostrar que el punto crítico  $(0, 0)$  es un centro del sistema lineal homogéneo asociado.

*e*). Demostrar que el punto crítico  $(0, 0)$  es un centro del sistema considerado. Contradice esto el apartado *d*)?. Meditar la respuesta.

23. Dibujar el mapa de fases del sistema lineal

$$\begin{cases} y' = -2y \\ z' = -2z \end{cases}$$

¿De qué soluciones es trayectoria la curva que pasa por el punto  $(1, 1)$ ?

24. Se considera la ecuación que describe el alargamiento de un determinado resorte no lineal:

$$y'' + y - y^3 = 0$$

a). Dar condiciones iniciales (alargamiento  $(y(0))$  y velocidad  $y'(0)$ ), para que el resorte no se mueva. Escribir las correspondientes soluciones para estos datos iniciales. Razonar las respuestas.

b). Linealizar la ecuación para valores de  $y(t)$  cercanos a  $y = 2$ , y resolver la ecuación linealizada.

25. Se considera la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\sin(y)}{z}.$$

a). Escribir los puntos del plano donde el campo de direcciones no está definido.

b). Escribir los puntos del plano en los que no se tiene garantizado la existencia de una única solución pasando por ellos.

c). A través del campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial, dibujar aproximadamente las curvas integrales.

d). Resolver la ecuación diferencial.

e). Encontrar la solución explícita pasando por  $(0, 2)$  así como el intervalo de definición ésta. Lo mismo para el punto  $(\frac{\pi}{2}, -2^{\frac{1}{4}})$ .

f). Se considera la ecuación del péndulo no amortiguado

$$y'' + \sin(y).$$

Analizar qué significa que la trayectoria de una solución pase por un punto  $(y_0, z_0)$  (siendo  $(y_0, z_0)$  uno de los puntos del apartado e)) y cómo se comporta la solución  $y(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ :

i). para  $(y_0, z_0) = (0, 2)$ , ii). para  $(y_0, z_0) = (\frac{\pi}{2}, -2^{\frac{1}{4}})$ .

## 7.4. Sobre el capítulo 5.

1. Hallar para qué valores del parámetro  $\lambda$  el problema:

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = 1, & x \in (1, 2), \\ y(1) = 0, & y(2) + \lambda y'(2) = 2, \end{cases}$$

admite solución única. Para estos valores, encontrar la función de Green asociada al problema, así como la solución, en función del parámetro  $\lambda$ . Razonar, en otro caso, por qué no se puede encontrar la función de Green de la forma usual.

2. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para el problema:

$$\begin{cases} y'' = x, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 1, & y(1) + \lambda y'(1) = 1, \end{cases}$$

3. Dar resultados de existencia y unicidad de soluciones, así como el intervalo de definición de ésta, para los siguientes problemas:

$$a). \begin{cases} x^2 y'' = x, \\ y(1) = 3, & y'(1) = 4, \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} y'' = x, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) - y'(1) = 1, \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Utilizando la función de Green, resolver el problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\cos x} \right) = 1, & x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ y(0) = 3, & y(\frac{\pi}{4}) = 0. \end{cases}$$

5. Resolver, si se puede, utilizando la función de Green, el problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{x-2} \right) + 3 \frac{y}{(x-2)^3} = 1, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0. \end{cases}$$

6. Resolver el problema de contorno:

$$\begin{cases} -\cos^2 xy'' + 2 \sin x \cos xy' = \cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ y(0) - y'(0) = 0 & , \quad y(\frac{\pi}{4}) + y'(\frac{\pi}{4}) = 0. \end{cases}$$

7. Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 0, & x \in (1, 3), \\ y(1) = 0 & , \quad y(3) = 0. \end{cases}$$

Encontrar los valores de  $\lambda$  para los cuales no se puede encontrar la función de Green y explicar por qué, intentando construirla.

8. Razonar si existe solución, y si es única, del problema de contorno

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = x^2, & x \in (1, 3), \\ y(1) = 0 & , \quad y(2) + \lambda y'(3) = 1. \end{cases}$$

En caso afirmativo encontrarla mediante la función de Green.

9. Escribir el desarrollo en serie de Fourier de  $f(x) = x$ , en  $x \in (0, 2\pi)$ , a través de las funciones propias del problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 2\pi) \\ y'(0) = 0 & , \quad y'(2\pi) = 0. \end{cases}$$

10. Resolver utilizando la función de Green:

$$\begin{cases} x^2 y'' + y' = -x, & x \in (1, 2), \\ y(1) = 1 & , \quad y(2) = 0. \end{cases}$$

11. Resolver utilizando la función de Green:

$$\begin{cases} (x-1)^2 y'' + 2(x-1)y' = 1, & x \in (2, 3), \\ y(2) = 0 & , \quad y(3) = 0. \end{cases}$$

12. Escribir el desarrollo en serie de Fourier de  $f(x)$ , en  $x \in (-\pi, \pi)$ , a través de las funciones propias del problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-\pi, \pi) \\ y(-\pi) = 0 & , \quad y'(\pi) = 0, \end{cases}$$

siendo  $f(x) = x$  si  $x \in (-\pi, 0)$ , y  $f(x) = 0$  si  $x \in (0, \pi)$ .

13. Se considera la ecuación de una viga situada en  $x \in (0, \pi)$ , sometida a una carga externa  $p(x)$  y sujeta en los extremos:

$$EIy'' + Ty = p(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Supuesto que la relación entre las constantes rigidez a flexión  $EI$  y esfuerzo axial  $T$  es tal que  $\frac{T}{EI} = -1$  ( $\frac{T}{EI} = 1$ , respectivamente), encontrar el desplazamiento  $y(x)$ , siempre que se pueda (utilizar en este caso la función de Green, y tomar  $p(x) = e^x$ ).

14. Utilizar el hecho de que  $e^{-x^2} > 0$  para demostrar que el problema

$$\begin{cases} y'' - ye^{-x^2} = 0, & x \in (a, b), \\ y(a) = \gamma_1, & y(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

admite una única solución, para cualesquiera números reales  $a \neq b, \gamma_1$  y  $\gamma_2$ . (Indicación: ayudarse mediante una gráfica).

15. a). Utilizando la función de Green, resolver, si se puede, el problema:

$$\begin{cases} y'' + a^2y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, & y(\pi) = 0, \end{cases}$$

siendo  $a$  un número real. b). Basándose en el apartado anterior resolver:

$$\begin{cases} y'' + \frac{y}{4} = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 3, & y(\pi) = 0. \end{cases}$$

16. a). Sea  $\zeta$  cualquier número fijo del intervalo  $(0, 1)$ . Demostrar, utilizando la transformada de Laplace, que la solución del problema de contorno

$$\begin{cases} -y'' = \delta(x - \zeta), & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

coincide con el valor de la función de Green  $G(x, \zeta)$  asociado al problema.

- b). ¿Para qué valores de la constante  $\alpha$  admite solución única el problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' = x, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) + \alpha y'(1) = 0?. \end{cases}$$



¿Para qué valores de  $\alpha$  se puede resolver utilizando la función de Green del apartado a).?.

17. Se considera la ecuación de una viga situada en  $[0, 2\pi]$ , sujeta en los extremos. Encontrar las deformaciones de la viga para las cargas  $f(x) = 1$ , y  $f(x) = e^x$ .

$$\begin{cases} y'' + y = f(x), x \in (0, 2\pi) \\ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Hacer una gráfica aproximada de las soluciones en cada caso. Razonar a qué es debido el resultado obtenido.

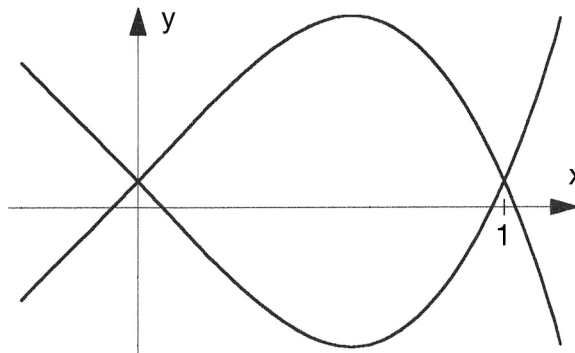
18. Se consideran los problemas de valores propios:

$$p,1). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in (0, \log 2) \\ y(0) = 0, \quad y(\log 2) = 0, \end{cases}$$

$$p,2). \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, x \in (1, 2) \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 0. \end{cases}$$

a). Encontrar los valores propios de  $p,1$ ) y de  $p,2$ ). b). Escribir el desarrollo en serie de Fourier relativo a las funciones propias del problema  $p,2$ ) para la función  $f(x) = 1$ , utilizando las de  $p,1$ ). ¿Se podría escribir este desarrollo sin utilizar las de  $p,2$ )?. Razonar la respuesta.

19. Sean  $q(x)$  y  $f(x)$  dos funciones continuas en  $\mathbf{R}$ . Razonar si pueden las gráficas de dos soluciones de la ecuación  $y'' - q(x)y = f(x)$ , cortarse como indica la figura. ¿Y si la ecuación es  $y'' - x^4 y = f(x)$ ?. Razonar la respuesta.



20. Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función  $f(x) = \sin x$ , relativo a las funciones propias del problema:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in (0, \pi) \\ y'(0) = 0, y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

21. Se considera un problema que sirve de modelo para describir las deformaciones de una viga (la viga se supone situada en el eje de las  $x$  con los extremos fijos):

$$\begin{cases} y'' = \frac{M(x)}{EI}, x \in (0, 3) \\ y(0) = 0, y(3) = 0. \end{cases}$$

Encontrar la solución en caso de que exista y sea única para los valores de la constante  $EI = 1$ , y del momento  $M(x)$ :  $M(x) = 2x$  para  $x \in [0, 1]$ ,  $M(x) = 3 - x$  para  $x \in [1, 3]$ .

22. Se considera le problema de valores propios:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0. \end{cases}$$

- a). Encontrar los valores propios y funciones propias del problema.  
 b). Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ , relativo a las funciones propias encontradas en a);  $f$  es la función definida:

$$f(x) = \frac{2x}{\pi} \text{ para } x \in [0, \frac{\pi}{2}], f(x) = \frac{2(\pi-x)}{\pi} \text{ para } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

Escribir la serie en el punto  $x = \frac{\pi}{4}$  así como el valor hacia el que converge (razonar la respuesta).

- c). Sea la función  $f(x)$  definida en b). Encontrar los valores de  $\mu$  para los que el problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' + \mu y = f(x), x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0, \end{cases}$$

no tiene ninguna solución. Encontrar la solución en caso de que exista (indicación: puede utilizarse el desarrollo en el apartado b)).

## 7.5. Sobre el capítulo 6.

1. Decir qué ecuaciones se obtienen al intentar aplicar el método de separación de variables a las ecuaciones de Laplace en coordenadas cartesianas  $xy$  y polares  $r\theta$  respectivamente:

$$u_x x + u_y y = 0, \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0.$$

2. Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & x \in (-\pi, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = x^2 - \pi^2, & x \in [-\pi, \pi], \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) \quad , \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t), & t \geq 0. \end{cases}$$

3. Resolver el problema mixto para la ecuación del calor en una varilla, conductora:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & x \in (-\pi, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = 2 + \sin 3x + 5 \cos 7x + 5 \sin 7x, & x \in [-\pi, \pi], \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) \quad , \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Calcular la temperatura del punto  $x = 0$  de la varilla en el instante de tiempo  $t = 50$  segundos.

4. a). Resolver el de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(x, 0) = \log(1 + x^2), & x \in (-\infty, \infty), \\ u_t(x, 0) = 2, & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

b). Reducir a la forma canónica la ecuación  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ , y plantear un problema de Cauchy para la ecuación obtenida, explicando la diferencia fundamental con el problema de Cauchy del apartado a).

5. a). Encontrar una solución particular del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(0, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0, \\ u(1, t) = 2u_0, & t \geq 0, \end{cases}$$

b). Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(1 - \cos \pi x), x \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 2u_0, t \geq 0. \end{cases}$$

6. Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_t - u = 0, x \in (0, 2\pi), t > 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 3 + 7 \cos 50x, x \in [0, 2\pi], \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, t \geq 0, \end{cases}$$

Decir cuales son los problemas de Cauchy y de contorno que aparecen a lo largo de la resolución.

7. Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_t - u = 0, x \in (0, n\pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, x \in [0, n\pi], \\ u(0, t) = u(n\pi, t) = 0, t \geq 0, \end{cases}$$

para los valores de  $n = 3$  y  $n = 5$ . Hacer lo mismo para cualquier valor de  $n \in \mathbf{N}$ .

8. Resolver el problema de contorno para la ecuación de Laplace en coordenadas polares  $(r, \theta)$ :

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r \in (0, R), \theta \in (0, \beta), \\ u(r, 0) = u(r, \beta) = 0, r \in [0, R], \\ u(R, \theta) = \theta(\theta - \beta), \theta \in [0, \beta]. \end{cases}$$

9. Se consideran los problemas:

$$a). \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, x \in (-\infty, \infty), \\ u_t(x, 0) = x, x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), x \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

siendo  $f$  una función regular que se anula fuera del intervalo  $(-2, 2)$ .

$$c). \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x + 4 \sin 5x + x, x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 0, x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Decir a qué tipo de problemas pertenecen cada uno de ellos y explicar las diferencias fundamentales entre los problemas a) y b), y a) y c). Resolverles si se puede.

10. Resolver el problema que se pueda de los siguientes, razonando la respuesta:

$$a). \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x, x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos(x - 2), x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x, x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = \cos(x - 2), x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

11. Resolver el problema de Cauchy con datos iniciales sobre la recta  $\zeta = -\eta$ :

$$\begin{cases} 3u_{\zeta\zeta} - 14u_{\zeta\eta} + 8u_{\eta\eta} = 0, \\ u(\zeta, \eta) = \sin 5\eta, \text{ en } \zeta = -\eta, \\ u_{\zeta}(\zeta, \eta) + u_{\eta}(\zeta, \eta) = 10\zeta^2, \text{ en } \zeta = -\eta, \end{cases}$$

12. Se considera el siguiente problema de Cauchy:

$$b). \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \text{ si } x < 0, \\ u(x, 0) = a, \text{ si } x > 0, \end{cases}$$

con  $a$  una constante. Encontrar la solución de dicho problema utilizando la función

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\eta^2} d\eta.$$

13. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = ag''(x), x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

Siendo  $a$  una constante estrictamente positiva,  $f$  y  $g$  funciones tales que sus transformadas de Fourier existen, así como las de  $g'$  y  $g''$ . (Indicación, para una constante  $\alpha > 0$ , buscar las transformadas de Fourier de las funciones:

$$\sin \frac{x^2}{\alpha} + \cos \frac{x^2}{\alpha} \text{ y } \cos \frac{x^2}{\alpha} - \sin \frac{x^2}{\alpha}.$$

14. Resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x \in (0, \pi), y \in (0, \pi), \\ u_x(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, y \in [0, \pi], \\ u(x, 0) = \cos 5x, \quad u(x, \pi) = (x - \pi)^2 x^2 e^{-x^2}, x \in [0, \pi], \end{cases}$$

15. Resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x \in (0, 2), y \in (0, 2), \\ u_x(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 1 + 5 \cos(50\pi y), y \in [0, 2], \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 2) = 0, x \in [0, 2], \end{cases}$$

16. Resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, x \in (0, 3), y \in (0, 3), \\ u_x(0, y) = 0, \quad u(3, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) + 7 \cos\left(\frac{5\pi}{6}y\right), y \in [0, 3], \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, 3) = 0, x \in [0, 3], \end{cases}$$

17. Se considera la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{5}{4}u_{\zeta\zeta} - u_{\zeta\eta} + u_{\eta\eta} = 0.$$

¿Se puede aplicar el método de separación de variables para resolver un problema asociado a dicha ecuación? Razonar la respuesta. Considérese el cambio  $y = \eta$ ,  $x = \zeta + \frac{\eta}{2}$  para reducir la ecuación a una del tipo ondas, calor o Laplace.

18. a). Se considera la ecuación  $u_{\zeta\eta} = 0$ . Hacer el cambio  $t = \zeta + \eta$ ,  $x = \zeta - \eta$ , para reducirla a la ecuación de ondas.

b). Resolver el problema mixto para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x, x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = \pi x - x^2, x \in [0, \pi] \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

19. Resolver el problema de Dirichlet para una ecuación asociada a la de Laplace, en coordenadas polares  $(r, \theta)$ :

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}u = 0, r \in (1, 2), \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ u(r, 0) = 0, u(r, \frac{\pi}{2}) = 1, r \in (1, 2), \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Dibujar la región del plano  $xy$  en que está planteada la ecuación.

20. a). Encontrar  $\alpha \geq 0$  tal que el problema de contorno ( para una ecuación de cuarto orden):

$$\begin{cases} y^{(iv)} - \alpha^4 y = 0, x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, y''(0) = 0, y(\pi) = 0, y''(\pi) = 0, \end{cases}$$

admита solución no nula. Escribir también dicha solución. Los  $\lambda_n = \alpha_n^4$  encontrados son los valores propios del problema, y las soluciones son las correspondientes funciones propias.

b). Aplicar el método de separación de variables para resolver el problema, que modela las vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x, x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 3 \sin 2x, x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t \geq 0, \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Escribir los problemas de contorno y de valores iniciales que aparecen a lo largo de la resolución.

21. Se considera una barra de longitud 1, cuyos extremos:  $x = 0$  no deja pasar el calor y  $x = 1$  se mantiene a temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$ . Se supone que en el instante  $t = 0$  cada punto de la barra tiene temperatura constante  $u(x, 0) = 2$ . Encontrar la distribución de la temperatura,  $u(x, t)$ , solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = 2, & x \in (0, 1), \\ u_x(0, t) = u(1, t) = 2, & t > 0. \end{cases}$$

a). ¿Qué dificultad se encontraría en la resolución del problema si se añade la condición  $u_t(x, 0) = 0$ ?

b) ¿Y si se cambia la condición  $u(1, t) = 0$  por  $u(1, t) = 1$  (es decir, el extremo  $x = 1$  se mantiene ahora a temperatura constante 1). Encontrar la solución en este caso.

22. Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi/2), \\ u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0, & r \in [0, 1], \\ u(1, \theta) = \theta(\theta - \pi/2), & \theta \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Escribir el problema de valores propios al que se llega al que se llega. Escribir la solución en coordenadas cartesianas, dibujando la región del plano donde está definida la solución.

23. Resolver el problema de Dirichlet, escrito en coordenadas polares  $(r, \theta)$ :

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}u = 0, & r \in (0, 2), \theta \in (0, \frac{3\pi}{2}), \\ u(r, 0) = 0, & u(r, \frac{3\pi}{2}) = 1, & r \in [0, 2], \\ u(2, \theta) = \theta(\theta - \frac{3\pi}{2}), & \theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

Escribir el problema de valores propios al que se llega. Escribir la solución en coordenadas cartesianas  $xy$ , y dibujar la región del plano  $xy$  en que está planteada la ecuación.



24. Resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 0, x \in (0, 1), y \in (0, 2), \\ u(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = 0, y \in [0, 2], \\ u_y(x, 0) = \frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{3x\pi}{2}\right), \quad u(x, \pi) = 5 \sin\left(\frac{3x\pi}{2}\right), x \in [0, 1], \end{array} \right.$$

25. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in (0, 2), t > 0, \\ u(x, 0) = 0, x \in (0, 2), \\ u_t(x, 0) = x, x \in (0, 2), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, t > 0. \end{array} \right.$$

26. a). Resolver el de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in (-\infty, \infty), t > 0, \\ u(x, 0) = 2, x \in (-\infty, \infty), \\ u_t(x, 0) = \cos x, x \in (-\infty, \infty). \end{array} \right.$$

Hacer una gráfica aproximada de la solución.

27. a). Resolver el problema mixto para la ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} + u = 0, x \in (0, 2), t > 0, \\ u(x, 0) = 1, x \in (0, 2), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, t > 0. \end{array} \right.$$

b). Se considera la ecuación del apartado a) y las mismas condiciones contorno. Teniendo en cuenta los cálculos para resolver el problema, razonar si pueden verificarse simultáneamente las condiciones iniciales  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$  para algunas funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

28. a). Resolver el problema mixto para la ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} - u = 0, x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), x \in (0, 1), \\ u_t(x, 0) = 1, x \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, t > 0. \end{array} \right.$$

b). Razonar en qué puntos del intervalo  $[0, 1]$  se tiene garantizada la convergencia de la serie de Fourier de  $f(x)$  hacia el valor  $f(x)$ , siendo la función  $f$  uno de los datos iniciales dados:  $f(x) = \sin(\pi x)$  ó  $f(x) = 1$ .

29. Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 2), t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, 2), \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(2, t) = 0, t > 0, \end{cases}$$

siendo  $f(x)$  la función definida:

$$f(x) = x \text{ si } x \in [0, 1], f(x) = 2 - x \text{ si } x \in [1, 2].$$



# Bibliografía

- [1] **M. Arrate.** *Ecuaciones Diferenciales.* Facultad de Ciencias. Santander, 1995.
- [2] **JR.F. Ayres.** *Ecuaciones Diferenciales: Teoría y Problemas.* MacGraw-Hill. Serie Schaum. Bogotá, 1969.
- [3] **W.E. Boyce y R.C. DiPrima.** *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* John Wiley. Nueva York, 1986. (Cuarta o quinta edición).
- [4] **F. Brauer y J.A. Nohel.** *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction.* Dover. Nueva York, 1968.
- [5] **M.Braun.** *Differential Equations and Their Applications.* Springer-Verlag. Nueva York, 1986. (Tercera edición).
- [6] **D.N. Burghes y M.S. Borrie.** *Modelling with Differential Equations.* John Wiley. Londres, 1981.
- [7] **E.A. Coddington.** *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Continental. Méjico, 1979.
- [8] **E.A. Coddington y N. Levinson.** *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill. Nueva York, 1955.
- [9] **L. Collatz.** *Differential Equations: An Introduction with Applications.* John Wiley. Hamburgo, 1986.
- [10] **R. Courant y D. Hilbert** *Methods of Mathematical Physics.* Interscience (2 vols.). Nueva York, 1962.

- [11] **M. Crouzeix** y **A.L. Mignot**. *Analyse Numérique des Equations Différentielles*. Masson. París, 1984.
- [12] **P. Duchateau** y **D.W. Zachmann**. *Partial Differential Equations*. MacGraw-Hill, Serie Schaum. Nueva York, 1986.
- [13] **L. Elsgoltz**. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo de Variaciones*. Mir. Moscú, 1977.
- [14] **E. Garbayo**. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Umbon. Madrid, 1985.
- [15] **M. de Guzman**. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de la Estabilidad y Control*. Alambra. Madrid, 1975.
- [16] **W. Hurewicz**. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Dover. Nueva York, 1990.
- [17] **E. Isaacson** y **H.B. Keller**. *Analysis of Numerical Methods*. John Wiley. Nueva York, 1966.
- [18] **P.W. Jordan** y **P. Smith**. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Calderon Press. Oxford, 1976.
- [19] **R. Kent Nagle** y **E.B. Saff**. *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales*. Addison-Wesley Iberoamericana. Nueva York, 1992. (Segunda edición).
- [20] **A. Kiseliiov** , **M. Krasnov** y **G. Makarenko**. *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Mir. Moscú, 1979.
- [21] **J.C. Lucena** y **J.L. Nuñez**. *Problemas de Ecuaciones Diferenciales*. Alexa. Madrid, 1972.
- [22] **F. Marcellan**, **L. Casasús** y **A. Zarzo**. *Ecuaciones Diferenciales: Problemas Lineales y Aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid, 1990.
- [23] **S.G. Mikhlin**. *Mathematical Physics, an Advanced Course*. North-Holland. Leningrado, 1969.

- [24] **T. Myint-U.** *Ordinary Differential Equations.* North-Holland. Nueva York, 1987.
- [25] **T. Myint-U.** *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers.* North-Holland. Nueva York, 1987.
- [26] **S. Novo, R. Obaya y J. Rojo.** *Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Diferenciales.* McGraw-Hill. Madrid, 1995.
- [27] **I. Petrovsky.** *Théorie des Equations Différentielles Ordinaires et des Equations Intégrales.* Mir. Moscú, 1988.
- [28] **P.A. Raviart y J.M. Thomas.** *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles.* Masson. París, 1988.
- [29] **J. Ray Hanna y J.H. Rowland.** *Fourier Series, Transforms and Boundary Value Problems.* John Wiley. Nueva York, 1990.
- [30] **E. de la Rosa.** *Ecuaciones en Derivadas Parciales.* E.T.S. Ingenieros de Caminos. Madrid, 1985.
- [31] **F. Simmons.** *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* McGraw-Hill. Méjico, 1993. (Segunda edición).
- [32] **I.N. Sneddon.** *Fourier Transforms.* McGraw-Hill. Nueva York, 1951.
- [33] **I.N. Sneddon.** *The Use of Integral Transform.* McGraw-Hill. Nueva York, 1972.
- [34] **M.R. Spiegel.** *Transformada de Laplace: Teoría y Problemas.* MacGraw-Hill, Serie Schaum. Madrid, 1970.
- [35] **H.F. Weinberger.** *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.* Reverté. Barcelona, 1970.
- [36] **H.K. Wilson.** *Ordinary Differential Equations.* Addison Wesley. Edwardsville, 1971.