

Ampliación de Matemáticas - 2^o Curso, 2021/22

Grado en Ingeniería Civil (Mención en Construcciones Civiles)

HOJA 8 - Tema 6: Ecuaciones en Derivadas Parciales

Problemas de valores iniciales / contorno / mixtos (procesos estacionarios / ondas / calor / vibraciones)

1. Resolver los problemas de Cauchy para una EDP de primer orden, relacionados con modelos de propagación de ondas (tomar $c = \pm 2$)

$$\begin{cases} u_t - cu_x = 0, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x, 0) = (x^2 + 1)^{-1}, & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - cu_x = e^x, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x, 0) = (x^2 + 1)^{-1}, & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + 4u_x + u = x, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x, 0) = \exp(-x^2), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

2. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x), & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x, 0) = 0, & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

a). Tomar $f(x) = \sin(x)$ en ambos ejercicios.

b). Tomar el dato inicial $f(x)$ definida como: $f(x) = x + 1$ para $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 1 - x$ para $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \notin [-1, 1]$

3. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

a). Tomar $c = 3$, y los datos iniciales

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0, & \text{si } x \notin [-1, 1]. \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

Encontrar el instante de tiempo t_0^* en el que el punto $x = 100$ de la cuerda empieza a vibrar y el instante t_f^* en el que deja de vibrar.

b). Tomar $c = 5$, $f = \sin(x)$, $g = 0$,

c). Tomar $c = 2$, $f = \sin(x)$, $g = \cos(x)$

4. Se considera un modelo de vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \quad x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x, \quad x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 3 \sin 2x, \quad x \in [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

Utilizar el método de separación de variables para demostrar que la solución es: $u(x, t) = \sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4} \sin(4t))$

5. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$a). \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1], \\ u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{array} \right.$$

con los distintos datos iniciales:

$$f(x) = \sin(2\pi x)/2$$

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)}{2}$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4^2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1], x \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \end{array} \right.$$

Complemento de prácticas (relacionado con los ejercicios 1–5): crear funciones MATLAB que permitan simular propagación de ondas / difusión del calor/ vibraciones de cuerdas / vibraciones de vigas .

6. Intentar aplicar el método de separación de variables para resolver las ecuaciones

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad (5/4)u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Reducirlas a una del tipo calor, ondas o Laplace mediante un cambio de variables.

7. Resolver los problemas mixtos para la ecuación del calor

$$a). \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x^2(x - 1), \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

$$b). \left\{ \begin{array}{l} u_t - 4u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x^2(x - 1), \quad x \in [0, 1] \\ u_x(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

8. Resolver los problemas mixtos para la ecuación de ondas

$$a). \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(x), & x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = x^2 - \pi x, & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x \in (0, 2), t > 0 \\ u(x, 0) = x(x - 2), & x \in (0, 2), \\ u_t(x, 0) = 1, & x \in (0, 2), \\ u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

9. Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(x\pi/2), & x \in [0, 1], \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

10. Resolver el problema mixto con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} - u = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \\ u(1, t) = e^t, & t > 0. \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $u_p(x, t) = xe^t$ es una solución particular de

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} - u = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \\ u(1, t) = e^t, & t > 0. \end{cases}$$

Encontrar u_p aplicando el método de separación de variables

11. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $u_p(x, t) = x(1 - x^2)/6$ es una solución particular de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Encontrar u_p aplicando el método de separación de variables

12. Resolver los siguientes problemas de contorno:

a) Problema de Dirichlet en el cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, 1), y \in (0, 1), \\ u(0, y) = y(y-1) & , \quad u(1, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = 0 & , \quad u(x, 1) = 0, \quad x \in [0, 1], \end{cases}$$

b). Problema de Neumann en el cuadrado $(0, \pi) \times (0, \pi)$.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x, y \in (0, \pi), \\ u_x(0, y) = 0 & , \quad u_x(\pi, y) = 0 \quad , y \in [0, \pi], \\ u_y(x, 0) = \cos x & , \quad u_y(x, \pi) = 0, \quad x \in [0, \pi], \end{cases}$$

c). Problema de contorno de tipo mixto en el rectángulo $(0, \pi) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, 1), \\ u_x(0, y) = 0 & , \quad u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \\ u_y(x, 0) = \cos x & , \quad u_y(x, 1) = 0, \quad x \in [0, \pi], \end{cases}$$

13. Resolver el problema de Dirichlet para una ecuación asociada a la de Laplace, en coordenadas polares (r, θ) : $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}u = 0, & r \in (1, 2), \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ u(r, 0) = 0 & , \quad u(r, \frac{\pi}{2}) = 1, \quad r \in (1, 2), \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = 0, & \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Dibujar la región del plano xy en que está planteado el problema.

14. Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$(a) \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi/2), \\ u(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0, & r \in [0, 1], \\ u(1, \theta) = g(\theta), & \theta \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

r y θ son las coordenadas polares. Dibujar la región del plano xy en que está planteado el problema. Tomar por ejemplo, $g = \sin(2\theta)$ y $g = \theta(\theta - \pi/2)$