ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

$y = y(x)$ **función incógnita**; x **variable independiente**.

F definida $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ y aparece la derivada segunda de y

Integración $\longrightarrow$ familia biparamétrica de curvas integrales $\phi(x, y, c_1, c_2) = 0$: **solución general**.

Reducción a 1^{er} orden: si $F(x, y', y'') = 0$, con $v = y'$

Ecuación lineal: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

ED en **forma normal:** $y'' = f(x, y, y')$, $f : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$

Dado $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$, **problema de valores iniciales** o **Problema de Cauchy:**

$$(PC) \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0^1 \quad , \quad y'(x_0) = y_0^2. \end{cases}$$

Definición: Dada una función $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$, $y = \varphi(x)$ es una **solución** de (PC) en (a, b) si: φ es continua y dos veces derivable en (a, b), y $\forall x \in (a, b)$ se verifica

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D \quad \text{y} \quad \varphi''(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x));$$

y además, $\varphi(x_0) = y_0^1$ y $\varphi'(x_0) = y_0^2$.

Teorema 1 *Sea D el dominio $D = \{(x, y, z)/a < x < b, c < y < d, e < z < f\}$ y la función f, $f : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, continua en D y con derivadas $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$ continuas en D.*

$\forall (x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$, $\exists$ $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, en el cual la solución del problema de Cauchy (PC) existe y es única.

* **Resúmenes / Capítulo 2 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

Relación con sistemas y aproximaciones numéricas

Haciendo $y' = z$ en la ecuación $y'' = f(x, y, y') \rightarrow$ **sistema diferencial de 1^{er} orden** con dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & z \\ z' & = & f(x, y, z). \end{array} \right.$$

x **variable independiente** $y = y(x), z = z(x)$ **incógnitas**

Problema de Cauchy para un sistema:

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & r(x, y, z) \\ z' & = & s(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0 & , & z(x_0) = z_0, \end{array} \right.$$

Resultado de existencia y unicidad de solución:

Sea $D = \{(x, y, z)/a < x < b, c < y < d, e < z < k\}$ *y las funciones* $r, s : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, *tales que* r, s, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial z}$ *continuas en* D. *Entonces:*

$\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$, $\exists$ $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, *en el cual la solución del problema de Cauchy (PC) existe y es única.*

La aproximación numérica de la solución $(y(x), z(x))$ en $x_i = x_0 + ih$, para el tamaño del paso h, es:

$$y_i = y_{i-1} + hr(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$$

$$z_i = z_{i-1} + hs(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}),$$

para $i = 1, 2, \cdots N$, donde $N = \delta h^{-1}$

Método de Euler: $(y_i, z_i) \approx (y(x_i), z(x_i))$ para $h \longrightarrow 0$

Notaciones vectoriales:

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{y}' & = & \overline{F}(x, \overline{y}) \\ \overline{y}(x_0) & = & \overline{y}_0 \end{array} \right.$$

Dada la función $\overline{F}$ y el punto $(x_0, \overline{y}_0)$, calcular
$x_i = x_0 + ih$, $\quad \overline{y}_i = \overline{y}_{i-1} + h\overline{F}(x_{i-1}, \overline{y}_{i-1})$, $\quad i = 1, 2, \cdots N$

$\rightarrow$ **Extensión a otros métodos numéricos.**

Ecuaciones lineales de segundo orden.

Lineal homogénea (LH):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \text{con } a_0(x) \neq 0$$

Lineal no homogénea (LNH):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$p, q, r : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ funciones continuas}$$

p y q coeficientes; r término independiente,

Si p y q constantes: ED lineal de coeficientes constantes

Teorema 2 *Sean p, q, r funciones reales continuas en (a, b). Sea $x_0 \in (a, b)$ e $y_0^1, y_0^2 \in \mathbf{R}$. Entonces existe una única solución del problema de Cauchy:*

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + p(x)y' + q(x)y & = & r(x) \\ y(x_0) = y_0^1 & , & y'(x_0) = y_0^2, \end{array} \right.$$

definida en todo el intervalo (a, b).

PROPIEDADES de las soluciones de **(LH)**

1. Si $y_1(x), y_2(x)$ son soluciones de **(LH)** en (a, b) entonces $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ es también solución de **(LH)** en (a, b) (α_1, α_2 son constantes cualesquiera).

2. **Theorema**: *Si y_1, y_2 son dos soluciones de* **(LH)** *en (a, b) tales que en un punto cualquiera $x_0 \in (a, b)$:*

$$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$$

entonces, cualquier otra solución puede escribirse:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ para algunas constantes c_1, c_2

Definición: $\{y_1, y_2\}$ en el teorema se llama **conjunto fundamental de soluciones**.

Definiciones:

- Dos funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ son **linealmente independientes** en I cuando:

  si $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0\,, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

- $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ son **linealmente dependientes** en I si no son lineal. independientes ($\exists C \neq 0$ constante/ $\varphi_1(x) = C\varphi_2(x)$ o $\varphi_2(x) = C\varphi_1(x)\,, \forall x \in I$).

- **Wronskiano** de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *en el punto* x como:

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

Para $I \equiv (a, b)$ intervalo de resolución de **(LH)** y **(LNH)**

PROPIEDADES de las soluciones de **(LH)** (continua):

3. **Identidad de Abel**: dadas $y_1(x), y_2(x)$ dos soluciones de **(LH)** en I, $\exists C$ una constante/ $W[y_1, y_2](x) = C\,\exp(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds)$, $\forall x \in I$.

4. **Teorema:** *Sean* $y_1(x), y_2(x)$ *dos soluciones de* **(LH)** *en* I*, son linealmente independientes*
$\Longleftrightarrow W[y_1, y_2](x) \neq 0$, $\forall x \in I$
$\Longleftrightarrow W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ *para algún* $x_0 \in I$*.*

5. **Siempre existen dos soluciones** $\{y_1, y_2\}$ **linealmente independientes de (LH).** Se dice que $\{y_1, y_2\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

Dadas $\{y_1, y_2\}$ dos soluciones linealmente independientes de (LH), **la solución general de (LH)** es:

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ con c_1 y c_2 constantes.

Resumen de propiedades de las soluciones de (LH)

1. Si $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, $\forall x_0 \in I$, entonces las soluciones $y_1(x), y_2(x)$ de **(LH)** son linealmente independientes en I.

2. Dadas dos soluciones $y_1(x), y_2(x)$ de **(LH)** linealmente independientes en I, cualquier otra solución $y(x)$ se escribe de la forma:

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \,, \forall x \in I \,,$$

   para algunas constantes α_1, α_2. Se dice que $\{y_1, y_2\}$ forman un *conjunto fundamental de soluciones de* **(LH)** *en* I.

3. Sean $y_1(x), y_2(x)$ dos soluciones de **(LH)** en I, entonces

$$W[y_1, y_2](x) = C \exp(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds), \; \forall x \in I,$$

   siendo C una constante que depende de y_1 e y_2 pero no de x (**identidad de Abel**).

4. El Wronskiano de dos soluciones de **(LH)** en I, o bien, es identicamente cero en I, o bien, no se anula en ningún punto de I

5. Sean $y_1(x), y_2(x)$ dos soluciones de **(LH)** en I, son linealmente independientes $\Longleftrightarrow$: $W[y_1, y_2](x) \neq 0, \forall x \in I$ (obviamente, basta con comprobar que el wronskiano es no nulo en un punto fijo cualquiera x_0 de I). (cf. propiedades 1 y 4)

Siempre existen dos soluciones linealmente independientes de (LH)

El método de variación de parámetros

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \textbf{(LH)}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad \textbf{(LNH)}$$

REDUCCION DEL ORDEN DE **(LH)**:
Dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación **(LH)** en el intervalo I. Calculamos otra solución $y_2(x)$ linealmente independiente: Buscamos $y_2(x) = y_1(x)c(x)$ donde $c(x)$

$$c''(x)y_1(x) + (2y_1'(x) + p(x)y_1(x))c'(x) = 0$$

$c' = u \to$ ecuación lineal de primer orden, e integrando

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx.$$

SOLUCION DE LA ECUACION **(LNH)**:
Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de **(LH)**, **la solución general** de **(LNH)** es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

donde c_1, c_2 constantes e y_p **una solución particular** de **(LNH)**. Se busca y_p por el **método de variación de parámetros**:

$$y_p(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x)$$

con $K_1(x)$ y $K_2(x)$ / $y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$: $\Rightarrow$

$$K_1' y_1 + K_2' y_2 = 0,$$

$$K_1' y_1' + K_2' y_2' = r(x),$$

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

Dadas $\{y_1, y_2\}$ $\to$ las soluciones generales (LH) y (LNH)

ECUACIONES QUE SE SABEN RESOLVER

- **La ecuación lineal de coeficientes constantes:**

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0.$$

Se busca $y_1 = e^{\lambda x} \Longrightarrow \lambda$ debe ser raíz del **polinomio característico:** $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$

Este polinomio tiene por raices λ_1, λ_2 en $\mathbb{C}$.

Posibilidades:

a). $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales. Conjunto fundamental de soluciones

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}.$$

b). $\lambda_1 = \lambda_2$. Conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\},$$

c). λ_1, λ_2 raices son complejas conjugadas: $\lambda = p \pm qi$. Conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx\}.$$

La solución general en $(-\infty, \infty)$ es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

- **La ecuación de Euler** de segundo orden:

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ constantes.}$$

Se reduce a una lineal de coeficientes constantes haciendo: $x = e^t$ para $x > 0$ o $t = \ln|x|$

o se busca $y_1(x) = x^r \Longrightarrow r$ debe ser raíz del **polinomio indicial**: $\alpha r(r-1) + \beta r + \gamma$.

$\rightarrow$ Se resuelve en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Ecuaciones lineales de segundo orden: Solución por desarrollos en serie de potencias.

Definición: una función $f(x)$ es **analítica en el punto** $x = x_0$ cuando admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n$$

convergente en algún entorno del punto x_0, con un *radio de convergencia* $\rho > 0$.

▶ Observaciones:

- La serie es convergente en $|x - x_0| < \rho$

- f_n son los coef. del desarrollo en serie de Taylor de f:

$$f_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- El hecho de que una función $f(x)$ sea "regular" en todo $\mathbf{R} \not\Rightarrow$ que f sea analítica con radio de convergencia ∞

- Un test de convergencia de series de potencias es el **criterio del cociente**: supuesto que $f_n \neq 0$ para n suficientemente grande, si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = r \Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n$ tiene radio de convergencia de $\rho = \frac{1}{r}$.

▶ **Se buscan soluciones funciones analíticas** para ecuaciones diferenciales del tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

cuando p y q son funciones analíticas en x_0

Para p y q analíticas en $x = 0$ ($x_0 \equiv 0$). BUSCAR:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

donde: $a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$

Solución por desarrollos en serie (continua).

Teorema 4 *Sean p y q funciones analíticas en el punto $x = x_0$. Sea ρ el mínimo de los radios de convergencia de las series de p y q, $\rho > 0$. Entonces, la solución general de la ecuación*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \textit{es:}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, y y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes, analíticas en x_0 y con radio de convergencia al menos ρ. Los coeficientes de las series solución se calculan recursivamente substituyendo la serie y sus derivadas en la ecuación diferencial.

▶ Posibles extensiones:

- Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n > 2$
- Sistemas diferenciales lineales con n ecuaciones
- Ecuaciones no lineales: restricciones importantes!
- Otros tipos de coeficientes p y q:

  e.g.,*puntos singulares regulares*

Definición: un punto $x = x_0$ se dice que es un **punto singular regular** de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ cuando la ecuación se puede escribir de la forma:

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0,$$

donde $p(x), q(x)$ son funciones analíticas en x_0.

SE BUSCAN soluciones:

$$y = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(x - x_0)^n.$$

Teorema 5 *Sea la ecuación:*

$$x^2y'' + x(xp(x))y' + (x^2q(x))y = 0\,,$$

*donde p y q son tales que las funciones $xp(x), x^2q(x)$ son analíticas en el punto $x = 0$, con $\rho > 0$ el mínimo radio de convergencia de las series de xp y x^2q. Sean p_0, q_0 los primeros términos de los desarrollos en serie de potencias de las funciones xp y x^2q respecivamente. Sean r_1 y r_2, $r_1 \geq r_2$, las raices reales del polinomio (*polinomio indicial*):*

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0\,.$$

Entonces, la ecuación admite dos soluciones $y_1(x), y_2(x)$, linealmente independientes en $0 < |x| < \rho$, dadas de la forma:

1. *Si $r_1 - r_2$ no es un número entero o cero, entonces*

$$y_1 = |x|^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)\,,$$

$$y_2 = |x|^{r_2}(\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n).$$

2. *Si $r_1 = r_2$, entonces $y_1 = |x|^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)\,,$*

$$y_2 = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n\,.$$

3. *Si $r_1 - r_2 \in \mathbf{N}$, entonces $y_1 = |x|^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)\,,$*

$$y_2 = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\,.$$

donde los coeficientes de las series a_i, b_i, c_i y la constante a se determinan por sustitución en la ecuación, y las series de potencias que aparecen tienen radio de convergencia al menos ρ. La constante a en principio podría ser 0 si la segunda solución no tiene un comportamiento logarítimico