

## PROBLEMAS DE CONTORNO\*

La forma más general de un problema de contorno para una ecuación de segundo orden es:

$$(\text{PC}) \begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = h(x) & , \quad x \in (a, b), \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) + \alpha_3y(b) + \alpha_4y'(b) = \gamma_1, \\ \beta_1y(a) + \beta_2y'(a) + \beta_3y(b) + \beta_4y'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

$a_0(x) \neq 0$  en  $[a, b]$  y las constantes  $\alpha_i, \beta_i$  afectando a  $a$  ( $b$  respectivamente) no todas nulas.  $\gamma_i$  constantes

### Definiciones:

- En el caso  $h(x) = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$  se dice que el problema **(PC)** es un **problema de contorno homogéneo**.
- Si en las condiciones de contorno  $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , se dice que las **condiciones** son **de tipo separado**.
- Si  $y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$  se dice que las **condiciones de contorno** son **periódicas**.
- **(PC)** es un **problema de contorno regular** si:

$$(\text{PCR}) \begin{cases} (\tilde{p}(x)y')' + q(x)y = h(x), & x \in (a, b), \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

$\tilde{p}(x), \tilde{p}'(x), q(x), h(x)$  funciones continuas en  $[a, b]$ ,  
 $\tilde{p}(x) > 0, \forall x \in [a, b], -\infty < a < b < \infty$ ,  
y  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ .

- Es un problema de contorno **singular** si no es regular.

\*

**Resúmenes / Capítulo 5 / Ecuaciones Diferenciales!?.  
Una introducción. UC, M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez**

• Ecuación en forma autoadjunta:

$$(\tilde{p}(x)y')' + q(x)y = h(x)$$

REDUCCION A FORMA AUTOADJUNTA:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = h \longrightarrow (py')' + qy = \tilde{h}$$

multimplicando por

$$r(x) = \frac{\exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right)}{a_0(x)},$$

$$\tilde{p}(x) = \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx, \quad q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx,$$

$$\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_0(x)} \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx.$$

*De manera general, el problema de contorno homogéneo asociado a (PCR) o (PC) tiene especial interés: la alternativa de Fredholm!*

$$(PCR) \begin{cases} (\tilde{p}(x)y')' + q(x)y = h(x), & x \in (a, b), \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = \gamma_1, \\ \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

$$(PCH) \begin{cases} (\tilde{p}(x)y')' + q(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = 0, \\ \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = 0. \end{cases}$$

**Teorema 1** *El problema de contorno (PCR) admite solución y ésta es única para cualesquiera valores de las constantes  $\gamma_1, \gamma_2$  y para cualquier función  $h(x)$  si y sólo si el problema homogéneo asociado (PCH) admite sólo la solución trivial  $y \equiv 0$ .*

## Definición: problemas de valores propios regulares

Encontrar los valores  $\lambda$  (*valores propios*) tales que existe una solución no nula  $y(x)$  (*función propia*) de:

$$(\text{PVP}) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$p(x), p'(x), q(x), s(x)$  funciones continuas en  $[a, b]$ ,  
 $s(x), p(x) > 0, \forall x \in [a, b], -\infty < a < b < \infty$ ,  
y  $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ .

### Teorema

1. Existe una infinidad numerable de valores propios que convergen a infinito:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k < \dots \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty.$$

2. Para cada valor propio,  $\lambda_k$ , hay una única función propia asociada,  $\phi_k(x)$ , linealmente independiente.

3. Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo  $(a, b)$ , para el peso  $s$ ; es decir:

$$\int_a^b \phi_k(x) \phi_j(x) s(x) dx = \delta_{kj} \text{Cte.}, \forall k, j = 1, 2, 3, \dots$$

4. Para cada función  $f(x)$  continua a trozos en  $[a, b]$  admite un desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

donde las constantes  $c_n$  son los llamados **coeficientes de Fourier** y están dados por la fórmula:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \phi_k(x) s(x) dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx}.$$

La convergencia de la serie en hacia la función  $f$  tiene lugar en el sentido de la media cuadrática; es decir:

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

**Extensiones:** sobre convergencia serie / sobre c.c. periódicas

## Observación:

- Si las condiciones de contorno son periódicas ( $y(a) = y(b)$ ,  $y'(a) = y'(b)$ ), se tienen los resultados del teorema: ahora para cada valor propio  $\lambda_k > \lambda_1$  puede haber dos funciones propias linealmente independientes asociadas.
- El sumatorio del desarrollo en serie se extiende a todas las funciones propias.

**Desarrollo clásico de Fourier en  $[-\pi, \pi]$  en término de las funciones  $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ :**

Dada  $f(x)$  continua a trozos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ ,

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx),$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$  son funciones propias del PVP:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-\pi, \pi), \\ y(-\pi) = y(\pi), & y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

$\phi_{0,0}(x) = 1$  asociada al valor propio  $\lambda_0 = 0$

$\phi_{k,1}(x) = \cos(kx)$ ,  $\phi_{k,2}(x) = \sin(kx)$  f.p. linealmente independientes asociadas al valor propio  $\lambda_k = (k\pi)^2$ .

**Ortogonales!:** para  $k, j = 0, 1, 2 \dots$ ,  $m, n = 0, 1, 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{k,m}(x) \phi_{j,n}(x) dx = 0, \quad \text{si } (k, m) \neq (j, n)$$

## Otras propiedades de los coeficientes de Fourier

$$\text{(PVP)} \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y = 0, & x \in (a, b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$f(x)$  continua a trozos en  $[a, b]$  su *desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias*  $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x),$$

$c_n$  son *coeficientes de Fourier*:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x) \phi_k(x) s(x) dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x) dx}.$$

La convergencia es *media cuadrática*; es decir:

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Los  $c_n$  son tales que hacen que la convergencia es en media sea la más rápida: *minimizan el funcional*

$$F(c_1, c_2, \dots, c_N) = \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)|^2 s(x) dx.$$

### Teorema.

Sea  $f(x)$  una función continua a trozos en  $[a, b]$  tal que su derivada también lo es. Entonces, la serie de Fourier de las funciones propias del problema PVP, converge en cada punto  $x \in (a, b)$  hacia el valor  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ . Si además  $f$  satisface las condiciones de contorno de PVP, entonces la serie también converge en los extremos del intervalo.