

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1^{er} ORDEN*

Una ecuación diferencial de primer orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con su derivada

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

$F : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $y = y(x)$ es la **función incógnita**, $y'(x)$ su derivada, y x es la **variable independiente**.

Definición: Dada una función $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $y = \varphi(x)$ es **solución** de la ecuación (1) en (α, β) si:

- 1). φ es continua y derivable en (α, β) , y
- 2). $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ y $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ecuación diferencial **en forma normal:** $y' = f(x, y)$.

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Integración \longleftrightarrow **Familia uniparamétrica de soluciones**
- **Solución general:**

- *en forma explícita*, $y = y(x, c)$,
- *en forma implícita*, $\phi(x, y, c) = 0$,
- *en forma paramétrica* $(x(t, c), y(t, c)), t \in \mathbf{R}$,
- *en forma inversa*, $x = x(y, c)$.

Todas estas curvas se llaman **curvas integrales**

para $c = c_0$, $y = y(x, c_0)$ es una **solución particular**

* **Resúmenes / Capítulo 1 / Ecuaciones Diferenciales!?.
Una introducción. UC, M^a Eugenia Pérez Martínez**

El proceso inverso a la integración: dada $\phi(x, y, c) = 0$

$F(x, y, y') = 0$ se obtiene eliminando c , si se puede, en

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \phi_x(x, y, c) + \phi_y(x, y, c)y' = 0$$

Problema de valor inicial o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in$ dominio de definición de f .

→ Una solución $y = \varphi(x)$ / $\varphi(x_0) = y_0$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$

Ecuaciones de variables separadas: $f(y)y' = g(x)$

Solución: $\int f(y)dy = \int g(x)dx + c \quad \forall c$ constante.

Ecuaciones homogéneas: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

El cambio de variable $y = u \cdot x \rightarrow$ variables separadas

$$y' = u'x + u = g(u) \longleftrightarrow \frac{u'}{g(u) - u} = \frac{1}{x}$$

Se reducen a ecuaciones homogéneas:

- $y' = f(x, y)$, con $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \forall \lambda \in \mathbf{R}$:

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \text{con } P \text{ y } Q \text{ funciones homogéneas de grado } n$$

($P(\lambda x, \lambda y) = P(x, y)\lambda^n$ y $Q(\lambda x, \lambda y) = Q(x, y)\lambda^n, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$)

- $y' = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}$:

hacer $z = ax + by$ (o $X = -x_0 + x, Y = -y_0 + y$ si (x_0, y_0) es un punto de corte de las rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$)

Extensión del dominio de definición:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / f(x, y) \text{ definida } \text{ó} \quad \frac{1}{f(x, y)} \text{ definida}\}$$

INTERPRETACIÓN geométrica de $y' = f(x, y)$

La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ define **un campo de direcciones** en el dominio $D \subset \mathbf{R}^2$ donde $f(x, y)$ o $\frac{1}{f(x, y)}$ estén definidas:

$(x, y) \in D \longrightarrow$ dirección de la recta de pendiente $f(x, y)$

dirección del vector $(1, f(x, y))$ ó $(\frac{1}{f(x, y)}, 1)$.

En los puntos / f y $\frac{1}{f}$ están definidas ambas direcciones coinciden.

Bosquejo de curvas solución: en cada punto son tangentes a la dirección del campo

Curva isoclina para la pendiente k

$$\{(x, y) / f(x, y) = k\}$$

puntos del plano en los que las soluciones tienen pendiente k .

Dirección del campo \equiv Dirección del vector $(1, k)$

Isoclinas para las pendientes $k = 0$ y $k = \infty$ \longrightarrow posibles cambios en el crecimiento de las soluciones

Dominio de definición de $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / P(x, y) \text{ y } Q(x, y) \text{ definidas y no nulas a la vez } \}$

Otras definiciones/consideraciones de tipo geométrico

Si $\phi(x, y, c) = 0$ familia de curvas solución de $y' = f(x, y)$, la **familia de curvas ortogonales** son curvas solución de $y' = -\frac{1}{f(x, y)}$.

$$F(x, y, y') = 0 \longrightarrow F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

Ecuaciones de familias de curvas que se cortan con un ángulo ω :

$$F(x, y, y') = 0 \longrightarrow F\left(x, y, \frac{y' - \tan \omega}{1 + y' \tan \omega}\right) = 0$$

o

$$F(x, y, y') = 0 \longrightarrow F\left(x, y, \frac{y' + \tan \omega}{1 - y' \tan \omega}\right) = 0$$

Una curva γ es **curva envolvente** de una familia de curvas $\phi(x, y, c) = 0$ cuando

1. en cada punto de γ hay una curva de la familia tangente a ella
2. en cada trozo de curva γ hay infinitas curvas de la familia tangentes a γ .

$$\gamma: \quad \phi(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial c}(x, y, c) = 0 \quad (\longrightarrow \text{eliminar } c)$$

Ecuaciones diferenciales exactas.

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

$P, Q : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$, \mathcal{R} un rectángulo de \mathbf{R}^2

P y Q continuas y no nulas a la vez en \mathcal{R} .

Definición: (2) es **diferencial exacta** si $\exists F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R} /$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Si (2) diferencial exacta, entonces $F(x, y) = c$ es una familia de curvas integrales: $F_x + F_y y' = 0$

$$\rightarrow \text{Notación: } F_x \equiv \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}$$

CARACTERIZACIÓN:

Teorema 1 Sean P y Q dos funciones continuas y con derivadas parciales primeras continuas en \mathcal{R} . La ecuación (2) es diferencial exacta en \mathcal{R} si y sólo si

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}.$$

RESOLUCIÓN:

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y)$$

$$C'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$$

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right) dy.$$

Definición: un **factor integrante** de la ecuación (2) es una función $\nu = \nu(x, y) \neq 0$ en \mathcal{R} , tal que

$$\nu(x, y)P(x, y) dx + \nu(x, y)Q(x, y) dy = 0$$

es diferencial exacta $\iff \frac{\partial}{\partial y}(\nu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\nu Q)$

$\nu(x, y)$ factor integrante de (2) \Rightarrow

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \iff \nu P(x, y)dx + \nu Q(x, y)dy = 0$$

$\Rightarrow \nu(x, y)$ es solución de:

$$\nu_y(x, y)P + \nu(x, y)P_y = \nu_x(x, y)Q + \nu(x, y)Q_x$$

EDP / difícil resolución! Se buscan factores integrantes: $\nu(x)$, $\nu(y)$, $\nu(xy)$, $\nu(x^2 + y)$, $\nu(x^2 + y^2)$, etc.

EJEMPLOS:

$$\exists \nu(y) \iff \frac{Q_x - P_y}{P} \text{ es función de } y \longrightarrow \nu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$$

$$\exists \nu(x, y) = \nu(xy^2) \iff \frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2Q} \text{ función de } z = xy^2$$

$$\longrightarrow \nu(z) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2Q} dz}$$

$$\left(\nu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx} \quad / \quad \nu(z) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} dz}, \text{ con } z = x^2 + y^2 \right)$$

EJERCICIOS: ED reducibles a diferenciales exactas

- 1). La ecuación lineal $y' = p(x)y + q(x)$ admite un factor integrante dependiente de x .

-2). Si la ecuación $y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ es homogénea, admite un factor integrante: $\nu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$
(supuesto que $xP(x, y) + yQ(x, y) \neq 0$)

Ecuaciones lineales .

Ecuación lineal homogénea (LH):

$$y' + p(x)y = 0, \quad p : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continua}$$
$$\left(a_0(x)y' + a_1(x)y = 0, \quad a_0 \neq 0 \text{ en } (\alpha, \beta) \left(p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right) \right)$$

PROPIEDAD de las soluciones de (LH):

$y_1(x), y_2(x)$ soluciones en (α, β) y $\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$

$\implies y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ solución en (α, β)

SOLUCIÓN GENERAL de (LH): $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$

Ecuación lineal no homogénea (LNH):

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p, q : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continuas.}$$

SOLUCIÓN GENERAL de (LNH):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} c + e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

Teorema 2 Sean $p, q : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R}$ funciones continuas y $x_0 \in (\alpha, \beta), y_0 \in \mathbf{R}$. Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

definida en el intervalo (α, β) . Esta solución es:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(u)du} ds \right).$$

Ecuaciones lineales de 1^{er} orden.

$$y' + p(x)y = 0, \quad (\text{LH})$$

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (\text{LNH})$$

PROPIEDADES de las soluciones de (LNH):

- y_1, y_2 soluciones de (LNH) en $(\alpha, \beta) \implies y_1 - y_2$ solución de (LH) en (α, β) .

- La solución general de (LNH) es

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx} + y_p(x)$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de (LNH).

- **Método de variación de parámetros:** Buscar $y_p(x)$, $y_p(x) = k(x)e^{-\int p(x)dx}$, con $k(x)$ a determinar

$$\implies k(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx$$

Ecuaciones reducibles a lineales

Ecuación de Bernouilli: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$)

Multiplicar por y^{-n} y hacer $z = y^{-n+1} \rightarrow$ lineal

Ecuación de Riccati: $y' + p(x)y^2 + q(x)y = h(x)$

Hacer $u = y - y_p(x) \rightarrow$ Bernouilli para $n = 2$
(supuesto conocida una solución particular $y_p(x)$).

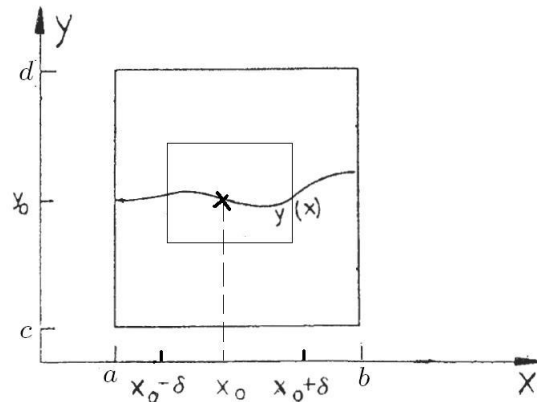
El problema de Cauchy: Ecuaciones no lineales

Teorema 3 Sea D el rectángulo abierto

$$D = \{(x, y) / a < x < b, c < y < d\}$$

y y $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en D . Entonces, $\forall (x_0, y_0) \in D$, \exists un intervalo, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, en el cual existe una única solución $y = \varphi(x)$ del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



OBSERVACIONES

- D puede ser cualquier dominio abierto de \mathbf{R}^2 .

- El δ máximo en general no es fácil de determinar

Una primera estimación de δ : $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$, $\alpha, \beta / D_1 = \{(x, y) / |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\} \subset D$, y, $M = \max_{(x, y) \in D_1} |f(x, y)|$.

- **Problema bien planteado:** "pequeñas variaciones de los datos" \Rightarrow "pequeñas variaciones de la solución"
- Supuesto que f es "muy regular", "cerca de x_0 ":

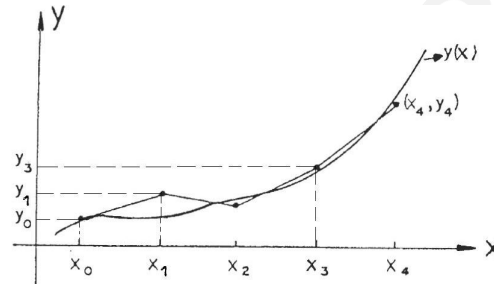
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$|error| \leq \max_{\zeta \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \frac{|\varphi'''(\zeta)|}{3!} \delta^3$$

Solución numérica: Método de Euler

Sean f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en D , y $(x_0, y_0) \in D$: Sea $y = \varphi(x)$ la única solución de (PC) en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Se conoce es la recta tangente a $\varphi(x)$ en (x_0, y_0)

Para h muy pequeño, en $[x_0, x_0 + h]$,
 $\varphi(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

Sea $x_1 = x_0 + h$, en $[x_1, x_1 + h]$,
 $\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + f(x_1, \varphi(x_1))(x - x_1)$.

pero $\varphi(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \implies$
en $[x_1, x_1 + h]$, $\varphi(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Construimos así **una aproximación de la solución de (PC)** en el intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$

Dados (x_0, y_0) , $N = \delta h^{-1}$, se calcula recursivamente
 $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Solución numérica de (PC) en $[x_0, x_0 + \delta]$: $\{y_i\}_{i=0}^N$
Aproximación de la solución en $[x_0, x_0 + \delta]$:

$$\varphi_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), x \in [x_{i-1}, x_i].$$

$$h = \text{tamaño del paso} = \frac{\delta}{N}, \quad h \rightarrow 0 \iff N \rightarrow \infty$$

Para la aproximación en $[x_0 - \delta, x_0]$: cambiar h por $-h$

Método de orden 1: error acotado por $Cte \cdot h$

SOBRE CONVERGENCIA del método:

El *método converge en x* si $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0$.

Teorema 4 Sea $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en $[a, b] \times \mathbf{R}$ y f acotada:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \subset [a, b].$$

SOBRE ERRORES del método:

En la iteración i , el método de Euler nos da un valor y_i aproximado de la solución $\varphi(x_i)$; el ordenador nos da \tilde{y}_i

$$E_i = \varphi(x_i) - \tilde{y}_i = \varphi(x_i) - y_i + y_i - \tilde{y}_i.$$

$y_i - \tilde{y}_i$ es el **error de redondeo**

$e_i = \varphi(x_i) - y_i$, **error del método**,

Definición: el método es de orden p si $|e_i| \leq Cte.h^p$

error local de truncatura: El error en la iteración i supuesto que y_{i-1} es exacto ($y_{i-1} = \varphi(x_{i-1})$).

error global: suma de todos los errores locales (e_N)

$$|e_N| \leq \frac{Ch}{2L}(e^{\delta L} - 1)$$

donde $C = \max_{(x,y) \in D_1} |f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}|$, $L = \max_{(x,y) \in D_1} |\frac{\partial f}{\partial y}|$, siendo D_1 el rectángulo cerrado en el que f y sus derivadas parciales primeras son continuas, $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$.

- El error en el método de Euler es de orden 1
- El error aumenta al aumentar el intervalo (δ)
- La aproximación es mejor para h pequeño
- Al disminuir h puede aumentar el error de redondeo.

SOBRE MEJORAS DEL MÉTODO DE EULER:

Considerar: $\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds,$ ○

$$\varphi(x_i + h) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \dots$$

- **El método de Euler mejorado** para aproximar numéricamente la solución de (PC): Se calcula y_{i+1} por el método de Euler y se mejora aproximando la integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds$ por el valor medio:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Método de orden 2.

- **El método Taylor de orden n** para la aproximación numérica de la solución de (PC): se utilizan en cada iteración los n primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución en x_i .

Para $n = 3$ (método de orden 2):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i))\frac{h^2}{2}$$

- **El método de Runge-Kutta**, para aproximar la solución de (PC):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$$

$$L_{i,1} = f(x_i, y_i), \quad L_{i,2} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,1}\right),$$

$$L_{i,3} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,2}\right), \quad L_{i,4} = f(x_i + h, y_i + hL_{i,3}).$$

Método de orden 4.