NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2021/22
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen extraordinario, 2^o parcial: 7- Febrero - 2022

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' &=& -5y_1 + y_2 + 6e^{2x} \\ y_2' &=& 4y_1 - 2y_2 - e^{2x} \end{array}\right.$$

$$y_1(0) = \frac{1}{4}, \quad y_2(0) = \frac{17}{12}.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

EJERCICIO 2
Utilizar el método de separación de variables para encontrar una solución del siguiente problema de valor inicial:

$$u_t - \sin(t)u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = e^{-2x}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Calcular $u_t(x, 0)$

SOLUCIÓN:

$u_t(x, 0) =$

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Se considera la ecuación de Laplace en coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), y se plantea el problema de contorno para un modelo de calor estacionario en la corona circular $r \in (1,2)$, $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2}u = r, \qquad \text{para } r \in (1,2), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$u(1,\theta) = \frac{1}{8}, \quad u(2,\theta) = 0 \quad , \text{ para } \theta \in [0, 2\pi)$$

Demostrar que el problema tiene una única solución independiente de θ y encontrarla.

SOLUCIÓN

UNICIDAD de solución:
razonamiento breve

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 4
Encontrar los valores propios y las funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0,3)$$

$$y'(0) = 0, \quad y(3) = 0.$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$, en el intervalo $(0,3)$, en términos de las funciones propias encontradas. Escribir explícitamente el primer coeficiente de Fourier no nulo, y el k-ésimo coeficiente de Fourier. Hacer lo mismo para la función $f(x) = \cos(\frac{\pi}{6}x)$.

VALORES PROPIOS y
FUNCIONES PROPIAS

DESARROLLO de $f(x) = 1$:

1^{er} coeficiente no nulo:..k-ésimo coeficiente.............

DESARROLLO de $f(x) = \cos(\frac{\pi}{6}x)$:

1^{er} coeficiente no nulo:..k-ésimo coeficiente.............

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5
Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (0,3), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos(\frac{\pi}{6}x)\,, \quad x \in (0,3)\,, \\ u_t(x,0) &= 1, \quad x \in (0,3)\,, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad t > 0\,, \\ u(3,t) &= 0, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

Usar la separación de variables y los resultados del ejercicio 3 si se precisa. Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega y las ecuaciones en la variable t que se resuelven. Escribir la solución si las condición inicial $u_t(x,0) = 1$ se cambia por $u_t(x,0) = 0$.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

ECUACIONES en la variable t:

SOLUCION del problema

SOLUCION cuando $u_t(x,0) = 0$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)\,dx)\,dx$

- E.D.O. de segundo orden $\;y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\,dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\,dx)}{(y_1(x))^2}\,dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\;\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\,dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$