NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2022/23
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen extraordinario, 2^o parcial: 1- Febrero - 2023

Observación: No utilizar calculadora, ni apuntes, ni dispositivos electrónicos (antes de comenzar el examen deben de situarse fuera del alcance). Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución. Duración (2h 15m)

EJERCICIO 1

Resolver el problema de valores iniciales para un sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + e^{2x} \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \;\; y_2(0) = 0.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA dado

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

a). Resolver el problemas de contorno

$$x^2y'' + xy' - 4y = 1, \quad x \in (1,2)$$
$$y(1) = 0, \quad y'(2) = 0$$

SOLUCIÓN

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{4}{x^2}u = 0.$$

Encontrar soluciones independientes de y que se anulen para $x = 1$. Asimismo, encontrar soluciones que esten acotadas cuando $x \to \infty$. Relacionar dichas soluciones con el apartado a) si se puede; justificar la respuesta.

SOLUCIONES $/u = 0$ para $x = 1$:

SOLUCIONES acotadas:

RELACIÓN con a).:

EJERCICIO 3 Encontrar los valores propios y funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 2\pi)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(2\pi) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$, en términos de las funciones propias encontradas, en el intervalo $(0, 2\pi)$. Escribir el primer coeficiente de Fourier no nulo.

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

DESARROLLO DE $f(x)$.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad x \in (0, 2\pi)\,, \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0\,, \\ u_x(2\pi, t) &= 0, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

cuando $f(x) = 1$, y cuando $f(x) = \sin(x/4)$. Usar la separación de variables y los resultados del ejercicio 3 si se precisa. Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega y las ecuaciones en la variable t que se resuelven.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

ECUACIONES en la variable t:

SOLUCION del problema para $f(x) = 1$:

SOLUCION del problema para $f(x) = \sin(x/4)$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)\, dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}\, dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}\, dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\, dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\, dx)}{(y_1(x))^2}\, dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\, , \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\, dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$
$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$