

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN $n > 2^*$

Ecuaciones lineales de tercer orden

Ecuación lineal **homogénea** de orden 3:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0, \quad (\mathbf{LH})$$

Ecuación lineal **no homogénea** de orden 3:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = r(x), \quad (\mathbf{LNH})$$

donde los coeficientes a_i , $i = 1, 2, 3$, y r son funciones reales definidas en $I = (a, b)$ y continuas

Solución general de (LNH):

$$y_{GNH}(x) = y_{GH}(x) + y_p(x)$$

$y_{GH}(x)$ denota la solución general de **(LH)**
 $y_p(x)$ denota una solución particular de **(LNH)**.

Si $\{y_1, y_2, y_3\}$ son 3 soluciones de **(LH)** linealmente independientes en I :

$$y_{GH}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$$

$$y_{GNH}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + y_p(x)$$

Definición: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ son **linealmente independientes** en I cuando

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \alpha_3\varphi_3(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Supuesto que las funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ son continuas y dos veces derivables en I **se define** la función **Wronskiano** de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) \end{vmatrix}$$

*

**Resúmenes / Capítulo 2 / Ecuaciones Diferenciales!?.
Una introducción. UC, M^a Eugenia Pérez Martínez**

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE (LH)

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 \quad (\text{LH})$$

- **Combinación lineal de soluciones es solución:**

Si $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ son soluciones de (LH) en I entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x)$ es también solución de (LH) en I (α_i son constantes cualesquiera).

- **TEOREMA:** Sean $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ tres soluciones de (LH) en I ; son linealmente independientes

$$\iff W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0, \forall x \in I$$

$$\iff W[y_1, y_2, y_3](x_0) \neq 0 \text{ para algún } x_0 \in I.$$

Bajo estas condiciones, cualquier otra solución de (LH) es combinación lineal de $\{y_1, y_2, y_3\}$.

- Siempre existen tres soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ linealmente independientes de (LH) en I . Se dice que $\{y_1, y_2, y_3\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

- Dadas tres soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ de (LH), linealmente independientes en I la **solución general** es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x), \quad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes.}$$

► **Ecuaciones lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes.**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

a_i constantes $i = 1, 2, \dots, n$. Se resuelven en $(-\infty, \infty)$.
Se busca: $y = e^{\lambda x} \implies \lambda$ debe ser raíz del **polinomio característico**:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ las raíces de este polinomio en el cuerpo de los complejos.

Posibilidades

- a). Todas las raíces son reales distintas. El conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}.$$

- b). Todas las raíces son reales y algunas de ellas coincidentes. Entonces, por cada raíz λ_k , de multiplicidad n_k , hay n_k soluciones de la ecuación linealmente independientes asociadas a esta raíz:

$$\{e^{\lambda_k x}, x e^{\lambda_k x}, x^2 e^{\lambda_k x}, \dots, x^{n_k-1} e^{\lambda_k x}\}$$

- c). Hay al menos una raíz compleja $\lambda_k = p + qi$ de multiplicidad n_k (el conjugado de λ_k , $p - qi$, es también una raíz de multiplicidad n_k). Entonces, hay $2n_k$ soluciones linealmente independientes de la ecuación asociadas a ambas raíces:

$$\{e^{px} \cos(qx), e^{px} \sin(qx), x e^{px} \cos(qx), x e^{px} \sin(qx), x^2 e^{px} \cos(qx), x^2 e^{px} \sin(qx), \dots, x^{n_k-1} e^{px} \cos(qx), x^{n_k-1} e^{px} \sin(qx)\}.$$

► **La ecuación de Euler de orden n :**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

Hacer $x = e^t$ para $x > 0 \rightarrow$ coeficientes constantes

Ecuaciones lineales de orden n , $n > 2$.

La *ecuación lineal homogénea de orden n* tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (\mathbf{LH})$$

donde los coeficientes a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son funciones reales definidas y continuas en un intervalo $I \equiv (a, b)$. La teoría general para ecuaciones lineales de orden 2 se extiende a las de orden $n > 2$.

La *ecuación lineal no homogénea de orden n* tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x) \quad (\mathbf{LNH})$$

donde $r : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$. La *solución general de (LNH)* es:

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_p(x),$$

donde $y_{GH}(x)$ es la *solución general de (LH)* e $y_p(x)$ es una *solución particular de (LNH)*. Más concretamente podemos escribir

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

donde $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son n soluciones de **(LH)** linealmente independientes.

El resultado de existencia y unicidad de solución satisfaciendo unas condiciones iniciales nos lo da el teorema siguiente:

Teorema 3 Sean a_i, r funciones reales continuas en (a, b) . Sea $x_0 \in (a, b)$, $y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n \in \mathbf{R}$. Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0^1, y'(x_0) = y_0^2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^n, \end{cases}$$

definida en todo el intervalo (a, b) .

Definición: Se dice que n funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ son *linealmente independientes* en el intervalo I cuando

$$\text{Si } \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Se dice que las funciones son *linealmente dependientes* cuando no son linealmente independientes: una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras $(n - 1)$.

Definición: Wronskiano de n funciones $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades de la solución de ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad \text{(LH)}$$

1. Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ son soluciones de **(LH)** en I entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_k y_k(x)$ es también solución de **(LH)** en I (α_i son constantes cualesquiera).
2. n soluciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ de **(LH)** son linealmente independientes en I cuando, para cualquier punto $x_0 \in I$, se verifica $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$.

3. Dadas n soluciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ de **(LH)** linealmente independientes en I , cualquier otra solución $y(x)$ se escribe de la forma:

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x), \forall x \in I,$$

para algunas constantes α_i . Se dice que $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ forman un **sistema fundamental de soluciones de (LH)** en I .

La **solución general de (LH)** es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad c_1, c_2, \dots, c_n \text{ constantes}$$

4. El Wronskiano de n soluciones de **(LH)** en I , o bien, es idénticamente cero en I , o bien, no se anula en ningún punto de I (esta propiedad es una consecuencia de la fórmula de Abel para sistemas)
5. Sean $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ n soluciones de **(LH)** en I , son linealmente independientes si y sólo si $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \neq 0, \forall x \in I$ (evidentemente, basta con comprobar que el Wronskiano es no nulo en un punto fijo cualquiera x_0 de I). Esta propiedad es consecuencia de las propiedades 2 y 4.
6. Hay n soluciones linealmente independientes de **(LH)**.

Resolución de ecuaciones lineales de n , $\forall n \geq 2$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (\text{LH})$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x) \quad (\text{LNH})$$

REDUCCIÓN DEL ORDEN para (LH):

Método de variación de parámetros: Si se conoce una solución $y_1(x)$ de (LH), se reduce a una ecuación lineal de orden $(n - 1)$ haciendo: $y(x) = c(x)y_1(x)$ ($c(x)$ es la función incógnita en la nueva ecuación).

BÚSQUEDA DE SOLUCIÓN PARTICULAR de (LNH):

- **Método de variación de parámetros** para cualquier ecuación lineal con a_i constantes o no y $\forall r(x) \neq 0$.

Se busca

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x),$$

con $c_i(x)$ a determinar substituyendo en (LNH).

- **Método de coeficientes indeterminados** para a_i constantes y con determinados términos $r(x) \neq 0$:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
 $s = 0$ si α no es raíz del polinomio característico
 $s = n_i$ si α es raíz de multiplicidad n_i

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ o $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, se busca

$$y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + x^s Q_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

- $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico
 $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz de multiplicidad n_i .

$p_k(x)$, $P_k(x)$ y $Q_k(x)$ denotan polinomios de grado k :

$$P_k(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k, \quad Q_k(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$$

con los coeficientes b_i y c_i a determinar substituyendo en (LNH).

La Transformada de Laplace.

- Transforma ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas,
- Transforma determinadas ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes polinómicos en ecuaciones diferenciales, en ocasiones más simples de resolver
- Herramienta útil para la resolución de:
 - Ecuaciones integrales – Ecuaciones integro-diferenciales
 - Sistemas diferenciales lineales.

Definiciones

- Se dice que la función f es continua por segmentos en $[0, \infty)$, cuando lo es en cada intervalo $[0, N]$ para cualquier $N > 0$.
- La función $f, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ es de orden exponencial α si existen constantes positivas T y M tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq T.$$

- Dada una función $f, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, se denomina **Transformada de Laplace de f en el punto λ** al valor:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \quad (1)$$

- La definición de la transformada de Laplace está ligada a que la integral impropia de (1):

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} f(t) dt$$

sea convergente.

- Si la función f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α , la integral converge para $\lambda > \alpha$ o más exactamente para $Re(\lambda) > \alpha$.

Funciones útiles en Matemáticas, Físicas e Ingeniería

- FUNCIÓN "Heaviside" o "escalón"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

- FUNCIÓN DELTA: "función" $\delta(t-a)$, es tal que:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) \delta(t-a) dt = \Phi(a),$$

para cualquier función Φ continua en \mathbf{R} .

Propiedades de la transformada de Laplace.

1. Sean f y g funciones tales que su transformada de Laplace existe para $\lambda > \alpha$, y c_1, c_2 constantes cualesquiera. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](\lambda) = c_1 \mathcal{L}[f](\lambda) + c_2 \mathcal{L}[g](\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

2. Si la transformada de Laplace de f existe para $\lambda > \alpha$, entonces:

$$\mathcal{L}[e^{at} f](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda - a), \forall \lambda > \alpha + a.$$

3. Si f es continua en $[0, \infty)$ y f' es continua a trozos en $[0, \infty)$, y ambas son de orden exponencial α , entonces:

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda \mathcal{L}[f](\lambda) - f(0), \forall \lambda > \alpha.$$

4. Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y $f^{(n)}$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, y todas ellas son de orden exponencial α , entonces, $\forall \lambda > \alpha$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](\lambda) = \lambda^n \mathcal{L}[f](\lambda) - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

5. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α . Entonces: $\int_0^t f(u)du$ es continua y de orden exponencial, y

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right](\lambda) = \frac{\mathcal{L}[f](\lambda)}{\lambda}, \forall \lambda > \alpha.$$

6. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α . Entonces:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](\lambda) = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[f]}{d^n \lambda}(\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

7. Sean f y g funciones tales que su transformada de Laplace existe para $\lambda > \alpha$. Entonces:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-u)g(u)du\right](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda) \cdot \mathcal{L}[g](\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

La función $f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$ se denomina *convolución de f y g* .

8. Si la transformada de Laplace de f existe para $\lambda > \alpha$, entonces:

$$\mathcal{L}[u(t-a)f](\lambda) = e^{-\lambda a} \mathcal{L}[f(t+a)](\lambda), \forall \lambda > \alpha,$$

o lo que es equivalente

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)](\lambda) = e^{-\lambda a} \mathcal{L}[f(t)](\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

9. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y periódica de periodo T (es decir, $f(t) = f(nT + t), \forall t \in [nT, (n+1)T]$). Entonces,

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \frac{\int_0^T e^{-\lambda t} dt}{1 - e^{-\lambda T}}, \forall \lambda > 0.$$

10. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. Entonces,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](\lambda) = 0$$

Se llama **transformada inversa de Laplace** de una función $F(\lambda)$, a la función $f(t)$ continua a trozos en $[0, \infty)$ que verifica:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = F(\lambda).$$

Teorema de inversión.

Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[0, \infty)$, de orden exponencial α , y tales que

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

Entonces:

$$f(t) = g(t)$$

salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de f y g .

APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE CONTORNO:
modelo de vigas con cargas puntuales:

$$EIy^{(4)} = p(x), \quad x \in (0, 1)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

donde E e I son constantes. E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia, y la constante EI se denomina constante de rigidez de curvatura. Los esfuerzos horizontales se suponen nulos. Se trata de un problema de contorno. Supongamos que la viga tiene una carga concentrada P que actúa sobre su centro $x = l$. El problema entonces es:

$$EIy^{(4)} = P\delta(x-l), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0$$