

Ampliación de Matemáticas - 2^o Curso, 2021/22

Grado en Ingeniería Civil (Mención en Construcciones Civiles)

HOJA 7 - Tema 5: Problemas de contorno en EDO

Valores propios y desarrollos en serie de Fourier

1. Se considera el modelo de deformaciones de una viga de longitud l , sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = l$, y sometidas a fuerzas externas que generan un momento:

$$EIy'' + Ty = p(x), \quad x \in (0, l)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

Tomando $l = \pi$ y $p(x) = e^x$ ($p(x) = \sin(2x)$, respectivamente) calcular la deformación $y(x)$ supuesto que la relación entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T es tal que $T/EI = 1$. Hacer lo mismo para $T/EI = -1$. Razonar a qué se deben los resultados.

1.a.- Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = \pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

1.b.- Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = -\pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

2. Resolver los problemas de contorno que se pueda de los que se dan a continuación, determinando si tienen solución única.

a). $y'' + 4y = \sin(x), \quad x \in (0, \pi)$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

b). $y'' - x^2y = e^x, \quad x \in (0, 1)$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

c). $\left(\frac{y'}{\cos(x)}\right)' = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$$y(0) + y'(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$$

d). $(x-1)^3y'' + 3(x-1)^2y' + (x-1)y = (x-1)^2, \quad x \in (2, 3)$

$$y(2) = 5, \quad y(3) + 2y'(3) = 0$$

Complemento de prácticas: utilizar MATLAB para resolver con *dsolve* los ejercicios 1-2

3. Encontrar las relaciones entre T y EI en el ejercicio 1, de manera que la viga se deforme para $p(x) = 0$. Tomar $l = 1$ y $l = \pi$.

4. Encontrar los valores propios y las funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville

$$a). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-1, 1) \\ y(-1) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y'(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$d). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, & y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$e). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 2) \\ y'(0) = 0, & y'(2) = 0 \end{cases}$$

$$f). \begin{cases} (x+1)^2 y'' + 2(x+1)y' + \lambda y = 0, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

Desarrollar las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = x$ en serie de Fourier de las funciones propias de los problemas (a)–(e).

Complemento de prácticas: Crear una función MATLAB que lea n y nos de los n primeros términos del desarrollo en serie de Fourier, relativa a las funciones propias de (a), de una función f continua a trozos en $[0,1]$. Hacer la gráfica de la función f y de las sumas parciales de la serie comparando la aproximación. Tomar para esto $f(x) = x(x-1)$, $f(x) = x$ y f definida como:

$$f(x) = x \text{ si } x \in [0, 1/2], \quad f(x) = 0 \text{ si } x \in (1/2, 1].$$

5. Encontrar los valores propios y las funciones propias asociadas del problema con condiciones de contorno periódicas:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

4.1.- Desarrollar en serie de Fourier de las funciones propias del problema dado, las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = x, \text{ si } x \in [-\pi, 0], \quad f(x) = 0, \text{ si } x \in [0, \pi]$$

$$(b) \quad f(x) = -1, \text{ si } x \in [-\pi, 0], \quad f(x) = 1, \text{ si } x \in (0, \pi]$$

$$(c) \quad f(x) = x^2 - \pi^2, \text{ si } x \in [-\pi, \pi]$$

4.2.- Expresar la función $f(x) = x + \pi$ definida en $[-\pi, \pi]$ en serie de Fourier de las funciones propias de dicho problema.

4.3.- Expresar la función $g(t) = (t-2)\pi$ definida en $[2, 4]$ en serie de las funciones propias obtenidas (para ello, hacer un cambio de variable $x = \alpha t + \beta$, para constantes α y β a determinar, que transforme el intervalo $[2, 4]$ en $[-\pi, \pi]$).

6. Encontrar los valores propios y funciones propias de los problemas

(a)

$$y'' + y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \ln(2))$$

$$y(0) = 0, \quad y(\ln(2)) = 0$$

(b)

$$x^2 y'' + xy' + y + \lambda y = 0, \quad x \in (1, 2)$$

$$y(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$ en términos de las funciones propias de (b) en el intervalo $[1, 2]$. (nota: se puede utilizar (a) para obtener dicho desarrollo).

7. Encontrar los valores propios y las funciones propias del problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r \frac{dy}{dr}) + \lambda r y = 0, & r \in (0, R), \\ y(R) = 0, & y, \frac{dy}{dr} \text{ acotadas cuando } r \rightarrow 0. \end{cases}$$

8. Escribir en forma autoadjunta las siguientes ecuaciones:

Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$

Ecuación de Bessel: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

Ecuación de Laguerre: $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$

Ecuación de Hermite: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$,

n (ν) denota un número natural (real). ¿Qué ecuación aparece en el ejercicio 6?

Nota: estas ecuaciones aparecen de manera natural al utilizar la separación de variables para resolver distintos modelos de ingeniería gobernados por EDP