NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2021/22
Ampliación de Matemáticas (EDO)
Examen extraordinario, 1^{er} parcial: 7-Febrero-2022

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver el problema de Cauchy

$$y' = -\frac{y^2 - xy}{xy - 1}, \qquad y(2) = 1$$

(Indicación: buscar un factor integrante dependiente de y).
Hacer un dibujo aproximado de la solución en el campo de direcciones asociado; razonar la respuesta. Encontrar las curvas isoclinas para las pendientes 0 e ∞, dibujarlas en el campo de direcciones dado en $[-4,4] \times [-4,4]$ (o hacer un gráfico aparte). Rayar las regiones de crecimiento de las soluciones, razonando la respuesta.

FACTOR INTEGRANTE

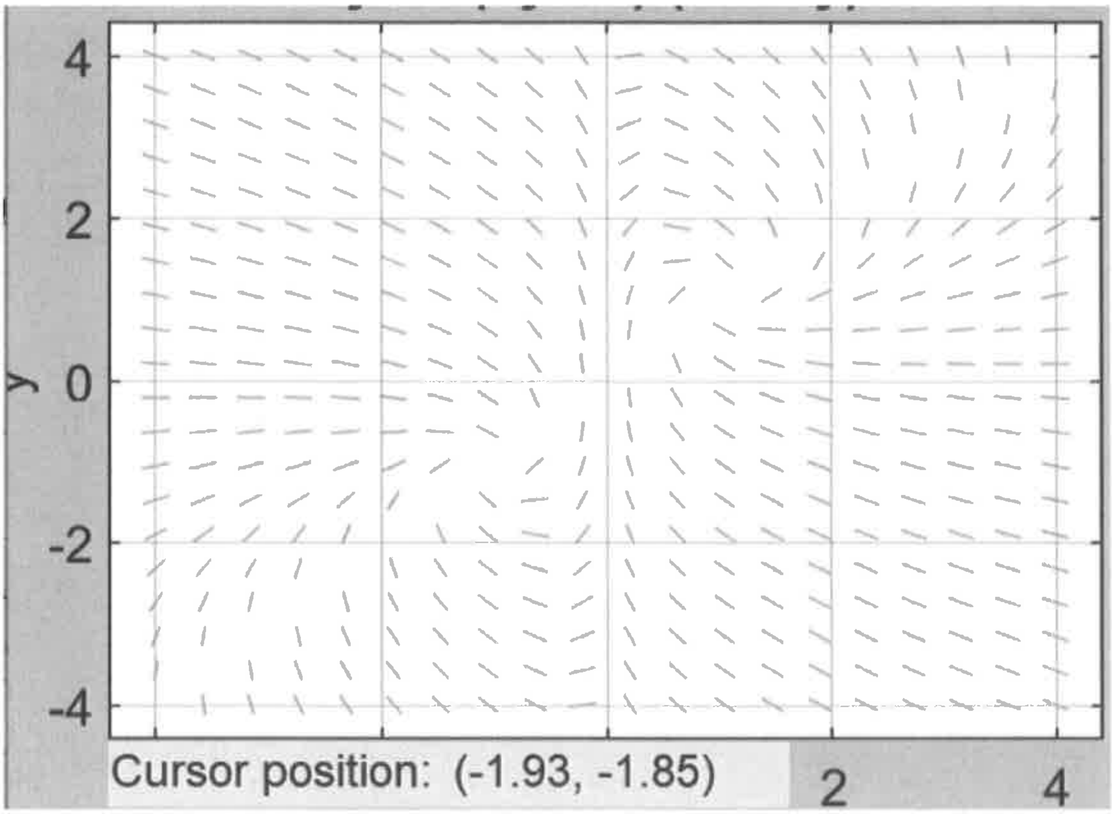
SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN/ y(2)=1

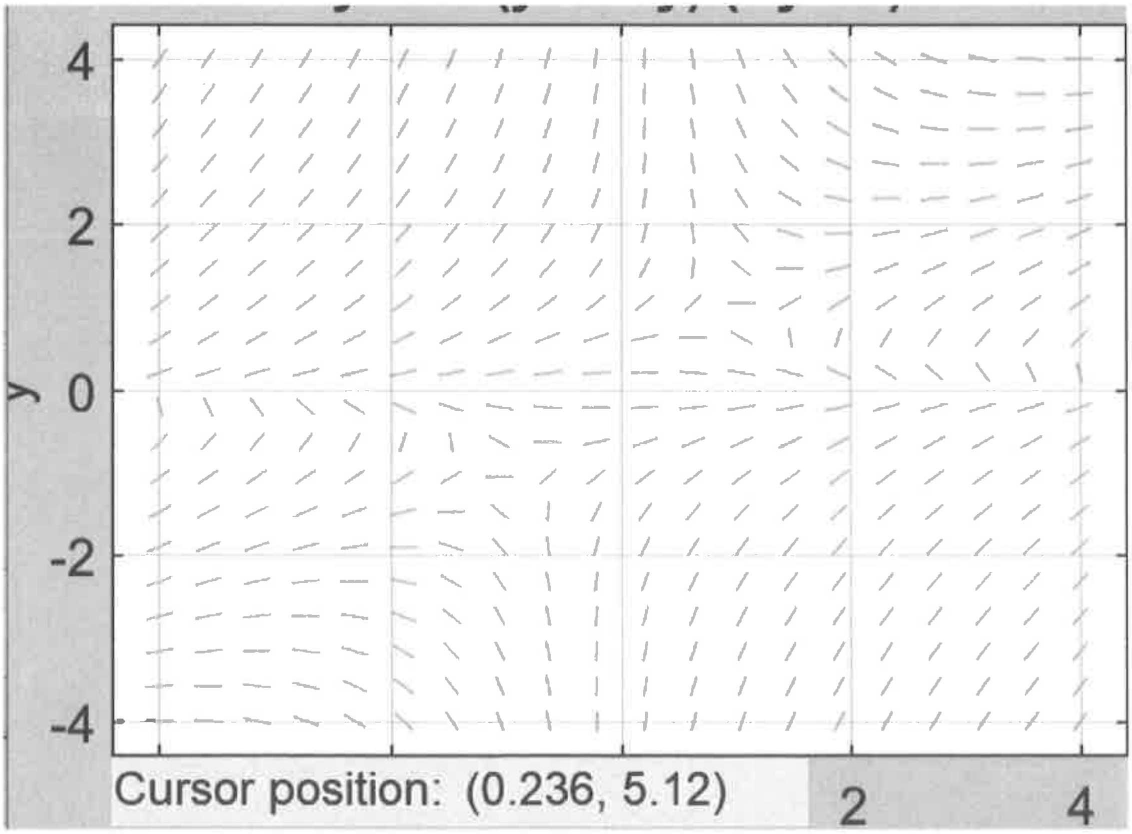
CAMPO I o II
(tachar lo que no proceda)

ISOCLINAS para las pendientes 0 e ∞

I).


4
2
y 0
-2
-4
Cursor position: (-1.93, -1.85)
2
4

II).


4
2
y 0
-2
-4
Cursor position: (0.236, 5.12)
2
4

EJERCICIO 2

Resolver el problema de Cauchy

$$y' = \frac{xy + y^2}{x^2}, \qquad y(1) = 1.$$

Indicar el intervalo de definición de la solución explícita razonando la respuesta.

Encontrar la aproximación de la solución mediante los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor.

SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN Explícita/$y(1) = 1$.. ...INTERVALO........................

APROXIMACIÓN

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver las ecuaciones diferenciales:

$$a). \qquad y'' - 5y' + 4y = e^x$$

$$b). \qquad y^{iv)} - 5y'' + 4y = e^{3x}$$

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA a).

SOLUCIÓN GENERAL de a).

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA b).

SOLUCIÓN GENERAL de b).

EJERCICIO 4

Resolver la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' - xy = 1$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea es $y = \dfrac{e^x}{x}$

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5

Se considera la ecuación (una ecuación de Hermite)

$$y'' - 2xy' + 4y = 0$$

1. Buscar una solución que sea un polinomio de grado 2. Escribir las condiciones iniciales que verifica dicha solución.

2. Buscar la solución en forma de serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Escribir los los 9 primeros términos en función de a_0 y a_1, y encontrar el término general a_n en función de los anteriores. Indicar el intervalo de convergencia de la serie. Razonar la respuesta.

1.-SOLUCIÓN polinómica

C. INICIALES

2.-DESARROLLO en serie de la solución

INTERVALO....

$$y(x) = a_0(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$+\, a_1(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

TÉRMINO GENERAL a_n.. para $n \geq$..........?

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)\, dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\, dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\, dx)}{(y_1(x))^2}\, dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\, dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$